



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Appunti di relatività

Prof. Fabio Garufi

Indice

1	Relatività Ristretta	3
1.1	Sincronizzazione degli orologi	3
1.2	Sistemi di riferimento in moto relativo	4
1.3	Trasformazioni di Lorentz come conseguenza dei postulati di Einstein	8
1.4	Composizione delle velocità	10
1.5	Intervalli	10
1.6	Quadrivettori	12
1.6.1	Tensori	13
1.6.2	Trasformazioni di Lorentz nello spazio 4-dimensionale	14
1.7	Operatori differenziali	15
1.8	Meccanica relativistica e principio di minima azione	16
1.9	Rappresentazione covariante delle equazioni di Maxwell	18
1.10	Particella carica in moto in un campo EM	19
1.11	Trasformazioni di Lorentz del campo EM	22
2	Teoria della Relatività Generale	23
2.1	Campo gravitazionale in meccanica non relativistica	23
2.2	Campo gravitazionale in meccanica relativistica	25
2.3	Moto libero in un sistema di riferimento qualsiasi	26
2.4	Intervalli temporali e distanze	27
2.5	Moto di una particella in un campo gravitazionale	29
2.5.1	Campo gravitazionale costante: il problema del GPS	30
2.6	Derivata covariante	32
2.6.1	Relazione tra simboli di Christoffel e tensore metrico	33
2.7	Curvatura e tensore di Riemann	33
2.7.1	Proprietà del tensore di Riemann	35
2.8	Il tensore Energia-impulso	36
2.8.1	Variazioni dell'azione ed equazioni di Eulero-Lagrange	36
2.8.2	Il tensore energia-impulso dal teorema di Noether	37
2.9	Le equazioni del campo gravitazionale	38
2.10	Equazioni linearizzate	42
2.10.1	Onde gravitazionali - approssimazione di onda piana	43
2.10.2	Effetto delle onde gravitazionali	44
2.11	Cenni sulla produzione di onde gravitazionali	45

Capitolo 1

Relatività Ristretta

La velocità della luce nel vuoto è determinata dalle equazioni di Maxwell, e, qualunque sia il sistema di riferimento, vale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Secondo il principio di relatività, è impossibile con esperimenti fisici evidenziare differenze tra sistemi di riferimento inerziali. Dunque, se la velocità della luce fosse diversa in un sistema in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro, allora cadrebbe tale principio. Si deduce che, non cambiando c , devono cambiare le coordinate.

Nel 1905 Albert Einstein stabilì due postulati.

- 1) Tutti i fenomeni fisici identici si manifestano allo stesso modo nei sistemi di riferimento inerziali, a parità di condizioni.
- 2) La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutte le direzioni ed in ogni regione di un dato sistema di riferimento, ed è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

1.1 Sincronizzazione degli orologi

Per poter definire un “evento” in un sistema di riferimento è necessario avere a disposizione un orologio in quiete nel sistema di riferimento inerziale nel punto in cui accade. Se ci sono due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo, ciascuna avrà i propri orologi in ciascun punto.

Come sincronizzare gli orologi in punti diversi dello stesso sistema di riferimento inerziale? I passi sono i seguenti.

- 1) Le coordinate degli orologi sono note.
- 2) Ad un istante t_1 , un segnale luminoso parte dall’orologio di riferimento verso quello da sincronizzare ed arriva al tempo $t = t_1 + \frac{L}{c}$ (vedi figura [1.1](#)).
- 3) Si mette il conteggio dell’orologio al tempo t .

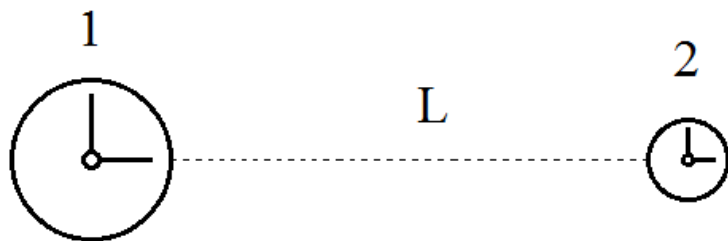


Figura 1.1: Sincronizzazione di due orologi



Figura 1.2: Sincronizzazione alternativa di due orologi.

Alternativamente è possibile riflettere il segnale dal punto verso il riferimento, dove tornerà al tempo t_2 , come si vede in figura 1.2.

Quindi il tempo impiegato sarà $2\Delta t = t_2 - t_1$ e il tempo segnato dall'orologio vicino allo specchio

$$t = t_2 - \Delta t = \frac{t_2 + t_1}{2}$$

1.2 Sistemi di riferimento in moto relativo

Confrontiamo due rigelli disposti perpendicolarmente alla direzione del moto. Chiamiamo K e K' rispettivamente un sistema di riferimento inerziale in moto ed uno fisso, ipotizzando che il vettore velocità relativa tra i due sistemi sia diretto lungo l'unica direzione comune $x \equiv x'$, come si evince dalla figura 1.3.

Quando gli assi y e y' coincidono, viene emesso un segnale luminoso da B' e C' verso A' . Nel sistema di riferimento fisso K' , i due segnali arrivano in A' contemporaneamente, per cui in tale riferimento i punti B' e C' attraversano l'asse y' contemporaneamente. Lo stesso accade per i punti B e C lungo l'asse y . Se, quindi, si trovasse che $B'C' \neq BC$ in un istante t , allora sarebbe possibile trovare differenze tra i due sistemi di riferimento. Ciò porta a concludere che le lunghezze non cambiano in direzione ortogonale al moto.

Nella stessa configurazione, confrontiamo i ritmi tra i due orologi dei due sistemi, servendoci della figura 1.4.

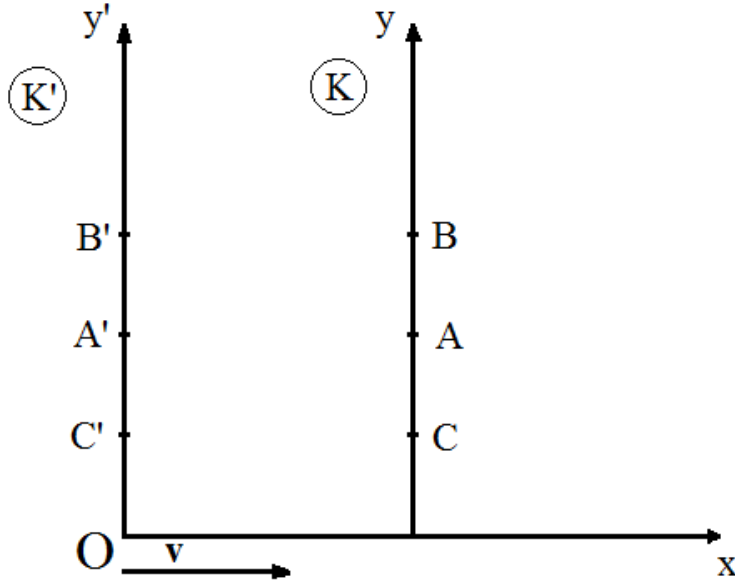


Figura 1.3: Confronto delle lunghezze in direzione parallela al moto relativo.

Ad un certo istante, viene mandato un segnale luminoso da O verso uno specchio distante z'_0 . Tale segnale ritornerà all'origine dopo un tempo pari a

$$\Delta t' = \frac{2z'_0}{c}$$

Ciò accade in quanto sorgente e specchio sono in quiete nel riferimento K'

Cosa succede, invece, nel sistema in moto K? Il segnale in K viene ricevuto nel punto x_2 in seguito alla riflessione avvenuta in corrispondenza dell'ascissa x_1 . In particolare, si ha

$$\overline{Ox_2} = v\Delta t \Rightarrow \overline{Ox_1} = \frac{v\Delta t}{2}$$

Inoltre, per il postulato della relatività, si ha

$$\overline{Oz_0} = \frac{c\Delta t}{2}$$

Poiché, inoltre, si forma un triangolo rettangolo nella medesima figura 4, scriviamo

$$\overline{Oz_0}^2 = z_0^2 + \overline{Ox_1}^2 = z_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ottiene

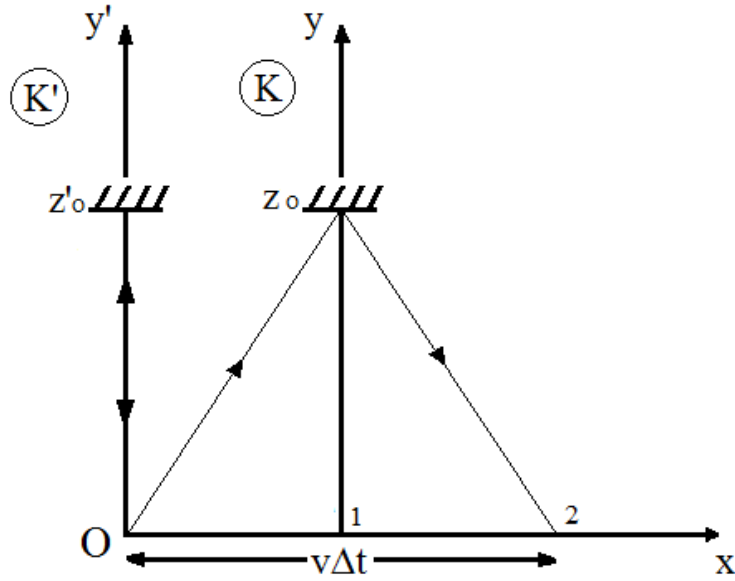


Figura 1.4: Confronto dei tempi in direzione parallela al moto relativo

$$z_o^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow z_o^2 = \frac{(\Delta t)^2}{4} (c^2 - v^2) \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{2z_o}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\frac{2z_o}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t' \quad (1.1)$$

È stato definito, quindi, il fattore per la dilatazione temporale γ come

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1 \quad (1.2)$$

Come ultima situazione, consideriamo due righelli posti parallelamente alla direzione del moto. Anche in questo caso usiamo uno specchio ad un'estremità del righello ed una sorgente dall'altra estremità. Nel sistema di riferimento K' in quiete, come si vede in 1.5, si pone, lungo la direzione del moto, uno specchio che riflette il segnale inviato dall'origine O' .

