



La gestione a scorta dei materiali



La gestione a scorta dei materiali

-

Introduzione



Introduzione

- La gestione dei materiali si propone di determinare le modalità di rilascio degli ordini di produzione/acquisto e dei livelli di scorta nelle varie fasi del sistema produttivo
- L'obiettivo è quello di garantire, da un lato, il corretto **funzionamento del sistema produttivo** ed il **livello di servizio** al cliente, dall'altro lato, di assicurare l'**economicità di gestione**
- Gli approcci da utilizzare differiscono a seconda della *configurazione* del sistema produttivo



La gestione a scorta dei materiali

-

Le scorte di materiale

Le scorte di materiale

- Tipologie di scorte
 - **Scorte di materie prime e/o componenti:** sono scorte localizzate nella fase a monte del sistema di produzione. Dipendono dalla modalità con cui vengono emessi gli ordini verso i fornitori (**politiche di fornitura**) e dal **livello di servizio** che si vuole garantire al sistema produttivo

Sono caratterizzate da maggiore standardizzazione, e quindi minore rischio di obsolescenza, non essendo ancora entrate nel sistema produttivo e quindi non avendo ancora subito le trasformazioni dipendenti dalla personalizzazione richiesta dai clienti



Le scorte di materiale

- **Scorte di prodotti finiti:** sono scorte localizzate nella parte più a valle del sistema di produzione. Dipendono dalla modalità con cui è gestito il sistema produttivo (**rilascio ordini di produzione**) e dal **livello di servizio** che si vuole garantire al cliente.

Sono caratterizzate da maggiore personalizzazione, e quindi sono soggette ad un rischio di obsolescenza, che comunque dipende dal grado di personalizzazione e dalla stabilità del mercato di riferimento.



Le scorte di materiale

- **Work-In-Process (WIP):** sono le scorte in attraversamento nel sistema produttivo, e rappresentano materiali che stanno subendo le trasformazioni.

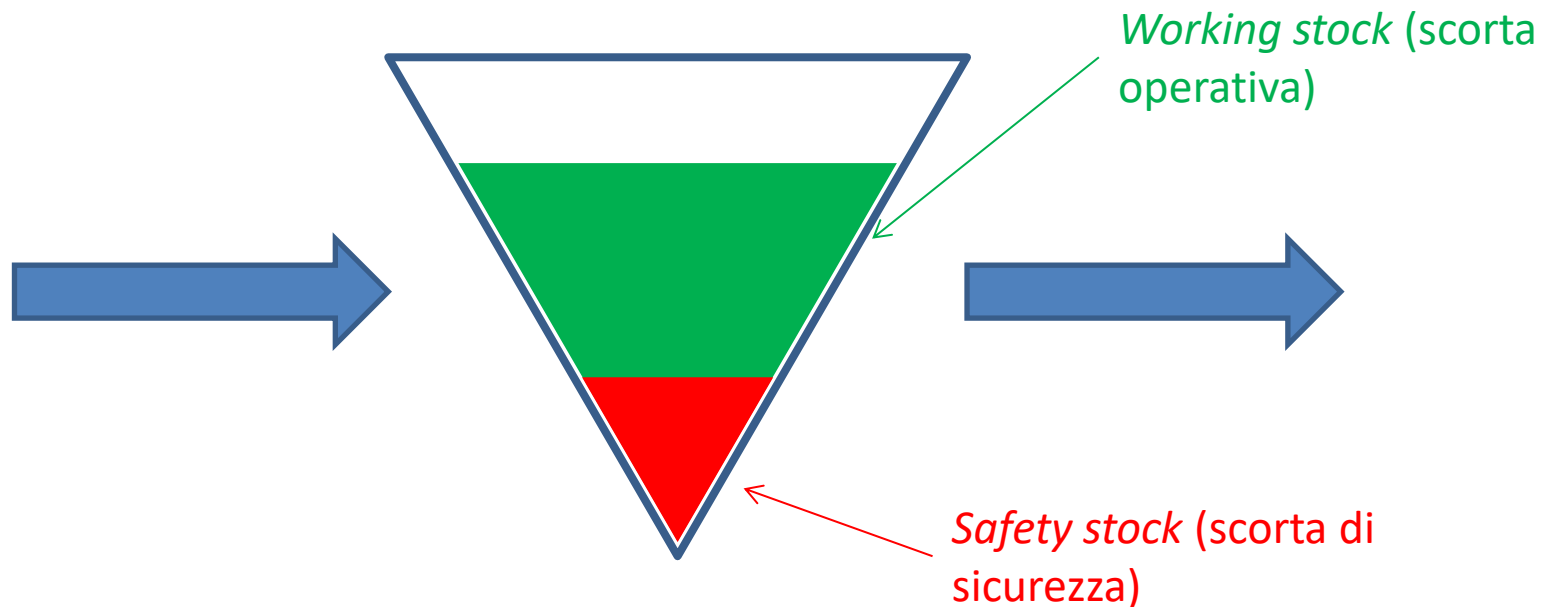
La quantità di WIP dipende dal tempo di attraversamento del sistema (vedi Legge di Little) ed anche dalle scelte che vengono fatte in termini di compensazione degli effetti della variabilità, e quindi del livello di bufferizzazione che si vuole garantire ai flussi nel sistema produttivo.

Il WIP aumenta il suo grado di personalizzazione mano a mano che ci si sposta da monte verso valle nel sistema produttivo.



Le scorte di materiale

- Considerando un generico «*stock point*», è possibile classificare le scorte in esso presenti in base alla funzione svolta.





Le scorte di materiale

- ***Working stock (scorta operativa)***: è la scorta che compensa gli scostamenti tra flusso in ingresso e flusso in uscita coprendo il tempo di attraversamento del sistema, cioè da quando emetto l'ordine (verso fornitori o verso il sistema produttivo) a quando sono consegnati i materiali.
- ***Safety stock (scorta di sicurezza)***: è la scorta che copre le fluttuazioni della domanda durante il tempo di attraversamento dell'ordine. Dipende dalla variabilità e dal livello di servizio che si vuole garantire.



La gestione a scorta dei materiali

-

Costi di gestione delle scorte

Costi di gestione delle scorte

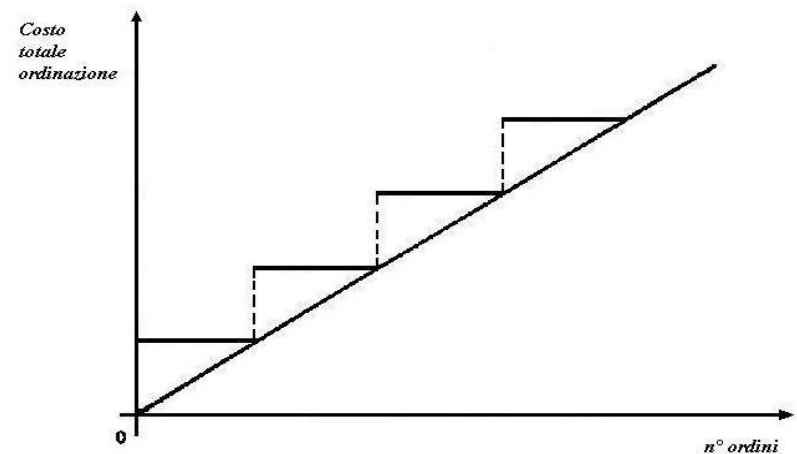
- **Costo di acquisto:** è il prezzo pagato per l'acquisto del materiale. In genere è costante, a meno che non vi siano sconti sul prezzo correlati alla quantità ordinata.
- **Costo di emissione dell'ordine:** è il costo di tutte le attività connesse all'emissione dell'ordine ed al ricevimento della merce.

Ha tipicamente un andamento che dipende dalla quantità ordinata.

Costi coinvolti nella gestione delle scorte

Comprende diverse voci di costo

- Costi di preparazione ed emissione dell'ordine;
- Costi di ricevimento e controllo della merce ordinata;
- Costi amministrativi per la contabilizzazione dei materiali;
- Costi di trasporto (se costanti e non inclusi nel prezzo d'acquisto della merce).





Costi coinvolti nella gestione delle scorte

- **Costo di mantenimento a magazzino:** è il costo che si sostiene per conservare la merce a magazzino. Coinvolge diversi fattori:
 - costi degli spazi occupati;
 - costi di gestione (es: personale e attrezzature);
 - costi energetici (es: celle frigorifere);
 - costi di assicurazione (es: incendio, furto);
 - **costi del capitale immobilizzato.**

Questo costo, detto anche «*holding cost*», è tipicamente proporzionale alla quantità di merce stoccata a magazzino.



Costi coinvolti nella gestione delle scorte

- **Costo di invecchiamento:** sono correlati al fatto che la merce può perdere valore al passare del tempo, a causa di:
 - invecchiamento naturale (o *deperimento*)
 - obsolescenza

Questo costo, a seconda della tipologia di prodotti che si gestiscono, può essere proporzionale al tempo medio di permanenza a scorta, oppure alla quantità che rimane in magazzino a fine periodo (es: prodotti stagionali).



Costi coinvolti nella gestione delle scorte

- **Costo di «stockout»:** è il costo nel quale si incorre ogni qual volta il livello di scorta del magazzino va a «zero» e quindi non si riesce a soddisfare prontamente la domanda del cliente.
Il cliente può, a questo punto, adottare due comportamenti diversi:
 1. il cliente è disposto ad **aspettare**, quindi la sua domanda viene soddisfatta in **ritardo**;
 2. il cliente **NON** è disposto ad **aspettare**, quindi la sua domanda viene **persa**.



Costi coinvolti nella gestione delle scorte

Nel primo caso, si parla di **stockout** con **backordering**, cioè la domanda viene comunque registrata e quindi soddisfatta in ritardo, tipicamente pagando una penale in termini di sconto al cliente.

Nel secondo caso si parla di **stockout** con **lost sales**, cioè la vendita viene persa e si ha una rimanenza a magazzino che dovrà essere venduta successivamente. Anche in questo caso si ha un costo relativo al mancato profitto nell'immediato.