Detta L_0 la distanza tra la sorgente del segnale e lo specchio, il segnale ritorna all'origine dopo un tempo

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$

Nel sistema di riferimento in moto K, invece, gli stessi eventi risultano differenti. In particolare, come si nota nella 1.6, chiamiamo I ed S rispettivamente le estremità inferiore e superiore del righello con specchio posizionato in S.

- All'istante di emissione, I è nell'origine ed S in S_1 .

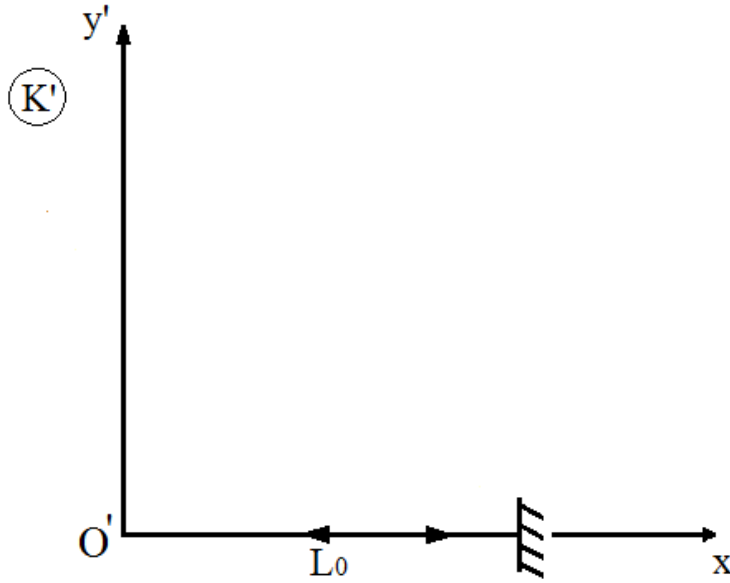


Figura 1.5: Il sistema di riferimento in quiete

- All'istante della riflessione, I si è spostato in I_1 ed S in S_2 .
- All'istante di ricezione, I si è spostato in I_2 .

Si noti che l'emissione e la ricezione sono registrati in punti diversi nel sistema K.

Nel propagarsi verso destra, la luce rincorre lo specchio con velocità relativa $c - v$, mentre verso sinistra si allontana con velocità relativa $c + v$. Indicando con L la lunghezza incognita del righello in K, allora il tempo che impiega la luce nel tratto da I verso S_1 vale

$$t_1 = \frac{L}{c - v}$$

Viceversa, il tempo che impiega la luce nel tratto da S_2 verso I_1 vale

$$t_2 = \frac{L}{c + v}$$

Il tempo complessivo, dunque, è la somma dei due tempi:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = L \left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{2L}{c} \gamma^2$$

Ricordando che $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, dal confronto si ha

$$\gamma \Delta t_0 = \frac{2L}{c} \gamma^2 \Rightarrow \gamma \frac{2L_0}{c} = \frac{2L}{c} \gamma^2 \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (1.3)$$

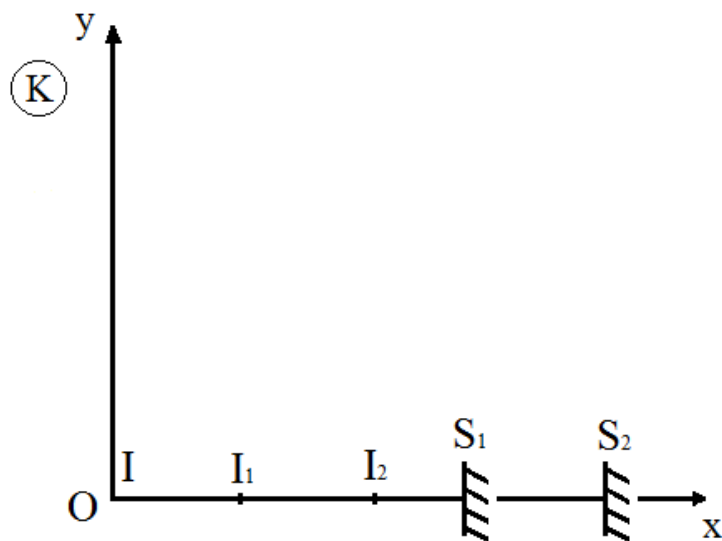


Figura 1.6: Il sistema in moto con le posizioni del righello.

1.3 Trasformazioni di Lorentz come conseguenza dei postulati di Einstein

Deriviamo le equazioni che definiscono le coordinate nel sistema K' partendo da quelle nel sistema K in modo che esse siano conformi ai postulati. In tale ottica, vanno fatte alcune osservazioni.

- 1) Spazio e tempo devono crescere uniformemente in tutti i sistemi di riferimento inerziali, per cui le equazioni di trasformazione devono essere lineari.
- 2) L'isotropia dello spazio impone che $y = y'$ e $z = z'$.

Detto ciò, le equazioni della trasformazione di x e t sono del tipo

$$\begin{cases} x' = A_{11}x + A_{12}t + A_{10} \\ x = A_{21}x' + A_{22}t' + A_{20} \end{cases}$$

Ponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ e } t = 0 &\Rightarrow x' = 0 \\ x' = 0 \text{ e } t' = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Si ottiene

$$A_{10} = A_{20} = 0$$

Inoltre, all'istante t , la coordinata x dell'origine di K' è pari a vt , per cui la prima equazione si scrive:

1.3. TRASFORMAZIONI DI LORENTZ COME CONSEGUENZA DEI POSTULATI DI EINSTEIN ⁹

$$x' = 0 = A_{11}vt + A_{12}t \Rightarrow \frac{A_{12}}{A_{11}} = -v$$

Analogamente la seconda equazione si scrive

$$x = 0 = -A_{21}vt' + A_{22}t' \Rightarrow \frac{A_{22}}{A_{21}} = v$$

Sostituendo nel sistema iniziale, si ha

$$\begin{cases} x' = A_{11}(x - vt) \\ x = A_{21}(x' + vt') \end{cases}$$

È necessario determinare i due coefficiente adimensionali A_{11} e A_{21} , che, per l'uniformità del tempo e l'isotropia dello spazio, dipenderanno solo dalla velocità v .

A tal proposito, è facile verificare che tali due coefficienti sono uguali. Infatti, se in K un righello ha lunghezza L_0 , i suoi estremi avranno coordinate $x_1 = 0$ e $x_2 = L_0$, per cui, dalla seconda equazione della trasformazione all'istante $t' = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} x'_1 = 0 \\ x'_2 = \frac{L_0}{A_{21}} \end{aligned} \Rightarrow L' = \frac{L_0}{A_{21}}$$

Viceversa, prendiamo lo stesso righello e poniamolo in quiete nel sistema K' . Le coordinate degli estremi saranno $x'_1 = 0$ e $x'_2 = L_0$, per cui, dalla prima equazione della trasformazione all'istante $t = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{L_0}{A_{11}} \end{aligned} \Rightarrow L = \frac{L_0}{A_{11}}$$

Siccome i due sistemi sono equivalenti, la loro velocità relativa è la medesima, per cui, non dovendo cambiare le due lunghezze, risulta:

$$L = L' \Rightarrow A_{11} = A_{21}$$

Per trovare il valore esatto di tale costante comune alle due equazioni, sfruttiamo l'invarianza della velocità della luce c . All'istante $t = 0$, mandiamo un segnale dall'origine. L'evento consiste nella ricezione di tale segnale in un punto posizionato lungo l'asse x . Nel sistema di riferimento fermo K , tale coordinata vale

$$x = ct$$

Nel sistema K' , per l'invarianza appena citata, essa vale

$$x' = ct'$$

Sostituendo nel sistema delle trasformazioni, si ha

$$\begin{cases} x' = A_{11}(x - vt) \\ x = A_{11}(x' + vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = A_{11}(ct - vt) \\ ct = A_{11}(ct' + vt') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = A_{11}t(1 - \beta) \\ t = A_{11}t'(1 + \beta) \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro le ultime due equazioni, si ricava

$$t' t = A_{11}^2 t' t (1 - \beta^2) \Rightarrow A_{11}^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

In definitiva, le trasformazioni di Lorentz (Hendrik Lorentz) sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad (1.4)$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

1.4 Composizione delle velocità

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz appena ricavate in forma differenziale:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - v dt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx) \end{cases} \quad (1.5)$$

Facendo rapporto membro a membro, si ha

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx}$$

In tale caso, v'_x rappresenta la componente lungo x della velocità di una particella nel sistema di riferimento in moto K' , mentre v è la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento K e K' .