La gestione a scorta dei materiali

-

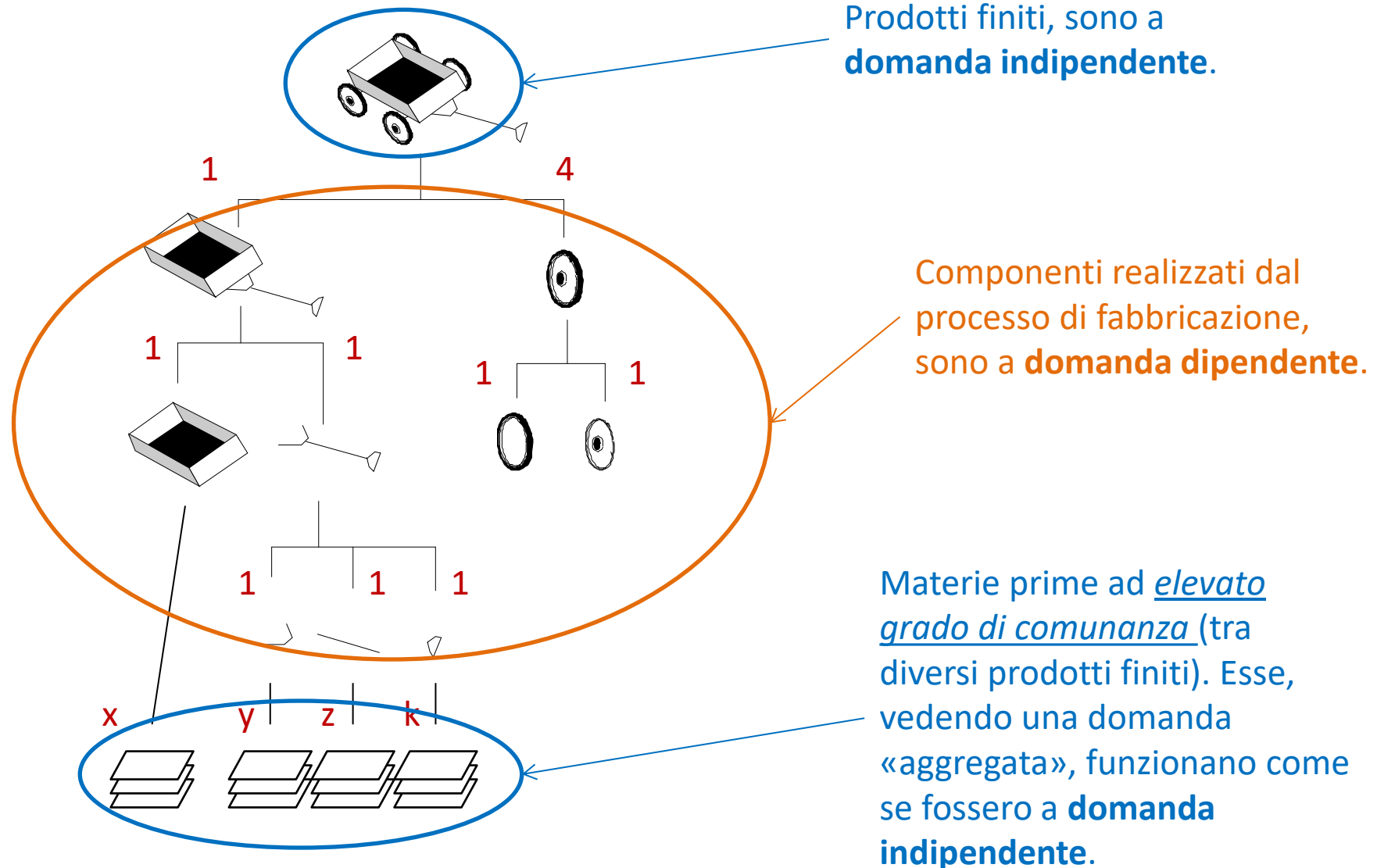
Tecniche di gestione delle scorte



Tecniche di gestione delle scorte

- Le tecniche si differenziano a seconda che il prodotto, o «item», da gestire sia:
 - a domanda **indipendente**
 - a domanda **dipendente**
- Gli item a domanda indipendente sono quelli che vedono **direttamente** la domanda di mercato.
- Gli item a domanda dipendente sono quelli la cui domanda dipende, secondo la gerarchia stabilita dalla distinta base, dagli item nei quali sono utilizzati per la produzione.

Tecniche di gestione delle scorte





Tecniche di gestione delle scorte

- La **gestione a scorta** si applica agli item a domanda indipendente:
 - **Prodotti finiti**: solo nel caso di contesto produttivo *Make-To-Stock* (MTS), cioè con prodotti standardizzati soggetti a domanda stabile e basso rischio di obsolescenza
 - **Materie prime e componenti ad elevato grado di comunanza**: nei contesti produttivi dal MTS al *Make-To-Order* (MTO), ed anche per la gestione delle parti comuni e dei moduli nel punto di disaccoppiamento dei sistemi *Assembly-To-Order* (ATO).



Tecniche di gestione delle scorte

- Le tecniche di gestione a scorta hanno lo scopo di determinare (i) **quando** ordinare e (ii) **quanto** ordinare
- Si dividono in (i) modelli deterministici e (ii) modelli stocastici (includono effetti della variabilità)
- I modelli deterministici sono la base per definire la meccanica di funzionamento sulla quale, poi, si andranno ad aggiungere gli effetti della variabilità

Tecniche di gestione delle scorte

- A seconda della politica di revisione della scorta, si hanno:
 1. Modelli a **revisione continua**: il livello di scorta è revisionato con continuità nel tempo e si emette un ordine di dimensione fissa (lotto fisso d'ordine) quando si supera un predeterminato punto di riordino
 2. Modelli a **revisione periodica**: il livello di scorta è revisionato a intervalli fissi di tempo e si emette un ordine così da riportare il livello di scorta ad un valore predeterminato



La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta: Modelli deterministici e a revisione continua



La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta:

Modelli deterministici e a revisione continua

Economic Order Quantity (EOQ)

Economic Order Quantity (EOQ)

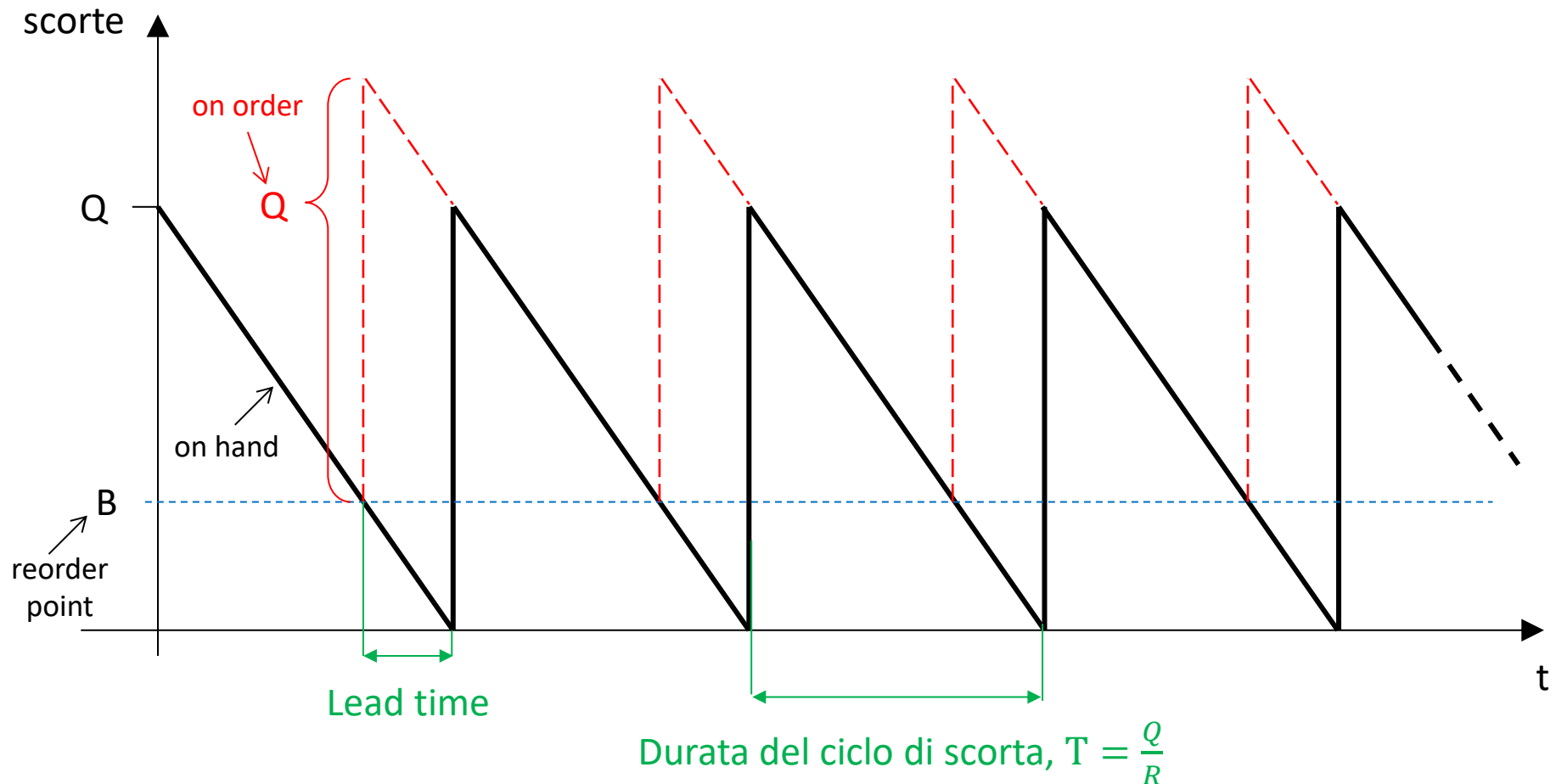
- Sviluppato da F.W. Harris, 1913.
- Idoneo per i materiali acquistati dai fornitori, in quanto considera che l'intera quantità acquistata sia consegnata in un unico istante.
- Il funzionamento prevede che il livello di scorta sia continuamente monitorato e che si emetta un nuovo ordine ogni qual volta il livello scende al di sotto di una certa soglia detta «livello di riordino» (o «livello di riordino»).



Economic Order Quantity (EOQ)

- Si basa sulle seguenti assunzioni:
 - Domanda nota, costante e continua.
 - *Lead time* di fornitura costante e noto.
 - L'intero ordine viene consegnato in un'unica soluzione e caricato a magazzino istantaneamente.
 - Le rotture di stock (*stockout*) non sono ammesse.
 - La struttura dei costi è fissa.
 - Non ci sono vincoli di spazio, di capitale o di altra natura.
 - Si considera un unico item.
 - Problemi di obsolescenza o deperimento non sono considerati

Economic Order Quantity (EOQ)

Andamento delle scorte in funzione del tempo
quando si adotta il modello EOQ



Economic Order Quantity (EOQ)

- La politica EOQ prevede che si emetta un ordine di dimensione Q ogni qual volta si verifica la condizione:

$$\textit{stock position} = \textit{on hand} + \textit{on order} \leq \textit{reorder point}$$

- L'obiettivo dell'EOQ è quello di determinare la dimensione del lotto Q ed il livello di riordino B tali per cui i costi totali del sistema sono minimizzati.



Economic Order Quantity (EOQ)

Si usa la seguente notazione:

R = domanda annua di unità

P = costo di acquisto unitario [€/unità]

C = costo di emissione dell'ordine [€/ordine]

$H = P \cdot F$ = costo annuo di mantenimento a scorta di una unità [€/anno*unità]

dove F = costo annuo di mantenimento a scorta di unità espresso come frazione del costo unitario

Economic Order Quantity (EOQ)

- La funzione di costo può quindi essere scritta nei seguenti termini

**costo annuo totale = costo d'acquisto +
costo di emissione dell'ordine +
costo di mantenimento a scorta**

$$TC(Q) = P \cdot R + C \cdot \underbrace{\frac{R}{Q}}_{\text{Numero di ordini emessi in un anno}} + H \cdot \underbrace{\frac{Q}{2}}_{\text{Giacenza media}}$$



Economic Order Quantity (EOQ)

- Derivando rispetto a Q ed uguagliando a 0 si trova il lotto che minimizza i costi totali (la funzione di costo è strettamente convessa in Q):

$$\frac{dTTC(Q)}{dQ} = -\frac{C \cdot R}{Q^2} + \frac{H}{2} = 0$$

$$EOQ = Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}}$$



Economic Order Quantity (EOQ)

- Tanto più H è grande e C è piccolo, tanto minore sarà Q^* .
- Si può inoltre calcolare:

$$m^* = \frac{R}{Q^*} = \sqrt{\frac{H \cdot R}{2 \cdot C}}$$

Numero ottimale di ordini
emessi in un anno

$$T^* = \frac{1}{m^*} = \frac{Q^*}{R} = \sqrt{\frac{2 \cdot C}{H \cdot R}}$$

Intervallo ottimale tra gli
ordini



Economic Order Quantity (EOQ)

- Il livello di riordino B si determina imponendo di riuscire a soddisfare la domanda durante il *lead time*:

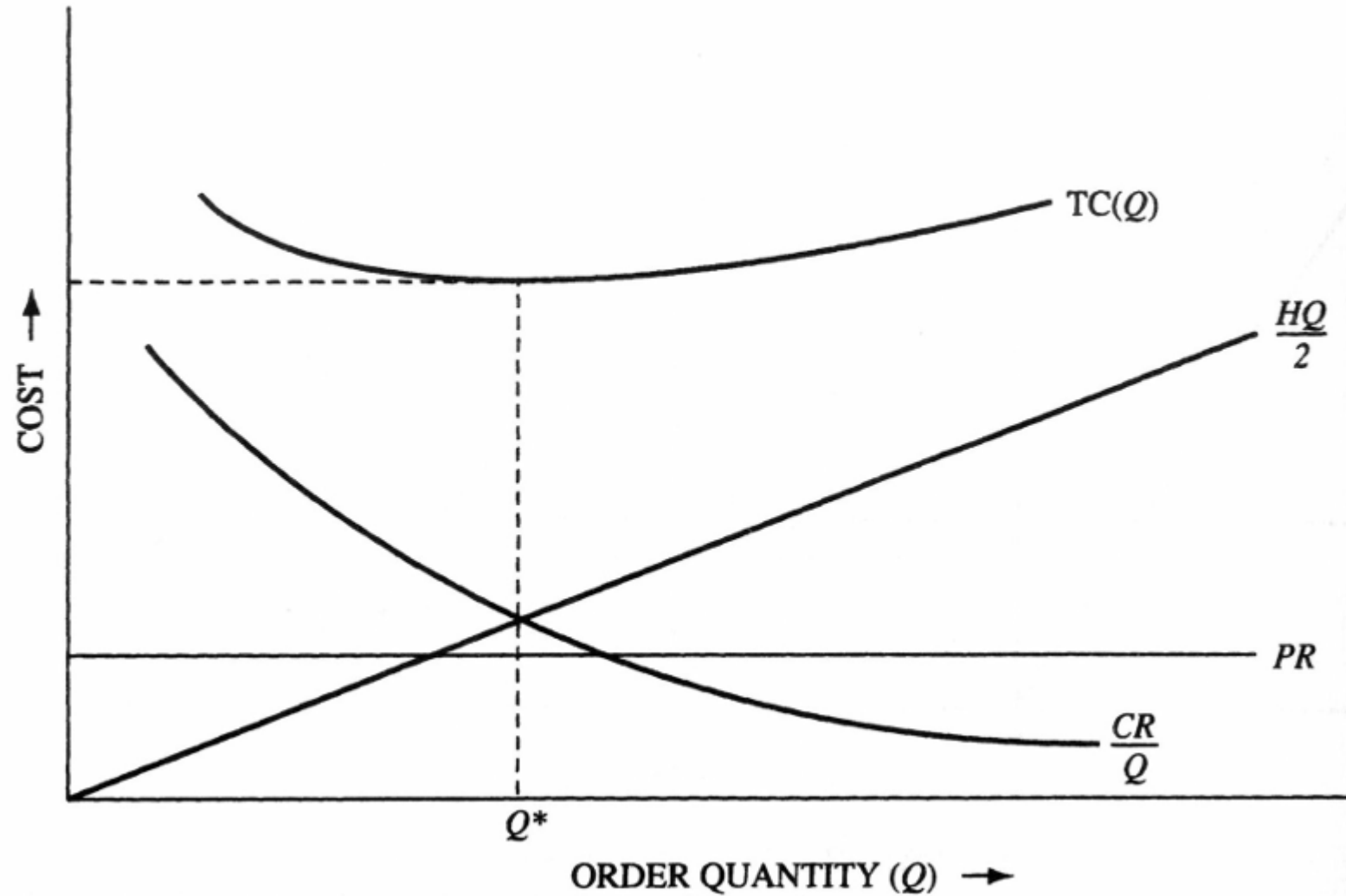
$$B = R \cdot \frac{L}{N} \quad \text{Livello di riordino} = \text{lead time demand}$$

dove L è il *lead time* espresso in giorni lavorativi e N è il numero di giorni lavorativi all'anno.

- Con questo valore di B l'ordine arriverà nel momento stesso in cui il sistema va in *stockout*.



Economic Order Quantity (EOQ)





Economic Order Quantity (EOQ)

- Si osserva come la curva di costo totale è abbastanza piatta nell'intorno dell'ottimo matematico.
- Il costo totale annuo in corrispondenza di Q^* vale:

$$\begin{aligned} TC(Q^*) &= P \cdot R + C \cdot \frac{R}{Q^*} + H \cdot \frac{Q^*}{2} = \\ &= P \cdot R + H \cdot Q^* \end{aligned}$$

Economic Order Quantity (EOQ) - Esempio

Esempio

Un item vede una domanda di 8.000 unità all'anno distribuita in modo stabile sulle 52 settimane. Il costo unitario è di € 10,00 mentre il costo di mantenimento a scorta per unità per anno è di € 3,00. Il costo di emissione di un ordine è di € 30,00.

Si calcolino l'EOQ ed il livello di riordino nel caso di *lead time* pari a 2 settimane. In corrispondenza del lotto ottimale, si valuti il costo totale annuo, il numero di ordini emessi in un anno.



Economic Order Quantity (EOQ) - Esempio

Svolgimento

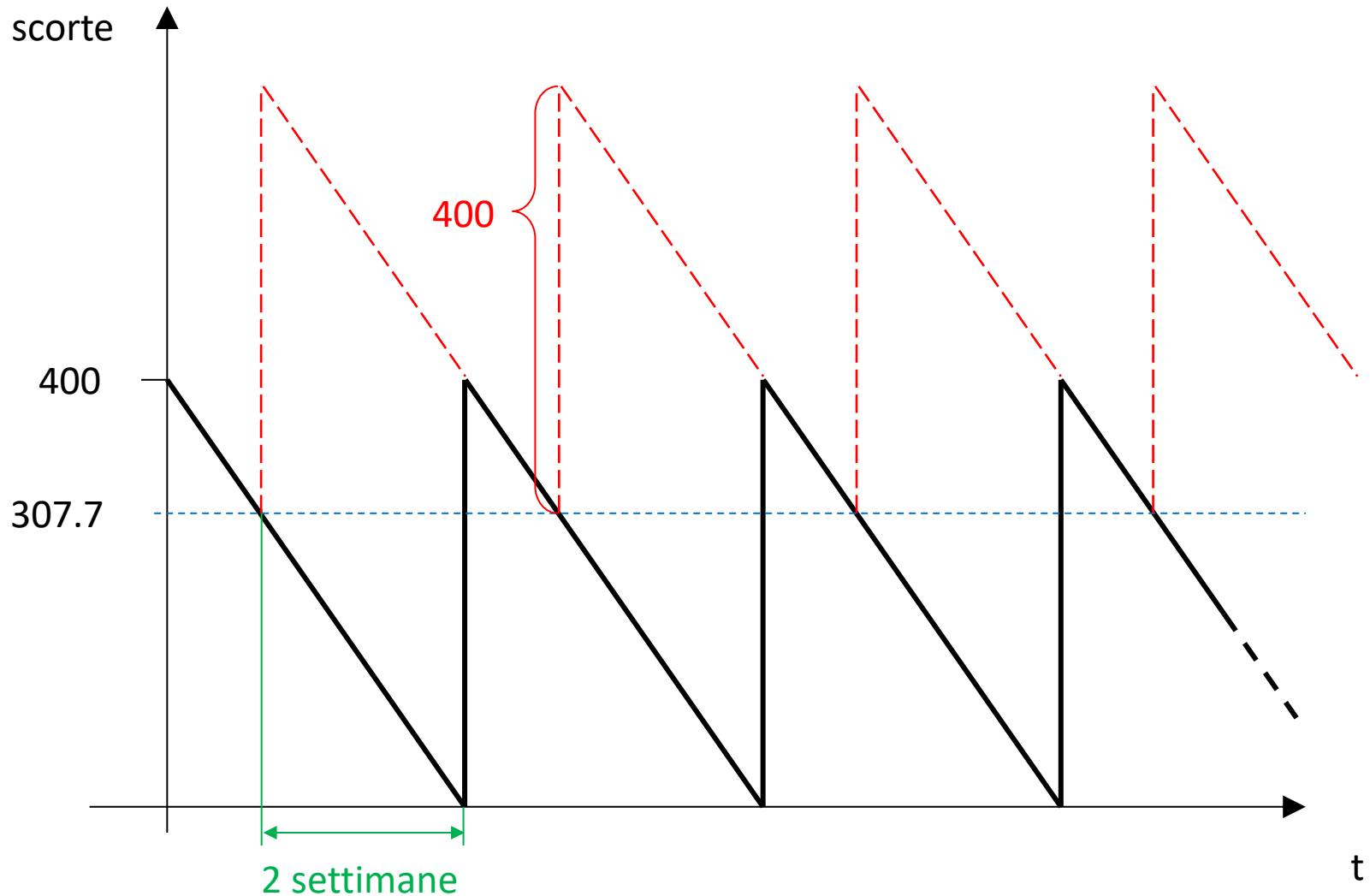
$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 8000}{3}} = 400 \text{ unità}$$