Dividendo numeratore e denominatore per l'intervallo di tempo infinitesimo dt , si ricava

$$v'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

In tale espressione, v_x rappresenta proprio la componente lungo x della velocità della medesima particella nel sistema di riferimento in quiete K. Si noti che per $v \ll c$ si ottengono le trasformazioni di Galileo

$$v'_x = v_x - v$$

1.5 Intervalli

Un evento è descritto dalle coordinate del punto e dal tempo in cui è avvenuto. Consideriamo i due seguenti eventi nel sistema K. L'emissione di un segnale luminoso dal punto (x_1, y_1, z_1) al tempo t_1 . La ricezione del segnale nel punto (x_2, y_2, z_2) al tempo t_2 . Detta c la velocità di propagazione del segnale, allora il cammino percorso da quest'ultimo sarà pari a $c(t_2 - t_1)$. D'altra parte, tale

distanza percorsa è proprio pari alla distanza euclidea tra i due punti. Nel sistema K, dunque, possiamo scrivere

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2$$

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

La stessa coppia di eventi può essere osservata nel sistema K'. Siccome la velocità della luce è la stessa nei due sistemi di riferimento, allora

$$c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0$$

In generale, dati due eventi, è possibile definire la quantità

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (1.6)$$

Tale quantità viene chiamata intervallo tra i due eventi. Segue dal principio di invarianza della velocità della luce che se un intervallo è nullo in un sistema di riferimento, esso è tale in tutti i sistemi di riferimento. Inoltre, scrivendo tale intervallo in termini infinitesimi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Come appena accennato, se $ds=0$ in un sistema di riferimento inerziale, si ha $ds'=0$ anche in un altro sistema. Essendo ds e ds' infinitesimi dello stesso ordine, allora, i due devono essere proporzionali: $ds = a ds'$. Il coefficiente deve essere adimensionale e, al massimo, può dipendere solo dal valore assoluto della velocità relativa dei due sistemi inerziali. L'isotropia dello spazio, consente di porre tale costante pari ad 1, per cui $ds' = ds$. Ciò dimostra che l'intervallo appena definito è un invariante. Per semplicità, scriviamo l'intervallo tra i due eventi 1 e 2 in maniera sintetica nel sistema K: $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - L_{12}^2$. Nel sistema K' tale intervallo è invariante, ovvero: $s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - L_{12}'^2$.

E' chiaro che, contrariamente alla distanza euclidea, il quadrato dell'intervallo può assumere anche valori negativi. A seconda del segno possiamo definire diversi tipi di intervallo:

- Nel caso in cui in un sistema K' per cui i due eventi abbiano luogo nello stesso punto, allora: $L_{12}' = 0$, quindi $ds_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 \geq 0$. Quando è strettamente maggiore, l'intervallo si dice di tipo *tempo*, perché la componente temporale non si può annullare. Per questi eventi si può stabilire una relazione di causalità.
- Nel caso in cui nel sistema K' si possa annullare la parte temporale ma non quella spaziale, cioè per eventi che possono avvenire allo stesso tempo ma in luoghi diversi, si parla di intervalli di tipo *spazio*: $ds_{12}'^2 = -L_{12}'^2 \leq 0$.
- I casi in cui vale l'uguaglianza sono quelli in cui con una opportuna trasformazione, gli eventi, nel sistema K' possono avvenire nello stesso luogo e tempo. Ciò può avvenire solo se il sistema K' viaggia alla velocità della luce rispetto a K e l'intervallo si dice di tipo *luce*.

Nel sistema di coordinate $(ct, \mathbf{x})$, gli eventi di tipo luce identificano un cono con vertice nello zero, detto cono luce. All'interno del cono gli eventi sono di tipo tempo, perché lì, $\mathbf{x}^2 < (ct)^2$, fuori dal cono, sono di tipo spazio (al contrario se si prende il riferimento in cui ct è l'asse verticale).

1.6 Quadrivettori

L'insieme delle coordinate (ct, x, y, z) di un evento può essere considerato come la n-upla delle componenti di un raggio vettore quadridimensionale. Indichiamo con x^μ le sue componenti in cui l'indice μ assume i valori da 0 a 3:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

dove abbiamo chiamato $x^0 = ct$.

Il quadrato dell'intervallo è la somma $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. In generale, possiamo definire un vettore a 4 componenti (quadri-vettore) A^μ le cui componenti si trasformano come le coordinate del 4-raggio vettore.

$$\begin{cases} A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ A^2 = A'^2 \\ A^3 = A'^3 \end{cases} \quad (1.7)$$

Il modulo quadro del quadrivettore A^μ è definito in analogia con l'intervallo: $|A|^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$.

Più formalmente, possiamo definire due tipi di quadrivettori a partire dalle trasformazioni di coordinate. Il quadrivettore controvariante A^μ , quando effettuiamo il cambio di coordinate da un sistema $K(x^\mu)$ a $K'(x'^\mu)$, può essere scritto come (si adotta la convenzione di Einstein, somma sugli indici ripetuti):

$$A'^\mu = A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (1.8)$$

in cui $\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ sono le trasformazioni di Lorentz delle coordinate da K a K' .

Possiamo vedere che, presa una grandezza scalare ϕ , il suo quadri-gradiente $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ si trasforma come: $\Lambda_\nu^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$, cioè come il duale di un vettore come 1.8, e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = A_\mu$$

che definisce il quadrivettore covariante. O meglio, un vettore covariante si trasforma come il quadrigradiente di uno scalare. Il prodotto $A^\mu A_\mu$ si trasforma come

$$A'^\mu A'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu = \Lambda_\nu^\mu \Lambda_\mu^\nu A^\nu A_\nu$$

Le trasformazioni di coordinate sono l'una l'inverso dell'altra, quindi il prodotto è invariante di Lorentz, come l'intervallo.

Dunque abbiamo due tipi di quadrivettore – controvariante e covariante – il cui prodotto "scalare" è un invariante. Per analogia con il raggio vettore con cui costruiamo l'invariante intervallo, definiamo il modulo del quadrivettore questo prodotto:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow |A|^2 = A_\mu A^\mu = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2 \quad (1.10)$$

questo porta a dire che: $A^0 = A_0$ $A^1 = -A_1$ $A^2 = -A_2$ $A^3 = -A_3$

La 1.9, ci porta a definire una "metrica dello spazio in cui sono definiti i quadri-vettori $\eta_{\mu\nu}$ – metrica di Minkowski– tale che si possa scrivere:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (1.11)$$

Si può facilmente verificare che:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Le equazioni delle trasformazioni di Lorentz per un vettore controvariante, si possono scrivere in forma matriciale (per un boost lungo x):

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Per i vettori covarianti cambia il segno dei $\gamma\beta$.

La componente A^0 di un quadri-vettore si chiama temporale, mentre le componenti A^1, A^2 e A^3 sono spaziali. Spesso, per indicare le componenti di un quadri-vettore, si separa la componente temporale da quelle spaziali e, quindi, si utilizzano anche le seguenti notazioni

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) \quad (1.14)$$

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A}) \quad (1.15)$$

Infine, secondo tale notazione, il modulo quadro del quadri-vettore si scrive

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$$

1.6.1 Tensori

Abbiamo visto che il prodotto scalare di un quadri-vettore con il suo duale è invariante; in generale il prodotto di due quadri-vettori, sarà un oggetto a 16 componenti che si trasforma come il prodotto delle trasformazioni:

$$A'^{\mu\nu} \equiv V'^\mu V'^\nu = \Lambda_\sigma^\mu V^\sigma \Lambda_\rho^\nu V^\rho = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu A^{\sigma\rho}$$

Queste grandezze, prendono il nome di tensori (in questo caso di rango 2). Possono esistere nelle forme:

- totalmente controvariante $A^{\mu\nu}$;
- totalmente covariante $A_{\mu\nu}$
- misto A^μ_ν

La **traccia** del tensore è la somma degli elementi diagonali $Tr(A) = A^\mu_\mu = \delta^\mu_\nu A^{\mu\nu}$ che, si vede facilmente, è invariante di Lorentz. La traccia del tensore identità è: $Tr(\delta) = 4$. Abbassando o alzando gli indici di δ^μ_ν otteniamo il tensore metrico di Minkowski, anche esso invariante. La sua traccia è $Tr(\eta) = 2$, il suo determinante è $det(\eta_{\mu\nu}) = -1$, in qualsiasi sistema di riferimento. Nel seguito, indicheremo la metrica con la $g^{\mu\nu}$ perché, quanto affermato vale per qualunque metrica in relatività, se non quando specificato.