$$B = R \cdot \frac{L}{N} = 8000 \cdot \frac{2}{52} = 307.7 \text{ unità}$$

$$TC(Q^*) = P \cdot R + H \cdot Q^* = 10 \cdot 8.000 + 3 \cdot 400 = 81.200 \text{ €}$$

$$m^* = \frac{R}{Q^*} = \frac{8.000}{400} = 20 \text{ ordini/anno}$$

Economic Order Quantity (EOQ) - Esempio





La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta:

**Modelli deterministici e a revisione
continua**

Modello EOQ con backordering

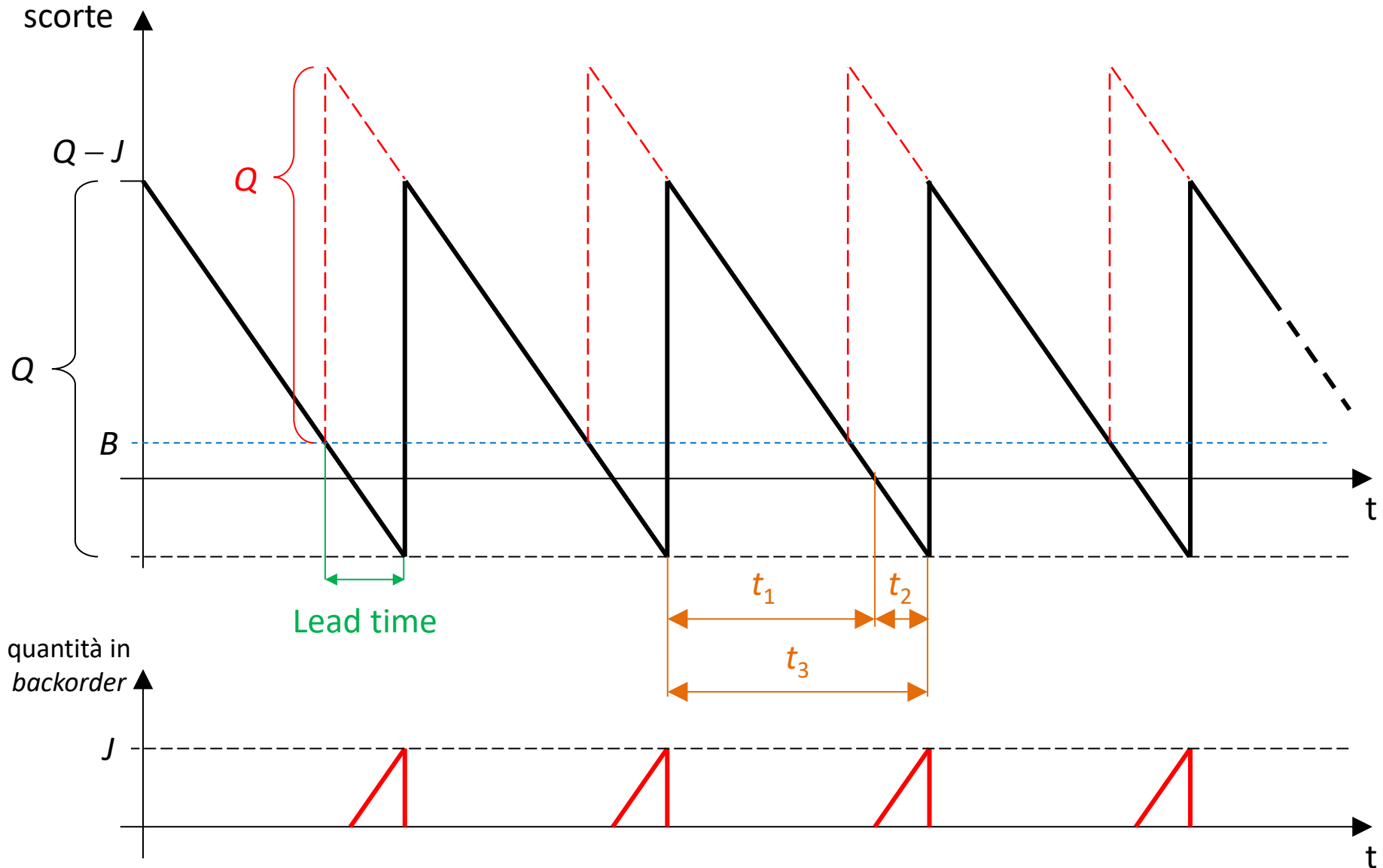
Modello EOQ con *backordering*

- In questo caso si consideri di avere la possibilità di andare in *stockout*, con la garanzia che il cliente sia disposto ad aspettare a fronte di uno sconto sul prezzo (*backorder*).
- Il termine «cliente» va inteso in senso lato: ad esempio, un magazzino materie prime che alimenta una linea di produzione vede la linea come suo cliente e, in questo caso, uno *stockout* genera un fermo della linea con conseguenti costi di fermo produzione.



Modello EOQ con *backordering*

- Il sistema è deterministico, quindi, si modella un sistema nel quale lo *stockout*, di una determinata entità, viene imposto sistematicamente e deterministicamente ad ogni ciclo.
- Questa situazione è ovviamente **irrealistica**, ma consente di evidenziare il modo con cui lo *stockout* interviene sui costi.
- Le ipotesi sono le stesse del modello EOQ classico, solo che, in questo caso, il livello di riordino è tale per cui si genera uno *stockout* ad ogni ciclo di una predeterminata entità.

Modello EOQ con *backordering*



Modello EOQ con *backordering*

- Data la presenza di *backorders*, la politica di riordino diventa la seguente:

$$\text{stock position} = \text{on hand} + \text{on order} - \text{backorders} \leq \text{reorder point}$$

- L'obiettivo dell'EOQ con *backorders* è quello di determinare la dimensione del lotto, Q , l'ammontare dei *backorder*, J , ed il livello di riordino, B , tali per cui il costo totale del sistema è minimizzato.



Modello EOQ con *backordering*

- Si noti come il livello di scorta massimo sia pari a $Q - J$, quindi nel sistema vi è una scorta media più bassa rispetto all'EOQ classico.
- Rispetto all'EOQ classico, però, sono presenti degli ordini in *backorder*, che raggiungono un ammontare massimo pari a J .
- Si definisce, quindi:
 K = costo medio di una unità in *backorder* per un anno [€/unità/anno]

Modello EOQ con *backordering*

- Relativamente a un singolo ciclo, si ha (R : tasso di domanda):

$$t_3 = \frac{Q}{R}$$

durata di un ciclo

$$t_1 = \frac{Q - J}{R}$$

durata della fase (con scorta) positiva del ciclo

$$t_2 = \frac{J}{R}$$

durata della fase di (accumulo di) *backorder* del ciclo



Modello EOQ con *backordering*

- L'*holding cost* per ciclo riguarda **solo** la fase **positiva** e vale (H : costo di mantenimento a scorta unitario per anno)

$$H \cdot \frac{Q - J}{2} \cdot t_1 = \frac{H \cdot (Q - J)^2}{2 \cdot R}$$

- Il *backordering cost* per ciclo riguarda la fase di accumulo dei *backorder* ed è dato da

$$K \cdot \frac{J}{2} \cdot t_2 = \frac{K \cdot J^2}{2 \cdot R}$$



Modello EOQ con *backordering*

- Il costo totale **per ciclo** è, quindi, pari a

$$P \cdot Q + C + \frac{H \cdot (Q - J)^2}{2 \cdot R} + \frac{K \cdot J^2}{2 \cdot R}$$

- Dato che in un anno ci sono R/Q cicli, il costo totale per anno è

$$\begin{aligned} TC(Q, J) \\ = P \cdot R + C \cdot \frac{R}{Q} + H \cdot \frac{(Q - J)^2}{2 \cdot Q} + K \cdot \frac{J^2}{2 \cdot Q} \end{aligned}$$



Modello EOQ con *backordering*

- La matrice hessiana associata alla funzione TC è definita positiva, quindi, TC è strettamente convessa in (Q, J) .
- Il minimo di TC in (Q, J) si trova risolvendo il sistema dato dalle condizioni di ottimalità del primo ordine in Q e J :

$$\frac{\partial TC(Q, J)}{\partial J} = -H \cdot \frac{Q - J}{Q} + \frac{K \cdot J}{Q} = 0$$

$$J = \frac{H \cdot Q}{H + K}$$

Modello EOQ con *backordering*

$$\frac{\partial TC(Q, J)}{\partial Q} = -\frac{C \cdot R}{Q^2} + H \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{J^2}{2 \cdot Q^2} \right) - \frac{K \cdot J^2}{2 \cdot Q^2} = 0$$

$$Q^2 = \frac{2 \cdot C \cdot R}{H} + \frac{(H + K) \cdot J^2}{H}$$

- Sostituendo il valore di J precedentemente ottenuto, si ottiene:

$$Q = Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}} \cdot \sqrt{\frac{H + K}{K}}$$

«EOQ» >1

Modello EOQ con *backordering*

Il valore Q^* permette di ricavare il valore ottimale di J :

$$J = J^* = \frac{H \cdot Q^*}{H + K}$$

dove si ricorda che

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}} \cdot \sqrt{\frac{H + K}{K}}$$



Modello EOQ con *backordering*

- Si nota come la presenza dei *backorder* porta ad avere un Q^* maggiore di quello del modello senza *backorder* (EOQ classico).
- Inoltre, tanto più $K > H$, tanto meno si tende ad accumulare *backorder*.
- Il livello di riordino ottimale, nel caso di *backorder*, è pari a:

$$B = R \cdot \frac{L}{N} - J^*$$

dove L è il *lead time* espresso in giorni lavorativi e N è il numero di giorni lavorativi all'anno.