L'ultimo tensore invariante è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, di rango 4. Tutte le componenti di tale tensore che presentano almeno due indici uguali sono nulle, mentre quelle non nulle sono uguali a ± 1 e cambiano di segno per permutazioni dispari tra due indici (es. $1234 = -2134 = -1324 = -1243 = -4123 = +1423 \dots$); in particolare, $\epsilon^{0123} = 1$. Il numero di componenti indipendenti è $4! = 24$ e $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$. Il tensore di Levi-Civita è uno pseudo-tensore perché le componenti cambiano segno se si cambia segno ad un numero dispari di coordinate.

Per un tensore antisimmetrico $A^{\mu\nu}$, si definisce uno pseudo-tensore duale $A^{*\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\rho\sigma}$, di modo che il prodotto $A^{*\mu\nu} A_{\mu\nu}$ è uno pseudo-scalare.

1.6.2 Trasformazioni di Lorentz nello spazio 4-dimensionale

In forma matriciale, possiamo scrivere le 4 equazioni delle trasformazioni di Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Affinché la matrice di trasformazione Λ^μ_ν conservi il prodotto scalare, deve essere $g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$. Sostituendo nelle equazioni delle trasformazioni di Lorentz, si ha

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \Rightarrow (\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$$

Dal confronto, si scrive l'equazione:

$$(\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (1.16)$$

Proviamo a verificarlo esplicitamente per un boost lungo x:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^T \quad (1.17)$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\rho}^{T\mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} &= \\
\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \\
= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta & -\gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \quad (1.19)
\end{aligned}$$

che, visto che $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$, dimostra la 1.16.

Visto che $\det(g) = \det(\Lambda^T g \Lambda) = -1$ allora $\det(\Lambda)^2 = 1$, ergo, $\det \Lambda = \pm 1$. La trasformazione di Lorentz è detta propria nel caso positivo.

1.7 Operatori differenziali

Come si comporta l'operatore di derivazione rispetto alle trasformazioni di Lorentz? In generale, gli operatori di derivazione rispetto alle coordinate x^α vanno considerati come componenti covarianti di un operatore quadrivettoriale:

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = \partial'^\beta \partial^\alpha x'_\beta = \partial'^\beta \Lambda_\beta^\alpha$$

D'altra parte, si ha

$$\Lambda_\alpha^\tau x'^\alpha = \Lambda_\alpha^\tau \Lambda_\beta^\alpha x^\beta = x^\tau$$

Differenziando l'ultima uguaglianza, si ha

$$\Lambda_\alpha^\tau dx'^\alpha = dx^\tau \Rightarrow \Lambda_\alpha^\tau = \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha^\tau \frac{\partial}{\partial x^\tau} \Rightarrow \partial'_\alpha = \Lambda_\alpha^\tau \partial_\tau$$

Quindi anche l'operatore derivata si comporta come un quadrivettore. Inoltre, se V è un generico vettore, allora la quantità $\partial_\mu V^\mu$ è uno scalare:

$$\partial_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu V^\nu = \frac{\partial V^0}{\partial ct} - \nabla \mathbf{V} \quad (1.20)$$

avendo definito:

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial_t}{c}, \nabla \right) \quad (1.21)$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial_t}{c}, \nabla \right) \quad (1.22)$$

Allora, il 4-Laplaciano coincide con il D'alambertiano:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = \square \quad (1.23)$$

1.8 Meccanica relativistica e principio di minima azione

Per studiare il moto delle particelle materiali, partiamo dal principio di minima azione. Secondo tale principio, per ogni sistema meccanico esiste un integrale S , detto azione, che è minimo per il moto effettivo, e la cui variazione δS è conseguentemente nulla. Definiamo l'integrale d'azione per una particella materiale libera, non soggetta, cioè, all'azione di forze esterne. È opportuno notare che tale integrale non deve dipendere dalla scelta del sistema di riferimento, ovvero deve essere invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Dunque, esso non può che essere che l'integrale di uno scalare, con funzione integranda differenziale del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera è proporzionale all'intervallo ds , per cui l'azione per una particella libera è data da:

$$S = -\alpha \int_a^b ds \quad (1.24)$$

esteso ad una linea d'universo compresa tra a e b . L'integrale ha un massimo quando la linea d'universo è dritta, infatti deve valere 0 quando è lungo una linea chiusa, che è curva per definizione, mentre un orologio in quiete ha segnato un tempo $t = 1/c \int ds$ sempre maggiore di uno in moto. Se non ci fosse il segno - davanti alla costante positiva α , l'azione non potrebbe avere un minimo. Si ricordi, inoltre, che l'azione può esprimersi anche come integrale nel tempo della lagrangiana

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

Sostituendo nella 1.24 $ds = c dt' = c dt / \gamma$,

$$S = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha c \sqrt{1 - \beta^2} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

da cui troviamo la lagrangiana per la particella libera $\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \beta^2} = -\alpha \sqrt{c^2 - v^2}$. Per determinare la costante α calcoliamo il limite classico per $\beta \rightarrow 0$ sviluppando in serie:

$$\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong -\alpha c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -\alpha c + \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c}$$

Il primo termine della lagrangiana non dipende dalla velocità della particella, per cui è una costante arbitraria. Uguagliando il termine dipendente dalla velocità con l'espressione della lagrangiana classica di particella libera $p^2/2m$, si ottiene $\alpha = mc$ e:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.25)$$

L'impulso lo ricaviamo dall'azione derivandola rispetto alla velocità:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = -mc^2 \frac{-2 \frac{\mathbf{v}}{c^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \gamma \mathbf{v} \quad (1.26)$$

La forza agente sulla particella si ottiene come derivata temporale dell'impulso:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt}$$

Per forze centrali, in cui $F \perp v$, il modulo di $\mathbf{v}$ è costante, quindi il II termine è nullo e

$$F = m\gamma \frac{dv}{dt}$$

Il caso generale è più complicato:

Nel caso di forza parallela alla velocità:

$$F = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt}$$

(da verificare) L'energia si ricava dalla relazione Hamiltoniana:

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} = m\gamma v \cdot v + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma m \left(v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) = \gamma m (v^2 + c^2 - v^2) = m\gamma c^2 \quad (1.27)$$

Dalle 1.26 e 1.27, possiamo derivare una importante relazione:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \\ \mathcal{E} = m\gamma c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{\beta}{c}$$

Inoltre, la 1.27 ci dice che anche per $v = 0$, la una particella dotata di massa ha un'energia *a riposo* $E_0 = mc^2$.

Definiamo ora il quadri-vettore:

$$p^\mu \equiv \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (1.28)$$

detto quadri-impulso; il modulo quadro di questo quadri-vettore è:

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2 \gamma^2 v^2 = m^2 c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = m^2 c^2 \quad (1.29)$$

Per una particella o un sistema in moto, nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa, siccome il modulo del quadri-vettore è invariante, $(p^0)^2 = m^2 c^2$ e quindi p^0/c è la massa *invariante* del sistema.

Infine, dalla 1.29:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2$$

quindi, l'energia, o meglio l'Hamiltoniana è:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{m^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2} \quad (1.30)$$

1.9 Rappresentazione covariante delle equazioni di Maxwell

Scriviamo la prima e la quarta equazione di Maxwell in forma locale Ricordando che $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ e che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ si ha:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

sostituendo le espressioni per E e B:

$$\begin{cases} -\nabla (\nabla\Phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\Phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) \end{cases}$$

Nella prima equazione aggiungiamo e sottraiamo la quantità $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi - \frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu\mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} \end{cases}$$

Che possiamo scrivere come:

$$\begin{cases} \square\Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square\mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t}) = \mu_0\mathbf{J} \end{cases} \quad (1.31)$$

che, se definiamo un quadrivettore:

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

possiamo scrivere in modo compatto, ricordando gli operatori di quadri-derivazione 1.22 e dividendo la prima equazione per $c^2 = (\epsilon_0\mu_0)^{-1}$: $\square\Phi/c^2 - 1/c\partial_t/c(\dots) = \rho/(c^2\epsilon) = \rho\mu_0$ che posso scrivere come : $\partial_\mu\partial^\mu A^0/c - 1/c\partial^0(\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 J^0/c$ e dunque, sommando le due equazioni:

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = \mu_0 J^\mu \quad (1.33)$$

dove abbiamo definito la quadricorrente:

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

L'espressione fra parentesi 1.31, ovvero $\partial_\nu A^\nu$, è nulla se ci si mette nella gauge di Lorenz, sfruttando l'arbitrarietà della scelta di $\mathbf{A}$ a meno di un potenziale (vedi sez.??). Con questa scelta, la 1.33 diventa:

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (1.35)$$

Ad ogni modo, se lasciamo nell'equazione 1.33, il termine nullo della condizione di Lorenz, possiamo raccogliere una derivazione e scrivere:

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \mu_0 J^\mu \Leftrightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \quad (1.36)$$

che definisce il tensore antisimmetrico *campo elettromagnetico*

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (1.37)$$

Possiamo verificare che:

$$F^{i0} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = 1/c \left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = -\frac{E^i}{c}$$

e, analogamente:

$$F^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j = -(\nabla \times \mathbf{A})_k = -B_k$$

In definitiva:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Si può verificare che la II e la III equazioni di Maxwell (paragrafo ??), si possono raccogliere nell'espressione:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.39)$$

1.10 Particella carica in moto in un campo EM

L'azione di una particella in moto in un campo elettromagnetico è composta di due termini: l'azione della particella libera, descritta nel paragrafo 1.8, e un termine che descrive l'interazione della particella con il campo. Quest'ultimo deve contenere sia le grandezze che caratterizzano la particella, sia quelle che caratterizzano il campo. Le proprietà della particella sono definite, per quanto concerne la sua interazione con il campo elettromagnetico, da un solo parametro, ovvero dalla carica e della particella. Le proprietà del campo sono, invece, caratterizzate dal quadripotenziale A_μ , le cui componenti sono funzioni delle coordinate e del tempo. Queste grandezze compaiono nell'azione tramite un termine di interazione che deve essere invariante. Classicamente: $\mathcal{L}_{int} = T - e\Phi$, quindi affinché $\mathcal{L}_{int}dt$ sia invariante, visto che $dt' = \gamma dt$, dovrà essere invariante $\mathcal{L}_{int}\gamma$. Ora, $\gamma = \mathcal{E}/(mc^2)$ quindi, $-e\Phi\mathcal{E}/(mc^2) = -ep^0 A_0/m$ (usando la 1.28 e la 1.32); generalizzando, possiamo scrivere: $\mathcal{L}_{int}\gamma = -\frac{e}{m}p^\mu A_\mu = \gamma u^\mu A_\mu$

$$S_{int} = -e \int_a^b A_\mu dx^\mu \quad (1.40)$$

quindi, l'azione complessiva per una particella in moto nel C.E.M. è:

$$S = \int_a^b (-mc ds - eA_\mu dx^\mu)$$

Tenuto conto che $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (dr)^2} = cdt\sqrt{1 - u^2/c^2} = mc/\gamma$ e $A_\mu dx^\mu = A_0 dx^0 - A_i dx^i = \frac{\Phi}{c} cdt - A_i \frac{dx^i}{dt} dt$

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{mc^2}{\gamma} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \right) dt$$

quindi la Lagrangiana di una particella in moto in un campo elettromagnetico è:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (1.41)$$

L'impulso generalizzato $\mathbf{P}$ si ottiene derivando la lagrangiana rispetto alla velocità.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad (1.42)$$

L'Hamiltoniana, dalla relazione $\mathcal{H} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} - \mathcal{L}$:

$$\mathcal{H} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u} - \left(-\frac{mc^2}{\gamma} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \right) = \mathcal{H}_L + e\Phi$$

dove $\mathcal{H}_L$ è la lagrangiana di particella libera 1.27, quindi:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + e\Phi \quad (1.43)$$

Allora, se la relazione tra $\mathcal{H}$ e P deve essere la stessa che nel caso di particella libera lega $\mathcal{H}$ e p

$$\mathcal{H}_L = c\sqrt{p_L^2 + m^2c^2} \Rightarrow \mathcal{H} - e\Phi = c\sqrt{|\mathbf{P} - e\mathbf{A}|^2 + m^2c^2}$$

Per velocità piccole rispetto a c , la 1.41 si può scrivere

$$\mathcal{L} \simeq \frac{mv^2}{2} - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (1.44)$$

e, con le medesime approssimazioni, l'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} \simeq e\Phi + \frac{1}{2m} |\mathbf{P} - e\mathbf{A}|^2$$

Inoltre, applicando l'equazione di Eulero – Lagrange, a partire dalla scrittura della funzione hamiltoniana, si può ricavare l'espressione della forza di Lorentz. Infatti l'equazione di Eulero – Lagrange, come noto, è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

tenuto conto della 1.44, e dell'identità:

$$\nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + B \times \nabla \times A + A \times \nabla \times B$$

calcoliamo le derivate della lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -e\nabla\Phi + e\nabla(A \cdot \mathbf{v}) = -e\nabla\Phi + e[(A \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)A + \mathbf{v} \times \nabla \times A + A \times \nabla \times \mathbf{v}]$$

Se $\mathbf{v}$ è costante, le sue derivate sono nulle:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -e\nabla\Phi + e[(\mathbf{v} \cdot \nabla)A + \mathbf{v} \times \nabla \times A] = -e\nabla\Phi + e(\mathbf{v} \cdot \nabla)A + e\mathbf{v} \times B$$

In cui riconosciamo la forza di Lorenz: $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Il primo termine è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_L + e\mathbf{A})$$

Uguagliando i due membri:

$$\frac{d\mathbf{p}_L}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \nabla \Phi + e(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

e scrivendo la derivata totale temporale come: $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ otteniamo:

$$\mathbf{F} = -e \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla \Phi \right) + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Che è la forza totale che agisce su una particella carica in moto con velocità costante in presenza di campi elettrici e magnetici.

Alla stessa conclusione si giunge dal principio di minima azione:

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mc ds - e A_\mu dx^\mu) = - \int_a^b (mc \delta ds + e A_\mu \delta dx^\mu + e \delta A_\mu dx^\mu) = 0$$

visto che $ds = (dx_\mu dx^\mu)^{1/2}$ allora $\delta ds = 1/2 ds^{-1} \cdot 2x^\mu \delta dx^\mu$:

$$\delta S = - \int_a^b \left(mc \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} + e A_\mu \delta dx^\mu + e \delta A_\mu dx^\mu \right) = 0$$

Definita la velocità $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$,

$$\delta S = \int_a^b (mc u_\mu \delta dx^\mu + e A_\mu \delta dx^\mu + e \delta A_\mu dx^\mu) = 0$$

Ora possiamo integrare per parti i primi due termini, tenendo conto che $\delta dx_\mu = d\delta x_\mu$:

$$\delta S = -mc u_\mu \delta x^\mu + \int_a^b mc \delta x^\mu du_\mu - e A_\mu \delta x^\mu + \int_a^b e \delta x^\mu dA_\mu - \int_a^b e \delta A_\mu dx^\mu = 0$$

Raccogliendo i termini integrali e quelli integrati:

$$\delta S = \int_a^b (mc \delta x^\mu du_\mu + e \delta x^\mu dA_\mu - e \delta A_\mu dx^\mu) - (mc u_\mu + e A_\mu) \delta x^\mu \Big|_a^b = 0$$

Il secondo termine di quest'ultima espressione è nullo, perché la variazione è fatta con le coordinate fisse agli estremi, quindi $\delta x^\mu \Big|_a^b = 0$, quindi:

$$\delta S = \int_a^b (mc \delta x^\mu du_\mu + e \delta x^\mu dA_\mu - e \delta A_\mu dx^\mu)$$

Tenuto conto che:

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \quad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

$$\delta S = \int_a^b \left[mc \, du_\mu + e \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\nu \right] \delta x^\mu = 0$$

dove, nella somma fra parentesi, abbiamo potuto scambiare gli indici μ e ν , perché sono saturati, e riconosciamo il tensore campo elettromagnetico: $F_{\mu\nu}$. Infine, espandendo $du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds$ e $dx^\mu = u^\mu ds$ e tenendo conto dell'arbitrarietà degli estremi di integrazione:

$$mc \frac{du_\mu}{ds} - e \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu = 0$$

ovvero:

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = e F_{\mu\nu} u^\nu \quad (1.45)$$

che è l'equazione del moto di una particella di massa m e carica e in un campo E.M., in forma 4-dimensionale.

1.11 Trasformazioni di Lorentz del campo EM

Il tensore campo E.M., si trasforma con la regola generale per i tensori come:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Specializziamo la trasformazione per un esempio pratico, come un boost lungo x_3 . Quindi, per esteso:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Prendiamo gli indici 0 e 1, dalla 1.38: $F^{01} = E_x/c$, allora, la trasformazione è:

$$F'^{01} = E'_x/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Dobbiamo esplicitare la somma con ρ e σ che vanno da 0 a 3:

$$E'_x/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_3 \Lambda^1_1 F^{31} = \gamma (E_x/c - \beta B_y) \quad (1.47)$$

Analogamente per le altre due componenti, si ottiene:

$$E'_y/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^2_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^0_3 \Lambda^2_2 F^{32} = \gamma (E_y/c + \beta B_x) \quad (1.48)$$

$$E'_z/c = \Lambda^0_\rho \Lambda^3_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} = \Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F^{03} + \Lambda^0_3 \Lambda^3_0 F^{30} = E_z/c \quad (1.49)$$

In generale, si può dimostrare che, scomponendo i vettori dei due campi lungo la direzione parallela a quella della velocità $\mathbf{v}$ ed ortogonale a quest'ultima, si ha

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.50)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{B}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}) \quad (1.51)$$

dove risulta chiaro che il campo magnetico trasverso può essere prodotto da una particella carica (che genera il campo) in moto anche in assenza di un campo magnetico iniziale.