Modello EOQ con *backordering*

- Il massimo periodo di attesa che il cliente può trovarsi a dover aspettare è (tempo necessario al ripristino della scorta)

$$J^*/R$$

- Il costo totale annuo minimo è pari a

$$TC(Q^*, J^*) = P \cdot R + \frac{H \cdot K}{H + K} \cdot Q^*$$

$$TC(Q^*, J^*) = P \cdot R + H \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}} \cdot \sqrt{\frac{K}{H + K}}$$

<1



La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta:

**Modelli deterministici e a revisione
continua**

**Economic Production Quantity
(EPQ)**

Economic Production Quantity (EPQ)

- L'*Economic Production Quantity* (EPQ), a differenza dell'EOQ, considera che l'ordine sia versato a magazzino a ritmo costante per un numero di giorni pari alla durata della produzione
- Per questo motivo, l'EPQ si applica meglio a quei casi in cui si vuole determinare il lotto ottimale da mettere in produzione su una ***linea***



Economic Production Quantity (EPQ)

- Si basa sulle seguenti assunzioni:
 - Domanda nota, costante e continua
 - *Lead time* di avvio della produzione noto e costante
 - Le rotture di stock (*stockout*) non sono ammesse
 - La struttura dei costi è fissa
 - Non ci sono vincoli di spazio, di capitale, o di altra natura
 - Si considera un unico item
 - Problemi di obsolescenza o deperimento non sono presenti
 - Tasso di produzione noto, costante e continuo



Economic Production Quantity (EPQ)

Si introduce la seguente notazione:

R = domanda annua [unità/anno]

P = costo di produzione per unità [€/ unità]

N = giorni lavorativi nell'anno

r = tasso di domanda [unità/giorno] = R/N

p = cadenza produttiva [unità/giorno]

Q = dimensioni del lotto di produzione [unità]

C = costo di *setup* [€/setup]

H = costo di mantenimento a scorta unitario per anno
[€/ unità/anno]

L = *lead time* per l'avvio della produzione [anno]



Economic Production Quantity (EPQ)

- Ovviamente, deve essere $p > r$
- La fase di produzione ha una durata pari a Q/p
- L'avvio della produzione di un nuovo lotto conviene sia appena il sistema va in *stockout*
- Assumendo $L \leq Q/r - Q/p$, il livello di riordino è pari a

$$B = \frac{R}{N} \cdot L = r \cdot L$$

Andamento delle scorte in funzione del tempo per il modello EPQ



Economic Production Quantity (EPQ)

- La funzione di costo può quindi essere scritta nei seguenti termini

**costo annuo totale = costo di produzione +
costo di *setup* +
costo di mantenimento a scorta**

$$TC(Q) = P \cdot R + C \cdot \underbrace{\frac{R}{Q}}_{\text{Numero di ordini emessi in un anno}} + H \cdot \underbrace{\frac{Q}{2} \cdot \frac{p-r}{p}}_{\text{Giacenza media}}$$



Economic Production Quantity (EPQ)

- Derivando TC rispetto a Q , uguagliando a 0 e risolvendo in Q , si trova il lotto di produzione che minimizza i costi totali (TC è strettamente convessa in Q)

$$\frac{dTC(Q)}{dQ} = -\frac{C \cdot R}{Q^2} + \frac{H}{2} \cdot \frac{p-r}{p} = 0$$

$$EPQ = Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p-r}}$$

«EOQ» >1



Economic Production Quantity (EPQ)

- Il costo totale annuo in corrispondenza di Q^* vale:

$$TC(Q^*) = P \cdot R + H \cdot Q^* \cdot \frac{p - r}{p}$$

- La durata ottimale della fase di produzione, in giorni, è

$$Q^*/p$$

- La durata ottimale di un ciclo, in giorni, è

$$\frac{Q^*}{r}$$



Economic Production Quantity (EPQ)

Esempio

Un item vede una domanda di 20.000 unità all'anno distribuita in modo uniforme su 250 giorni lavorativi. La cadenza produttiva è di 100 unità al giorno, ed il *lead time* per il lancio di un ordine è di 4 giorni. Il costo unitario è di € 50,00, il costo di mantenimento a scorta per unità per anno è di € 10,00, mentre il costo di setup è di € 20,00.

Calcolare l'EPQ, il punto di riordino e, in corrispondenza dell'EPQ, il numero di cicli di produzione in un anno, ed il costo totale annuo.



Economic Production Quantity (EPQ) - Esempio

Svolgimento

$$r = \frac{R}{N} = \frac{20.000}{250} = 80 \text{ unità/giorno}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H} \cdot \frac{p}{p - r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 20.000}{10} \cdot \frac{100}{100 - 80}} = 632 \text{ unità}$$

$$m^* = \frac{R}{Q^*} = \frac{20.000}{632} = 31.6 \text{ lanci/anno}$$



Economic Production Quantity (EPQ) - Esempio

$$B = R \cdot \frac{L}{N} = 20.000 \cdot \frac{4}{250} = 320 \text{ unità}$$

$$\begin{aligned} TC(Q^*) &= P \cdot R + H \cdot Q^* \cdot \frac{p - r}{p} = \\ &= 50 \cdot 20.000 + 10 \cdot 632 \cdot \frac{100 - 80}{100} = 1.001.264 \text{ €/anno} \end{aligned}$$



La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta:

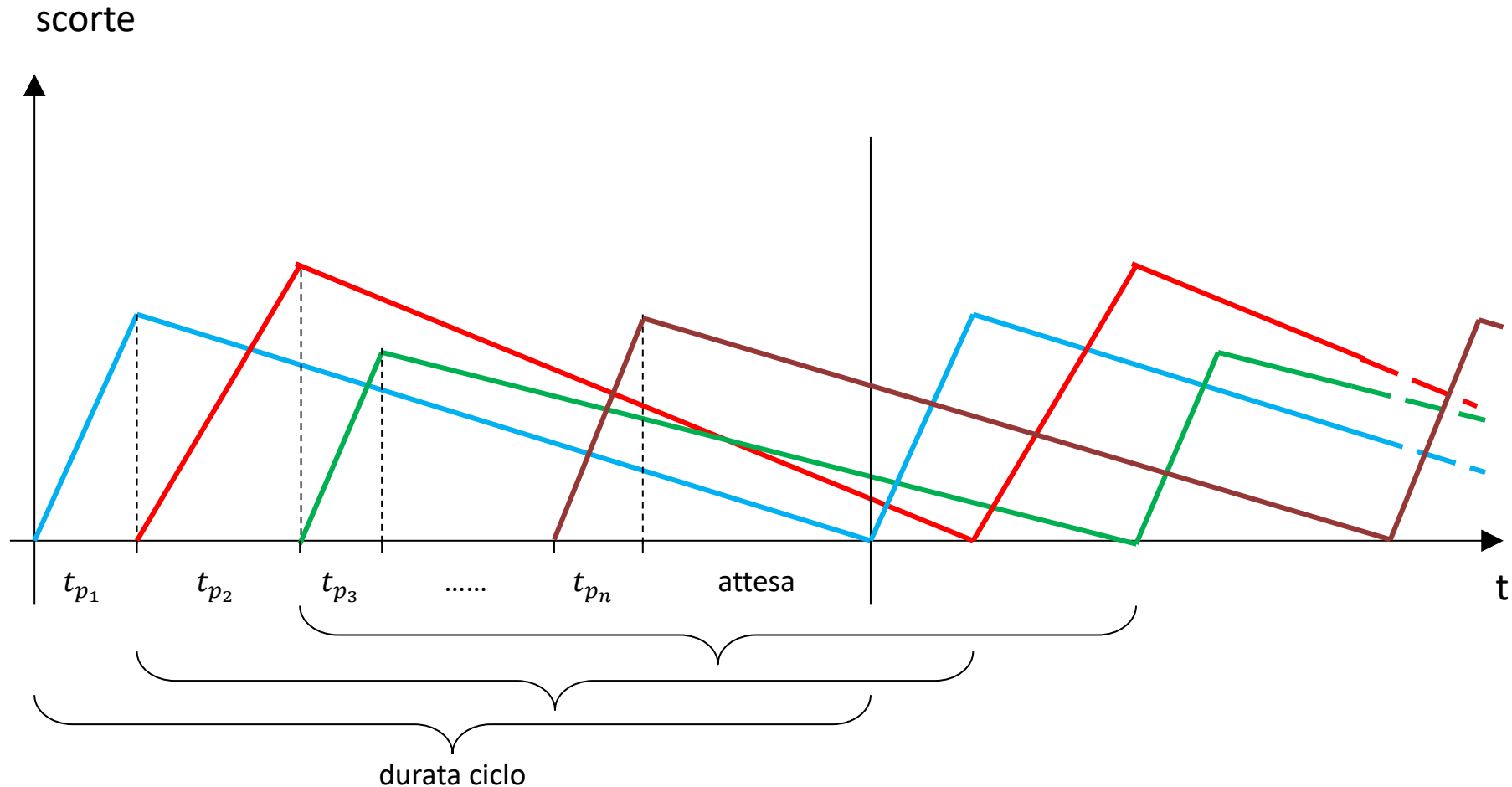
**Modelli deterministici e a revisione
continua**

EPQ *multiple items*



EPQ *multiple items*

- L'EPQ multiprodotto è anche detto piano di carico ciclico di una linea, o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP)
- Questo modello gestisce il lancio di ordini di produzioni di più prodotti su una linea.
- L'obiettivo è quello di determinare la lunghezza ottimale di un ciclo di produzione (cioè, di scorta) e di conseguenza derivare i lotti economici di tutti i prodotti.
- Ad ogni ciclo, **tutti** i prodotti sono lanciati in produzione (produzione ripetitiva).