Capitolo 2

Teoria della Relatività Generale

La Teoria della Relatività Generale fu formulata da Einstein nel 1916. Essa si basa sul principio di equivalenza della gravitazione e quello di inerzia (nella relazione tra campo gravitazionale e geometria dello spazio – tempo) e sul principio di covarianza generale.

Il linguaggio della Teoria della Relatività è quello dell'analisi tensoriale e della geometria differenziale.

I punti cardine di tale teoria sono i seguenti.

1. La teoria Newtoniana non è più adatta a descrivere il campo gravitazionale.
2. Abbiamo necessità dei tensori per descrivere il campo gravitazionale. Inoltre è necessario introdurre i concetti di varietà, metrica, connessioni affini e altri enti geometrici.
3. Definire il ruolo del principio di equivalenza in tale trattazione.

2.1 Campo gravitazionale in meccanica non relativistica

La teoria newtoniana della gravità venne pubblicata nel 1685. I capisaldi di tale teoria, come noto, sono:

1. La legge di Newton

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$$

dove m_I rappresenta la massa inerziale.

2. La legge di gravità di Newton

$$\mathbf{F}_G = m_G \mathbf{g}$$

In tale relazione, m_G rappresenta la massa gravitazionale, mentre l'accelerazione gravitazionale è data dalla legge di gravitazione universale

$$\mathbf{g} = -\frac{G \sum_i M_{Gi} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.1)$$

Se la forza cui è soggetto il corpo è la stessa, allora possiamo scrivere

$$m_I \mathbf{a} = m_G \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \mathbf{g}$$

I campi gravitazionali sono caratterizzati dal fatto che tutti i corpi, indipendentemente dalla massa, si muovono allo stesso modo, a parità di condizioni iniziali. La forza di gravità, dunque, si distingue da tutte le altre forze, ad esempio quella elettromagnetica, che può agire o meno su una particella in funzione del suo rapporto carica/massa. Tale proprietà esclusiva dei campi gravitazionali permette di stabilire un'analogia tra il moto dei corpi in un campo gravitazionale e il moto dei corpi che non si trovano in un campo esterno, ma che sono riferiti ad un sistema di riferimento non inerziale. In altri termini, un sistema di riferimento non inerziale è equivalente ad un campo gravitazionale. Tale affermazione porta al cosiddetto principio di equivalenza. Tale principio esiste in due forme:

- **forma forte** afferma che, in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento, nell'intorno di ogni punto, dove gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli;
- **forma debole** afferma solo l'equivalenza della massa inerziale e la massa gravitazionale, ovvero si riferisce solo ai corpi in moto libero

Di fatto, tutti gli esperimenti condotti sinora confermano tale principio di equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale.

Consideriamo, per esempio, il moto di una particella non relativistica che procede di moto rettilineo uniformemente accelerato, ad esempio in caduta libera. Per il principio di equivalenza, tale particella può essere immaginata in un sistema di riferimento uniformemente accelerato, per cui le equazioni del moto si scrivono

$$m_I \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{tot}} = m_G \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k$$

Lo stesso sistema, ora, lo guardiamo da un ascensore in caduta libera nello stesso campo gravitazionale, per cui il cambio di coordinate da effettuarsi è il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \\ t' = t \end{cases}$$

La nuova equazione del moto è la seguente:

$$m_I \left(\frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} + \mathbf{g} \right) = m_G \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}_k$$

Nell'ipotesi in cui massa inerziale e gravitazionale coincidano, allora:

$$m_I = m_G \Rightarrow m_I \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k$$

Come ci si aspettava, l'osservatore nell'ascensore in caduta libera nel campo non risente degli effetti del campo stesso.

Tuttavia, mentre il principio di equivalenza va bene localmente, nel caso di sistemi non inerziali vi è una sostanziale differenza per quanto riguarda il comportamento all'infinito. Infatti, ad una distanza infinita dai corpi che lo generano, il campo gravitazionale reale tende a zero, mentre i campi equivalenti ai sistemi non inerziali crescono illimitatamente all'infinito o, al più, tendono ad un valore asintotico finito non necessariamente nullo. Si pensi, ad esempio, al caso delle forze centrifughe che nascono da un sistema di riferimento rotante, e che tendono all'infinito al crescere della distanza dall'asse di rotazione.

2.2 Campo gravitazionale in meccanica relativistica

La proprietà fondamentale dei campi gravitazionali, e cioè che tutti i corpi si muovono in essi nello stesso modo, resta valida anche in meccanica relativistica. Rimane, di conseguenza, anche l'analogia tra i campi gravitazionali e i sistemi di riferimento non inerziali. In un sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane, l'intervallo infinitesimo è determinato dalla solita relazione

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nel passaggio ad un sistema di riferimento non inerziale, ds^2 non è più esprimibile tramite i quadrati dei differenziali delle coordinate. Per esempio, se si passa ad un sistema di coordinate in rotazione uniforme, detta Ω la velocità angolare di rotazione diretta lungo l'asse z , si ha:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ 0 & \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

considerando i differenziali per dx e dy :

$$\begin{cases} dx = dx' \cos \Omega t - x' \Omega \sin \Omega t dt - dy' \sin \Omega t - \Omega y' \cos \Omega t dt \\ dy = dx' \sin \Omega t + x' \Omega \cos \Omega t + dy' \cos \Omega t - y' \Omega \sin \Omega t dt \end{cases}$$

per t piccoli, $\sin \Omega t = \Omega t$, $\cos \Omega t = 1$ quindi,

$$\begin{cases} dx = dx' - dy' \Omega t - \Omega y' dt \\ dy = dx' \Omega t + x' \Omega dt + dy' \end{cases}$$

sicché, detta $\hat{\Omega}$ la matrice di rotazione differenziale e η la metrica di Minkowski:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{iklm=0}^3 \eta_{ik} \hat{\Omega}_l^k \hat{\Omega}_m^i dx^l dx^m = \\ &= [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)] dt^2 - dz'^2 + \Omega y' dx' dt - \Omega x' dy' dt \end{aligned}$$

che, come si vede, qualunque sia la trasformazione del tempo, contiene termini non diagonali, e dunque suggerisce una metrica generica $g_{\mu\nu}$ che, in questo caso è $\hat{\Omega}^T \eta \hat{\Omega}$.

Dato il principio di equivalenza, risulta logico affermare che l'informazione sull'accelerazione, o sul campo gravitazionale è tutta contenuta nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Osserviamo, ancora, che un campo gravitazionale reale non può essere eliminato ovunque con alcuna trasformazione delle coordinate. In altri termini, non esiste alcuna trasformazione di coordinate che, in presenza del campo gravitazionale reale, possa rendere il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ di forma galileiana $\eta_{\mu\nu}$ contemporaneamente in tutto lo spazio-tempo.

È attribuito ad Einstein un esperimento mentale (Gedankenexperiment): vogliamo misurare il rapporto tra la circonferenza C ed il raggio R di una giostra in rotazione molto veloce con un righello lungo ℓ_0 . Il raggio è sempre perpendicolare al moto, quindi non risente di effetti relativistici e la sua lunghezza risulta la stessa che in quiete. Per misurare la circonferenza, il righello è sempre parallelo alla velocità, quindi subirà una contrazione tale che $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Dunque, la lunghezza della circonferenza misurata con il righello, sarà maggiore che nella giostra in quiete e dunque il rapporto $C/R \neq 2\pi$, sicché lo spazio è curvo (è iperbolico in questo caso).

2.3 Moto libero in un sistema di riferimento qualsiasi

Per una particella di massa m in moto libero: $F = 0 = ma$, quindi, in 4 dimensioni:

$$\frac{dx^\mu}{dt^2} = 0$$

trasformiamo le coordinate in un sistema x'^μ dipendente da x^μ :

$$\frac{dx^{2\mu}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t} \right] = \frac{d^2 x'^\alpha}{dt^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} + \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{d^2 x^\mu}{dx'^\alpha dx'^\beta} \frac{dx'^\beta}{dt} = 0$$

Moltiplicando tutto per $\partial_\mu x'^\gamma$:

$$\frac{d^2 x'^\alpha}{dt^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} + \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial t} = \frac{d^2 x'^\alpha}{dt^2} \delta_\alpha^\gamma + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{dx'^\beta}{dt}$$

essendo $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\alpha} = \delta_\alpha^\gamma$. Dunque, raccogliendo i termini con le derivate prime rispetto a t :

$$\frac{d^2 x'^\gamma}{dt^2} + \left[\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right] \frac{dx'^\alpha}{dt} \frac{dx'^\beta}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

che descrive il moto libero in uno spazio curvo, ovvero lungo una geodetica dello spazio considerato. L'espressione fra parentesi quadre, prende il nome di connessione affine e viene indicata con il simbolo di Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Va notato che, il ragionamento svolto fin qui con le derivate temporali, può essere effettuato minimizzando l'azione di particella libera $S = \frac{1}{c} \int ds$ lungo una curva nello spazio-tempo caratterizzata da un parametro σ , dunque la generica geodetica

che è la curva che minimizza l'azione in uno spazio curvo è:

$$\frac{d^2 x'^\gamma}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx'^\alpha}{d\sigma} \frac{dx'^\beta}{d\sigma} = 0 \quad (2.3)$$

Le $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, rappresentano il campo gravitazionale e la 2.2 è l'equivalente di $a + GM/R^2 = 0$ di Newton.