EPQ *multiple items*Andamento delle scorte di n items



EPQ *multiple items*

Si adotta la seguente notazione:

m = numero di cicli produttivi (o di scorta) annui

r_i = tasso di domanda giornaliera dell'item i -esimo
[unità/giorno]

p_i = cadenza produttiva giornaliera dell'item [unità/giorno]

Q_i = dimensione del lotto dell'item i -esimo [unità]

R_i = domanda annua dell'item i -esimo [unità/anno]

P_i = costo di produzione dell'item i -esimo [€/unità]

C_i = costo di setup dell'item i -esimo [€/setup]

H_i = costo di mantenimento a scorta unitario per anno
dell'item i -esimo [€/unità/anno]

EPQ *multiple items*

- Il tempo di produzione dell'item i -esimo vale

$$t_{p_i} = \frac{Q_i}{p_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Per il lotto dell'item i -esimo deve, inoltre, valere

$$R_i = m \cdot Q_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

in quanto, negli m cicli annui, deve essere soddisfatta tutta la domanda R_i .



EPQ multiple items

- Ricavando Q_i dalle due equazioni ed uguagliando si ottiene

$$Q_i = p_i \cdot t_{p_i} = \frac{R_i}{m} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Per ogni item, la giacenza media vale

$$\frac{(p_i - r_i) \cdot t_{p_i}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_i}{m} \cdot \frac{p_i - r_i}{p_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$



EPQ *multiple items*

- I costi totali possono quindi essere espressi come

$$TC(m) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i + m \cdot \sum_{i=1}^n C_i + \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^n H_i \cdot R_i \frac{p_i - r_i}{p_i}$$

- Si noti che, se $n = 1$, allora $m = \frac{R}{Q}$ e, quindi, la precedente espressione diventa quella dell'EPQ monoprodotto.

EPQ *multiple items*

- Per trovare il numero di cicli ottimale, si deriva l'equazione rispetto ad m , si uguaglia a 0 la derivata e si risolve rispetto ad m (TC è strettamente convessa in m)

$$\frac{dTC(m)}{dm} = \sum_{i=1}^n C_i - \frac{1}{2 \cdot m^2} \cdot \sum_{i=1}^n H_i \cdot R_i \cdot \frac{p_i - r_i}{p_i} = 0$$

$$m^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n H_i \cdot R_i \cdot \frac{p_i - r_i}{p_i}}{2 \cdot \sum_{i=1}^n C_i}}$$



EPQ *multiple items*

- Il lotto economico di produzione di ciascun item è quindi dato da

$$Q_i^* = \frac{R_i}{m^*} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Si possono infine determinare i costi totali in corrispondenza dell'ottimo

$$TC(m^*) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i + 2 \cdot m^* \cdot \sum_{i=1}^n C_i$$

EPQ *multiple items*

- Si osserva che il modo con cui è stato calcolato m^* ha ignorato
 1. la capacità produttiva della linea
 2. gli eventuali *tempi* di setup per cambio produzione
- Si vedano, quindi, quali verifiche devono essere fatte per garantire il rispetto dei **due** vincoli sopra riportati.
- Siano:
 - N il numero di giorni lavorativi all'anno
 - T_{S_i} il tempo di setup per l'item i -esimo, assunto indipendente dalla sequenza di lancio.



EPQ *multiple items*

- Per il rispetto delle capacità produttiva, deve almeno essere verificata la seguente relazione:

$$N \geq \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p_i}$$

- Dividendo per m^* entrambi i membri, si ottiene la condizione scalata sul singolo periodo:

$$\frac{N}{m^*} \geq \sum_{i=1}^n \frac{Q_i^*}{p_i}$$

EPQ *multiple items*

- Aggiungendo la necessità di *setup* si ottiene:

$$\frac{N}{m^*} \geq \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_i^*}{p_i} + T_{S_i} \right)$$

- Se la relazione non risulta verificata, si deve procedere a ridurre m , così, diminuisce il tempo speso in *setup*.
- Riscrivendo la relazione rispetto ad un m generico

$$\frac{N}{m} \geq \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_i}{p_i} + T_{S_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{m \cdot p_i} + \sum_{i=1}^n T_{S_i}$$

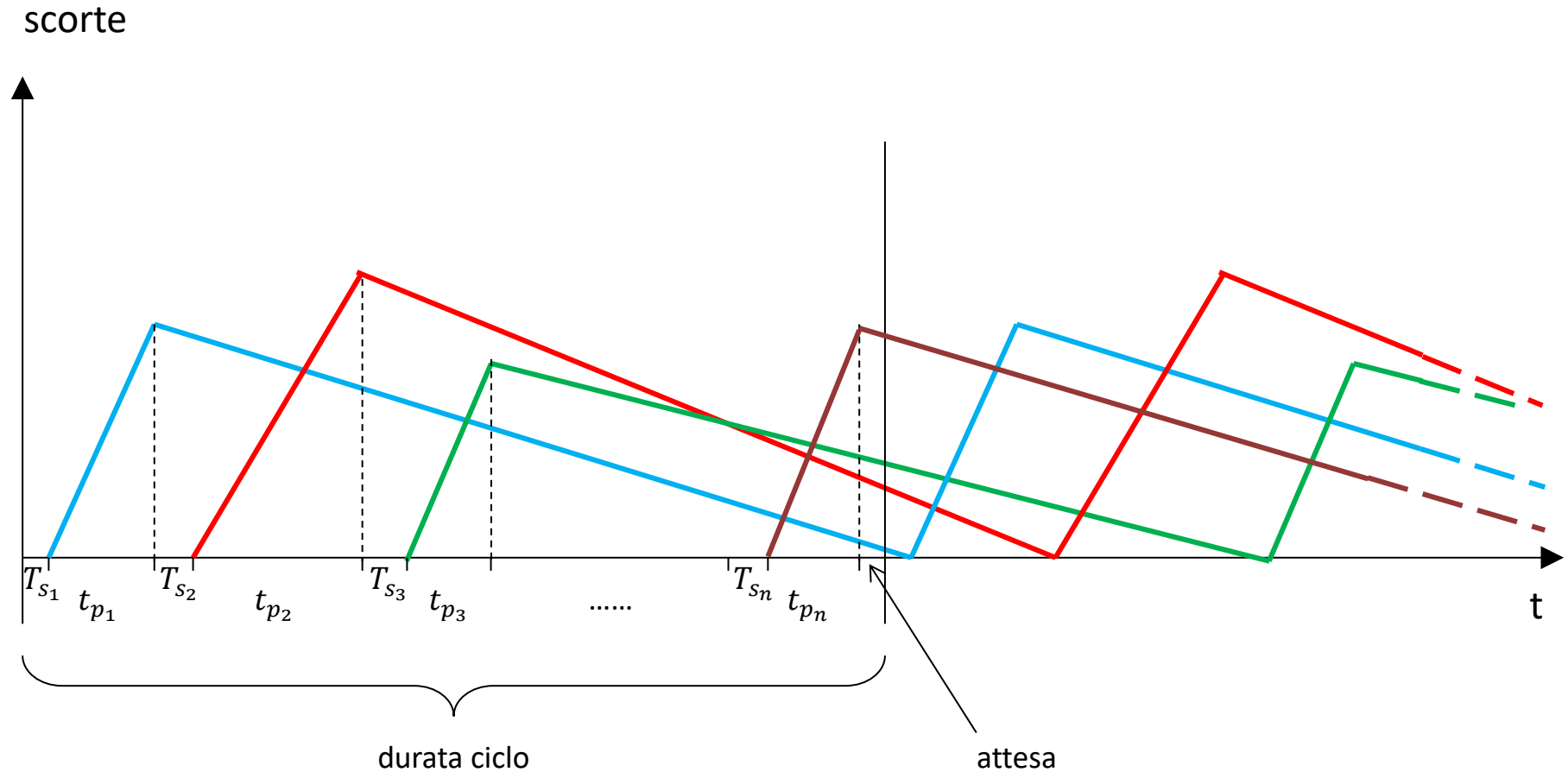
EPQ *multiple items*

- Ora si ricava il limite massimo per m :

$$N \geq \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p_i} + m \cdot \sum_{i=1}^n T_{S_i} \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{N - \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p_i}}{\sum_{i=1}^n T_{S_i}}$$

Andamento delle scorte con la presenza di setup



EPQ *multiple items* - Esempio

Esempio

	Item 1	Item 2	Item 3
R	6300	3200	4700
C	82	82	82
P	9	11	8
H	10.8	13.2	9.6
p	100	100	100
N	220		
r	28.64	14.55	21.36

m*	15.63
t _{ciclo}	14.08

$$= \frac{N}{m^*} = 220/15,63$$

Q	403	205	301
t _p	4.0	2.0	3.0

$$= \frac{Q}{p} = 301/100$$

$$= \frac{R}{m^*} = 6300/15,63$$

EPQ *multiple items* - EsempioSenza tempo di *setup*

t	Item 1	Item 2	Item 3
0	0		
1	71		
2	143		
3	214		
4	285	0	
5	257	85	
6	228	171	0
7	200	156	79
8	171	142	157
9	142	127	236
10	114	113	215
11	85	98	193
12	56	84	172
13	28	69	150
14	0	55	129
15	71	40	108
16	143	25	86
17	214	11	65
18	285	0	44
19	257	85	22
20	228	171	0
21	200	156	79
22	171	142	157
23	142	127	236
24	114	113	215
25	85	98	193
26	56	84	172
27	28	69	150
28	0	55	129

Con tempo di *setup*

t	Item 1	Item 2	Item 3
0	0		
1	71		
2	143		
3	214		
4	285		
5	257	0	
6	228	85	
7	200	171	
8	171	156	0
9	142	142	0
10	114	127	79
11	85	113	157
12	56	98	236
13	28	84	215
14	0	69	193
15	71	55	172
16	143	40	150
17	214	25	129
18	285	11	108
19	257	0	86
20	228	85	65
21	200	171	44
22	171	156	22
23	142	142	0
24	114	127	79
25	85	113	157
26	56	98	236
27	28	84	215
28	0	69	193

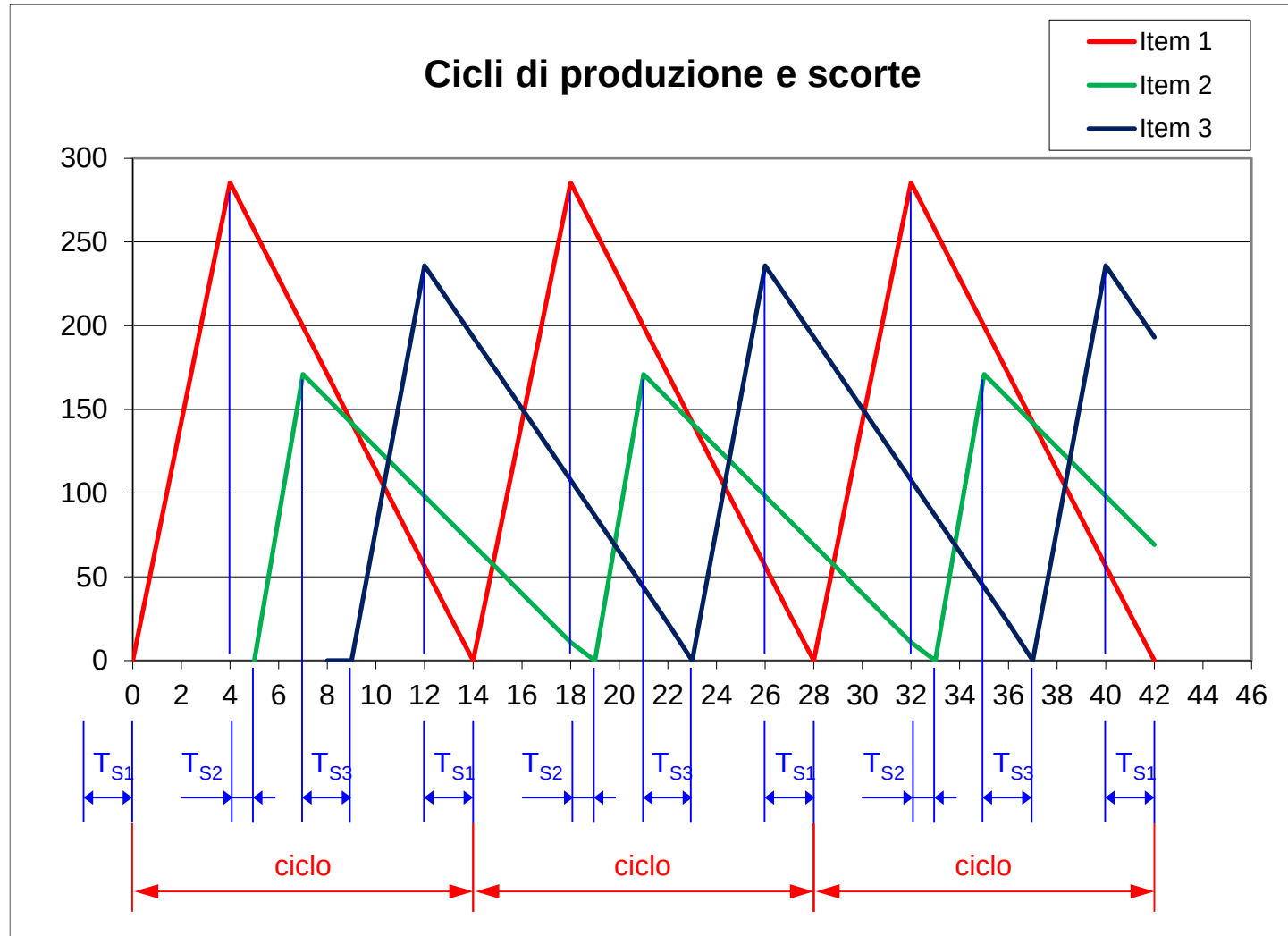
$$TS1 = 2 \text{ gg}$$

$$TS2 = 1 \text{ gg}$$

$$TS3 = 2 \text{ gg}$$



EPQ multiple items - Esempio





La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta: Modelli deterministici e a intervallo fisso di riordino



Modelli deterministici e a intervallo fisso di riordino

- È un approccio di riordino periodico (revisione periodica della scorta).
- Dopo un intervallo di tempo prefissato, si decide quanto ordinare in base ai consumi che si sono manifestati.
- Quindi:
 - Quando ordinare: imposto a priori, definendo un intervallo (di revisione) fisso tra gli ordini
 - Quanto ordinare: dipende da ordine a ordine, a seconda dei consumi osservati nel ciclo
- Per determinare la quantità da ordinare, viene definito un livello di scorta di riferimento (**livello obiettivo**).



La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta:

Modelli deterministici e a intervallo fisso di
riordino:

Economic Order Interval (EOI)

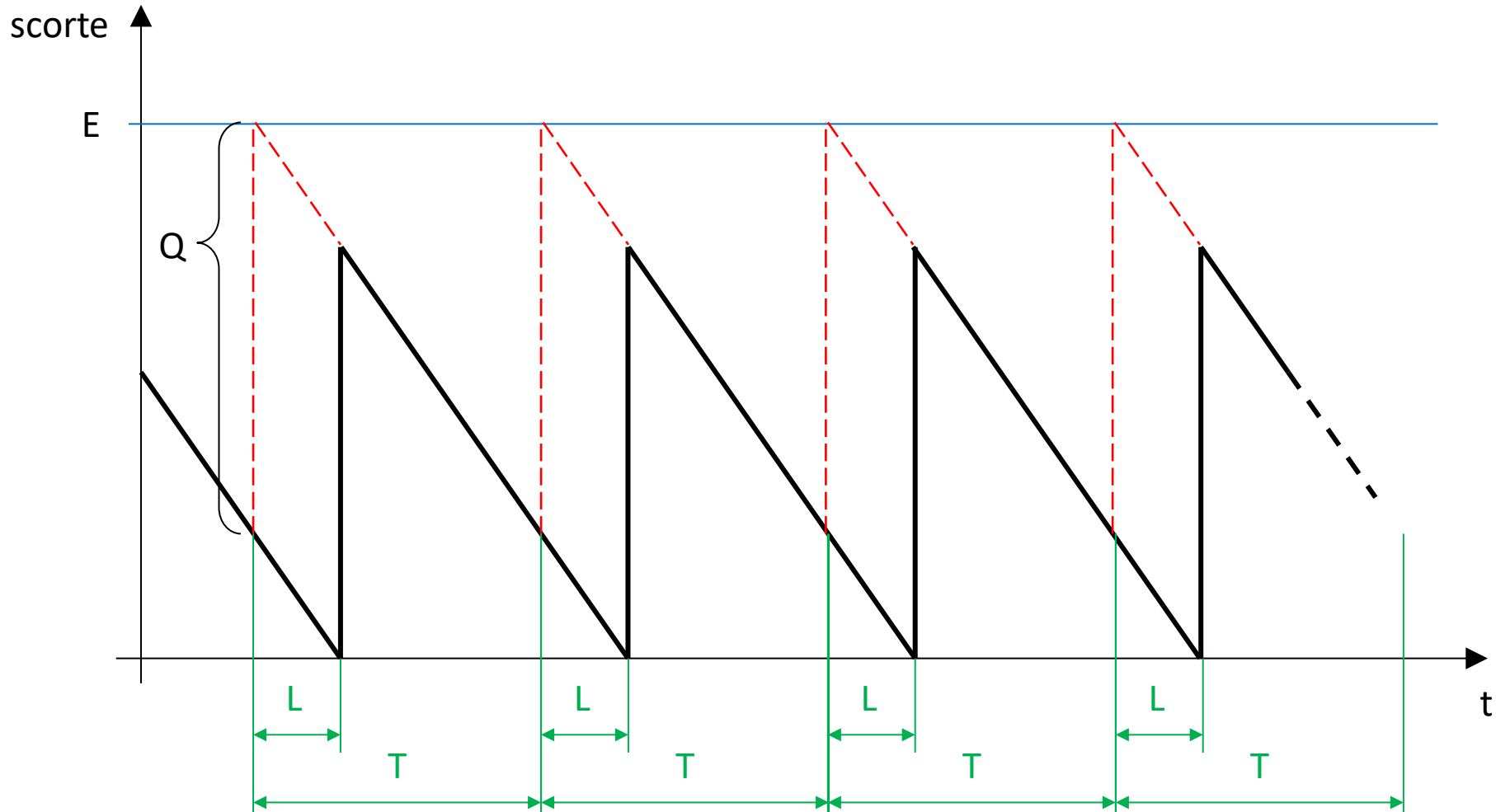


Economic Order Interval (EOI)

- Ogni volta che trascorre una quantità di tempo pari all'intervallo T , si emette un ordine Q pari alla differenza tra il livello di riferimento E ed il livello attuale delle scorte
- Il sistema deve essere inizialmente «fasato» tenendo anche in considerazione il lead time L
- L'EOI si propone, quindi, di determinare l'intervallo T ed il livello di riferimento E che minimizzano i costi totali
- Le assunzioni fondamentali sono quelle dell'EOQ

Economic Order Interval (EOI)

Andamento delle scorte in funzione del tempo:





Economic Order Interval (EOI)

Si adotta la seguente notazione:

R = domanda annua di unità [unità/anno]

P = costo di acquisto di una unità [€/anno]

C = costo di emissione dell'ordine [€/ordine]

F = costo annuo di mantenimento a scorta
espresso come frazione del costo unitario del
materiale [€/ € /anno]

$H = P \cdot F$ = costo annuo di mantenimento a
scorta di una unità [€/ unità /anno]

T = intervallo di riordino [anno]



Economic Order Interval (EOI)

- La funzione di costo può, quindi, essere scritta nei seguenti termini:

**costo annuo totale = costo d'acquisto +
costo di emissione dell'ordine +
costo di mantenimento a scorta**

$$TC(T) = P \cdot R + C \cdot \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{Numero di ordini emessi in un anno}} + P \cdot F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot R \cdot T}_{\text{Giacenza media}}$$



Economic Order Interval (EOI)

- Derivando rispetto a T ed uguagliando a 0 la derivata, si trova l'intervallo che minimizza la funzione di costo, la quale è strettamente convessa in T :

$$\frac{dTC(T)}{dT} = -C \cdot \frac{1}{T^2} + \frac{1}{2} \cdot P \cdot F \cdot R = 0 \Rightarrow$$

$$T = EOI = T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C}{P \cdot F \cdot R}}$$

H



Economic Order Interval (EOI)

- Il livello E di riferimento deve garantire di soddisfare la domanda nel successivo intervallo T e per tutto il *lead time* L :

$$E = R \cdot T + R \cdot \frac{L}{N} = R \cdot \left(T + \frac{L}{N} \right)$$

dove L è il *lead time* espresso in giorni lavorativi, N è il numero di giorni lavorativi all'anno e T è l'intervallo di riordino espresso in anni.



Economic Order Interval (EOI)

- Il costo totale annuo in corrispondenza di T^* vale:

$$TC(T^*) = P \cdot R + \frac{C}{T^*} + \frac{P \cdot F \cdot R \cdot T^*}{2} =$$

$$= P \cdot R + P \cdot F \cdot R \cdot T^* = (1 + F \cdot T^*) \cdot P \cdot R$$

- Si può osservare che, nella condizione deterministica, l'EOQ e l'EOI **si equivalgono**:

$$Q^* = R \cdot T^* = R \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot C}{P \cdot F \cdot R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{P \cdot F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot R}{H}}$$



La gestione a scorta dei materiali

-

Gestione a scorta:

**Modelli deterministici e a intervallo fisso di
riordino:**

EOI *multiple items*

EOI *multiple items*

- In pratica, esistono casi in cui risulta conveniente gestire diversi *item* in **maniera coordinata**
- Ciò accade quando gli item sono stoccati nella stessa zona e condividono, ad es., lo stesso fornitore, modo di trasporto ecc.

Esistono diversi vantaggi nella gestione coordinata degli item:

- 1. Risparmi sul costo unitario di acquisto:** se acquisto dallo stesso fornitore, possibili sconti di quantità per *ordini superiori* a un valore soglia
- 2. Risparmi sul costo unitario di trasporto:** gli item ordinati contemporaneamente permettono di *saturare* maggiormente la capacità dei mezzi di trasporto

**EOI *multiple items***

- 3. Risparmi sul costo d'ordine:** aggregando più item in uno stesso ordine è possibile ridurre il totale annuo del costo di ordinazione
- 4. Semplificazione della schedulazione ordini:** nel caso di item approvvigionati esternamente, si ragiona in termini di fornitori piuttosto che di singolo item. Quindi, gestione coordinata dei *vendor* da parte dell'acquirente (*buyer*).



EOI *multiple items*

Esistono anche degli svantaggi nell'impiego di procedure coordinate di rifornimento:

- 1. Possibile incremento della scorta media:** alcuni item potrebbero essere ordinati in anticipo rispetto al caso di gestione singola
- 2. Possibile incremento dei costi di gestione del sistema:** il controllo coordinato è più complesso del controllo di tipo individuale, per la natura del problema
- 3. Possibile riduzione di flessibilità:** la capacità di adattamento a situazioni impreviste è ridotta (ad es., il livello di servizio associato ai singoli item potrebbe diminuire)



EOI *multiple items*

Il problema della **gestione coordinata** di una famiglia di item consiste nel decidere la quantità da ordinare per ciascun item tenendo conto che:

1. Esiste un **costo d'ordine maggiore** ($C = [\text{€/ordine}]$) associato al rifornimento della famiglia: costo fisso di emissione ordine di acquisto, che è indipendente dal numero di item considerati nel rifornimento
2. Esiste un **costo d'ordine minore** ($c = [\text{€/ordine}]$) che viene sostenuto quando un item è incluso in un rifornimento della famiglia (costo di inclusione di un ulteriore item nell'ordine di acquisto)



EOI *multiple items*

- Il modello EOI multiprodotto si basa su assunzioni simili a quelle dell'EOQ e, inoltre, si assume che gli item vengano tutti riforniti congiuntamente ad ogni ciclo
- Si definiscono, poi:
 - R_i = domanda annua dell'item i -esimo [unità/anno]
 - P_i = costo d'acquisto dell'item i -esimo [€/unità]
 - n = numero di item da ordinare assieme
 - T = intervallo di riordino, uguale per tutti gli item [anno]
 - F = costo di mantenimento a scorta espresso come percentuale del prezzo dell'item [€/ € /anno]

EOI *multiple items*

- Con l'ipotesi ulteriore di assenza di stockout, si può scrivere la seguente funzione di costi totali

$$\begin{aligned}
 TC(T) &= \overbrace{\sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i}^{\text{Costo d'acquisto}} + \overbrace{\frac{C + n \cdot c}{T}}^{\text{Costo d'ordine}} + \overbrace{\sum_{i=1}^n F \cdot P_i \cdot \frac{T \cdot R_i}{2}}^{\text{Costo di mantenimento a scorta}} = \\
 &= \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i + \frac{C + n \cdot c}{T} + \frac{F \cdot T}{2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i
 \end{aligned}$$

**EOI multiple items**

- Derivando rispetto a T ed uguagliando a 0 si trova l'intervallo che minimizza i costi totali (TC è strettamente convessa in T):

$$\frac{dTC(T)}{dT} = -\frac{C + n \cdot c}{T^2} + \frac{F}{2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i = 0$$

$$T = EOI = T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot (C + n \cdot c)}{F \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i}}$$



EOI *multiple items*

- Il livello di riferimento per ciascun item si determina come segue:

$$E_i = R_i \cdot T + R_i \frac{L_i}{N} = R_i \cdot \left(T + \frac{L_i}{N} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Il costo minimo totale è pari a

$$TC(T^*) = (1 + F \cdot T^*) \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot R_i$$

Esempio

Un item vede una domanda di 8.000 unità all'anno distribuita in modo stabile su 250 giorni lavorativi. Il costo unitario è di € 10,00 mentre il costo di mantenimento a scorta per unità per anno è di € 3,00. Il costo di emissione di un ordine è di € 30,00.

Si calcolino l'EOI, il costo totale annuo in corrispondenza dell'EOI ed il livello di riferimento ottimale nel caso di *lead time* pari a 10 giorni.



Economic Order Interval (EOI)

Svolgendo i calcoli:

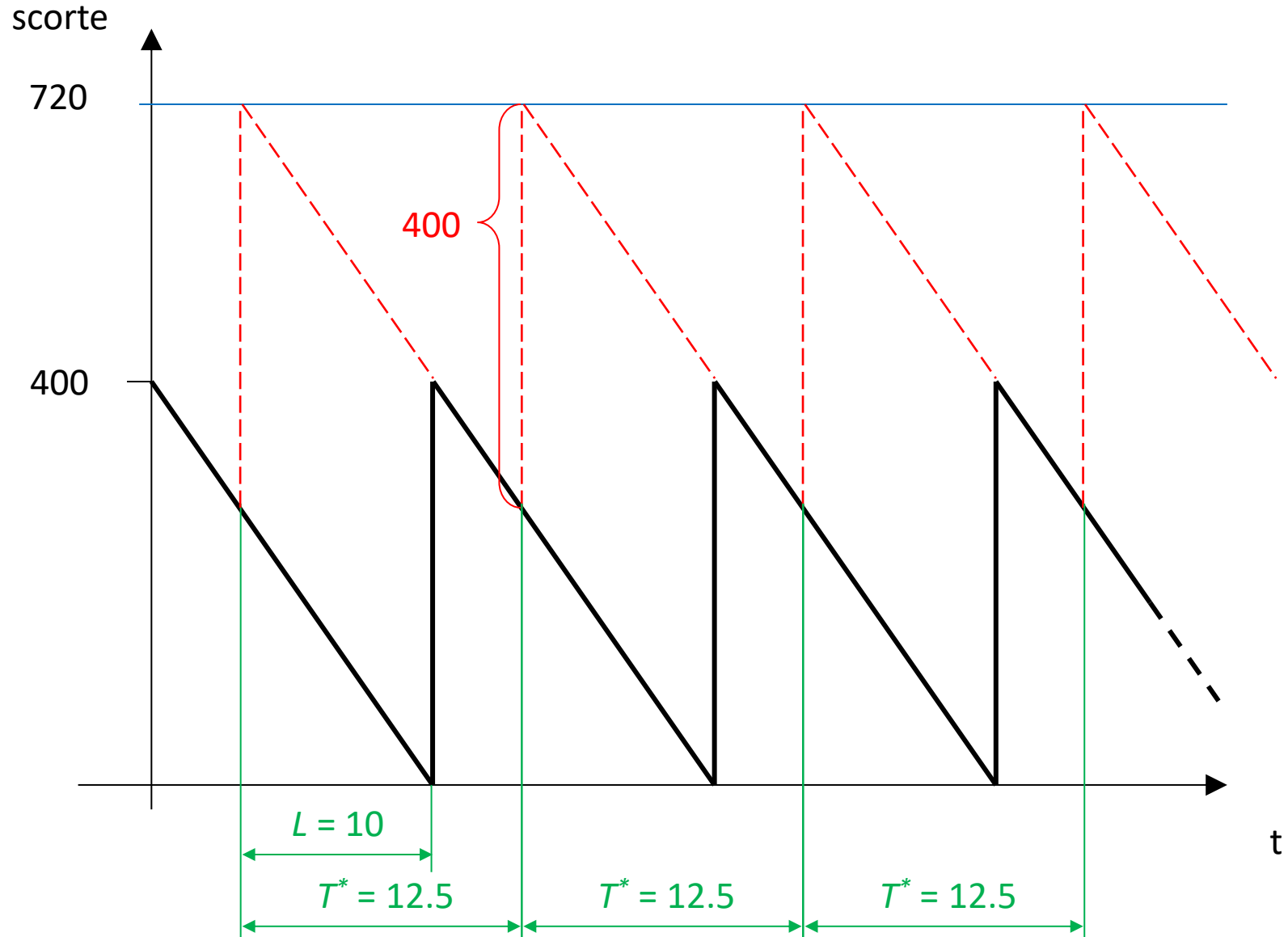
$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot C}{H \cdot R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{3 \cdot 8.000}} = 0,05 \text{ anni} = 12,5 \text{ giorni}$$

$$E = R \cdot \left(T^* + \frac{L}{N} \right) = 8.000 \cdot \left(0,05 + \frac{10}{250} \right) = 720 \text{ unità}$$

$$\begin{aligned} TC(T^*) &= P \cdot R + H \cdot R \cdot T^* = 10 \cdot 8.000 + 3 \cdot 8.000 \cdot 0,05 \\ &= 81200 \text{ €/anno} \end{aligned}$$



Economic Order Interval (EOI)





La gestione a scorta dei materiali

-

Bibliografia



Bibliografia

Tersine, R.J. (1994). *Principles of Inventory and Materials Management*. 4th edition. Prentice-Hall, New Jersey, USA. ISBN: 0-13-457888-0