2.4 Intervalli temporali e distanze

Vogliamo determinare, a partire da valori misurati delle grandezze in un sistema di riferimento x^0, x^1, x^2, x^3 , le distanze e gli intervalli di tempo reali. Sia τ il tempo reale e consideriamo due eventi infinitamente vicini, ma che avvengono nello stesso punto dello spazio. L'intervallo tra questi due eventi sicuramente può essere espresso come:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Ponendo nell'ultima espressione $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, allora si ricava il tempo proprio come:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2 \Rightarrow d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0$$

Questa è l'espressione del tempo reale (o proprio) in funzione della coordinata x^0 . Si osservi che, dovendo essere sempre positivo e reale il tempo proprio, si ha: $g_{00} > 0$. Tale condizione è strettamente necessaria, quindi, per la corrispondenza tra un campo gravitazionale reale al tensore metrico $g_{\mu\nu}$ di uno spazio – tempo reale. A tale scopo, gioca un ruolo decisivo, inoltre, anche la scelta della giusta segnatura.

Per quanto riguarda, invece, l'elemento dL di distanza spaziale, ricordiamo che in relatività ristretta è possibile definire tale lunghezza come l'intervallo tra due eventi infinitamente vicini che si verificano nello stesso istante. In relatività generale, non è possibile porre banalmente $dx^0 = 0$ nell'espressione del ds , in quanto, come visto, il tempo proprio in un campo è legato alla coordinata stessa da una relazione che cambia punto per punto. Allora, per determinare dL , si procede come segue. Supponiamo che un segnale luminoso venga emesso da un punto B dello spazio (di coordinate $x^\alpha + dx^\alpha$) verso un punto infinitamente vicino A (di coordinate x^α) e riflesso immediatamente lungo lo stesso cammino, così come si vede nella Fig. 2.1

Il tempo (misurato nel punto B) necessario perché avvenga l'intero processo è evidentemente il doppio del rapporto tra la distanza tra i due punti e c , ovvero $\frac{2L}{c}$. Scriviamo, ora, l'intervallo mettendo in evidenza le coordinate spaziali e la coordinata temporale:

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m + g_{00} (dx^0)^2$$

In tale scrittura, gli indici assumono valori da 1, 2 e 3 (in tal modo è stata esplicitata la coordinata temporale x^0). L'intervallo tra due eventi corrispondenti alla partenza e all'arrivo del segnale da un punto all'altro è nullo, per cui

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &\Rightarrow g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m + g_{00} (dx^0)^2 = 0 \\ g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0m} dx^m dx^0 + g_{mn} dx^m dx^n &= 0 \end{aligned}$$

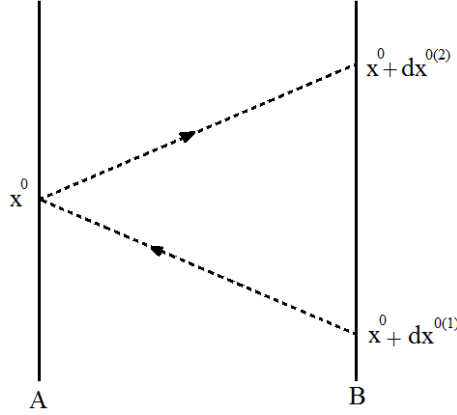


Figura 2.1: Schema della misura della distanza

quindi:

$$dx^{0(1;2)} = \frac{-g_{0m}dx^m \pm \sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})} dx^m dx^n}{g_{00}} \quad (2.4)$$

Le due soluzioni temporali corrispondono alla propagazione del segnale nelle due direzioni. Se x^0 è l'istante d'arrivo del segnale in A, allora gli istanti della sua partenza in B e del suo ritorno in B saranno rispettivamente quelli col segno negativo e positivo. Quindi l'intervallo di tempo totale tra l'emissione ed il ritorno vale la differenza dei tempi, ovvero:

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})} dx^m dx^n}{g_{00}} \quad (2.5)$$

L'intervallo di tempo reale, ovvero il tempo proprio, si ottiene, come visto, moltiplicando per il fattore $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$:

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} \frac{2\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})}}{g_{00}} = \\ &= \frac{2}{c} \frac{\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})}}{\sqrt{g_{00}}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Siccome $L = cd\tau/2$, sostituendo la 2.6, otteniamo:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{cd\tau}{2} = \frac{\sqrt{(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})} dx^m dx^n}{\sqrt{g_{00}}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} - g_{mn}\right)} dx^m dx^n \end{aligned}$$

e quindi:

$$dL^2 = \left(\frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} - g_{mn}\right) dx^m dx^n = \gamma_{mn} dx^m dx^n \quad (2.7)$$

in cui γ_{mn} è il tensore metrico tridimensionale che definisce la metrica, ovvero le proprietà geometriche dello spazio. Bisogna, però, tenere presente che, in

generale, le g_{mn} dipendono da x^0 , per cui anche la metrica spaziale varia nel tempo. Per tale ragione, ha senso integrare l'espressione di dL solo in caso di indipendenza dei tensori dal tempo, ovvero per campi statici.

Passiamo, ora, alla definizione della nozione di simultaneità in relatività generale. Vediamo, quindi, se è possibile sincronizzare gli orologi che si trovano in punti differenti dello spazio. Una tale sincronizzazione deve evidentemente essere realizzata con uno scambio di segnali luminosi tra due punti. Consideriamo nuovamente la propagazione, come appena visto, di un segnale da un punto A ad un punto B infinitamente vicini. Consideriamo simultaneo con A l'indicazione dell'orologio in B tra l'istante di partenza e quello di ritorno del segnale, ovvero

$$x^0 + dx^0 = x^0 + \frac{dx^{0(2)} + dx^{0(1)}}{2} = x^0 - \frac{g_{0m}}{g_{00}} dx^m$$

Tale relazione permette di sincronizzare gli orologi in qualsiasi volume infinitesimo dello spazio. È possibile, dunque, sincronizzare gli orologi lungo una qualsiasi linea non chiusa. Lungo un contorno chiuso, invece, tale sincronizzazione è impossibile, in quanto, nel descrivere il contorno e ritornando al punto di partenza, si ottiene per Δx^0 un valore diverso da zero. Si noti che, mentre in relatività ristretta lo scorrere del tempo è diverso per gli orologi in moto relativo tra loro, in relatività generale il tempo scorre diversamente anche nei punti dello spazio di uno stesso sistema di riferimento.

2.5 Moto di una particella in un campo gravitazionale

Nel caso limite di velocità piccole, le equazioni relativistiche del moto di una particella in un campo gravitazionale devono ridursi alle rispettive equazioni non relativistiche. Bisogna, inoltre, tener presente che, se le velocità si suppongono piccole, segue anche la condizione di campo gravitazionale debole. In caso contrario, infatti, la particella che in esso si trova acquisirebbe una grande velocità. Scriviamo, in tali ipotesi, la lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\varphi$$

Tale espressione assicura che la lagrangiana non relativistica in assenza di campo

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

sia esattamente quella alla quale si riduce la lagrangiana relativistica nel caso di piccole velocità:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

L'azione non relativistica S per una particella in un campo gravitazionale assume, dunque, la forma

$$S = \int \mathcal{L} dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt = -mc \int ds$$

Dal confronto si ricava:

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt \Rightarrow ds^2 = \left(c^2 + \frac{v^4}{4c^2} + \frac{\varphi^2}{c^2} - v^2 - \frac{v^2\varphi}{c^2} + 2\varphi \right) dt^2$$

e, trascurando i termini in $1/c^2$:

$$ds^2 \approx (c^2 - v^2 + 2\varphi) dt^2 = (c^2 + 2\varphi) dt^2 - dr^2$$

D'altra parte $ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{mn} dx^m dx^n + 2g_{0m} dx^0 dx^m$, che, con la stessa approssimazione possiamo scrivere come $ds^2 g_{00} (dx^0)^2 - dr^2$. Confrontato con quanto scritto sopra, dà:

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right)$$

Il potenziale Newtoniano è:

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

quindi, per campi deboli e velocità non relativistiche:

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r^2} \right) \quad (2.8)$$

2.5.1 Campo gravitazionale costante: il problema del GPS

Un campo gravitazionale è detto costante se è possibile scegliere un sistema di riferimento tale che tutte le componenti del tensore metrico non dipendano dalla coordinata temporale x^0 , che viene, quindi, chiamata tempo universale. La scelta del tempo universale non è univoca. Ad esempio, quando si aggiunge ad x^0 una funzione arbitraria delle coordinate spaziali, anche in tal caso tutte le componenti del tensore metrico non contengono la coordinata x^0 . Inoltre è anche evidente che il tempo universale può essere definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, rendendo altrettanto arbitraria la sua scelta dell'unità di misura. È necessaria, per generare un campo gravitazionale costante, la presenza di un solo corpo, in quanto la mutua attrazione gravitazionale tra più corpi genera un moto, incompatibile con l'ipotesi di campo costante. Se il corpo che crea il campo è immobile, tale campo è detto statico, poiché tutte le componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico sono nulle e le due direzioni del tempo sono equivalenti. La condizione di immobilità del corpo è sufficiente, ma non necessaria per la costanza del campo. Di fatto sono tali anche i campi generati da un corpo a simmetria assiale che ruoti uniformemente attorno al proprio asse di simmetria. In tal caso, però, i due sensi del tempo non sono più equivalenti, in quanto, invertendo il tempo, cambia anche il segno della velocità angolare di rotazione del corpo. Tale proprietà è caratteristica dei campi stazionari. Il significato del tempo universale in un campo gravitazionale costante è che l'intervallo di tale tempo tra due eventi in un punto coincide con quello tra qualsiasi altri due eventi in ogni altro punto dello spazio, rispettivamente simultanei con i primi due eventi. Detto ciò, è possibile integrare analiticamente l'espressione del tempo proprio in funzione del tempo universale:

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0 \quad (2.9)$$

2.5. MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE 31

Per campi deboli e velocità non relativistiche, dove vale la 2.8, possiamo sviluppare la radice in termini di φ/c^2 :

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) x^0$$

Quindi il tempo proprio trascorre più lentamente quanto più è piccolo il potenziale gravitazionale nel punto dello spazio, ovvero quanto più è grande il suo valore assoluto (il potenziale in questione è negativo). Per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle correzioni da applicare agli orologi sui satelliti GPS, che orbitano a 20000 km dalla superficie, a causa della diversa intensità del potenziale rispetto a terra. La differenza di tempo proprio è

$$\Delta\tau = -G \frac{M}{rc^2}$$

quindi l'orologio a terra segnerà un tempo

$$t_1 = t \left(1 - G \frac{M}{r_1 c^2}\right)$$

mentre, quello su satellite:

$$t_2 = t \left(1 - G \frac{M}{(r_1 + R)c^2}\right)$$

In conclusione

$$\frac{t_2 - t_1}{t} = -G \frac{M}{c^2} \left(\frac{1}{(r_1 + R)} - \frac{1}{r_1} \right) = G \frac{M}{c^2 r_1} \frac{R}{(r_1 + R)}$$

I valori da usare sono:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-2}$$

$$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r_1 = 6.3 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R = 2 \cdot 10^7$$

Risulta $t_2 - t_1 = 5.34 \cdot 10^{-10} \text{ s/s}$, che moltiplicati per 86400 s/giorno, porterebbero ad un errore di $+46 \mu\text{s}$ ogni giorno degli orologi sui satelliti rispetto a quelli, identici, a terra.

D'altra parte, il satellite viaggia a 11400 km/h rispetto al suolo. Dunque, se l'orologio sul satellite segna $t_2 = t$, l'orologio al suolo segna $t_1 = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma t$ ove

$$\beta = \frac{v}{c} = (11400 \text{ km/h} / 3600 \text{ s/h}) / 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 1.33 \cdot 10^{-5}$$

Quindi:

$$\frac{t_2 - t_1}{t} = 1 - \gamma = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - (1.33 \cdot 10^{-5})^2}} = -8.9 \cdot 10^{-11} \text{ s/s}$$

Questi, moltiplicati per 86400 s/giorno, danno: $-7 \mu\text{s}$ al giorno. L'errore totale degli orologi si satellite rispetto a quelli a terra è: $\Delta t = 46 - 7 = 39 \frac{\mu\text{s}}{\text{giorno}}$, che corrisponderebbero ad un errore cumulato sulla misura della posizione di 11.7km

2.6 Derivata covariante

Se consideriamo un vettore $\mathbf{V}$ espresso in termini di componenti V^α per i rispettivi versori $\hat{e}_{(\alpha)}$: $\mathbf{V}^\alpha \hat{e}_{(\alpha)}$, la sua derivata rispetto ad una coordinata è ancora un vettore?

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_{(\alpha)} + V^\alpha \frac{\partial \hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta}$$

Il primo pezzo è un vettore perché è una combinazione lineare di vettori della base; il secondo vediamo come si trasforma. Possiamo sempre trovare un sistema locale in cui le coordinate $\hat{e}_{(\alpha')}$ siano costanti, dunque:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{(\alpha)} &= \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \hat{e}_{(\alpha')} \Rightarrow \\ \frac{\partial \hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta} &= \left(\frac{\partial \Lambda_{\alpha'}^{\alpha}}{\partial x^\beta} \right) \hat{e}_{(\alpha')} \end{aligned}$$

Dunque anche il secondo membro è una combinazione lineare di versori della base, pertanto è un vettore. Se chiamiamo

$$\frac{\partial \hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \hat{e}_{(\mu)} \quad (2.10)$$

allora;

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \left[\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} V^\alpha \right] \hat{e}_{(\mu)} \quad (2.11)$$

definisce una derivazione *covariante*:

$$D_\beta V^\alpha = (\partial_\beta + \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}) V^\alpha \quad (2.12)$$

Un altro modo per arrivare alla derivazione covariante è il seguente.

Consideriamo lo scalare ϕ ; la sua derivata rispetto ad un parametro s è anch'essa uno scalare:

$$\psi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$$

cioè un invariante per tutte le curve di parametro s passanti per un punto del continuo x^μ . Il primo termine si trasforma come un tensore covariante $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = V_\mu$. Se ψ è uno scalare, anche la sua derivata rispetto al parametro lo sarà:

$$\chi = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial x^\nu}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s^2}$$

Se assumiamo che il trasporto sia lungo la geodetica, vale la 2.3 quindi:

$$\frac{d^2 x'^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx'^\alpha}{ds} \frac{dx'^\beta}{ds}$$

ed infine, sostituendo:

$$\chi = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \quad (2.13)$$

2.6.1 Relazione tra simboli di Christoffel e tensore metrico

Mostriamo ora che la derivata covariante del tensore metrico è nulla. Infatti $DA^\mu = g_{\mu\nu}(DA^\nu)$ ma anche $A^\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ quindi $DA^\mu = Dg_{\mu\nu}A^\nu = D(g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}DA^\nu$ che è compatibile con la precedente solo se $D(g_{\mu\nu}) = 0$ c.v.d. Sviluppiamo la derivata covariante di un tensore, ricordando che un tensore si comporta come il prodotto di due vettori:

$$D_\sigma A^{\mu\nu} \leftrightarrow D_\sigma A^\mu B^\nu = (D_\sigma A^\mu)B^\nu + A^\mu(D_\sigma B^\nu)$$

dunque per un tensore covariante in cui la Γ ha un segno $-$ (vedi 2.13)::

$$D_\sigma A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\tau A_{\tau\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau A_{\mu\tau}$$

Se $A_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$, la derivata covariante è nulla. Quindi, permutando gli indici, possiamo scrivere

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\tau\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^\tau g_{\tau\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\tau g_{\nu\tau} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\tau\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\tau g_{\sigma\tau} \quad (2.16)$$

Facendo (2.14) - (2.15) + (2.16), otteniamo:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\nu\sigma}^\tau g_{\mu\tau}$$

Ed, infine:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2}g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.17)$$

Come ci si aspettava, le connessioni affini sono funzioni delle derivate prime del tensore metrico.

2.7 Curvatura e tensore di Riemann

Ricordiamo che, se $x^\mu = x^\mu(s)$ è l'equazione parametrica di una curva (s è la lunghezza dell'arco misurata a partire da un punto dato), allora $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ è il vettore tangente alla curva. Se la curva considerata è una geodetica, allora lungo tale curva si ha $Du^\mu = 0$. È fondamentale intuire che, in uno spazio curvo, il trasporto parallelo da un punto ad un altro porta a risultati differenti se viene effettuato lungo percorsi differenti. In particolare, trasportando il vettore parallelamente a sé stesso lungo un contorno chiuso, il vettore finale non coincide con quello iniziale. Per spiegare tale circostanza, consideriamo la figura 2.2. In essa è rappresentato uno spazio curvo bidimensionale, ovvero una qualsiasi superficie curva. Tale superficie è delimitata dalle 3 linee geodetiche. Trasportiamo parallelamente il vettore 1 lungo il contorno formato da queste curve. Dopo il trasporto lungo la curva AB, il vettore 1, mantenendo sempre costante l'angolo rispetto alla curva stessa, diventa 2 in B. Allo stesso modo trasportiamo il vettore 2 da B a C, trasformandosi in 3. Infine lo stesso da C

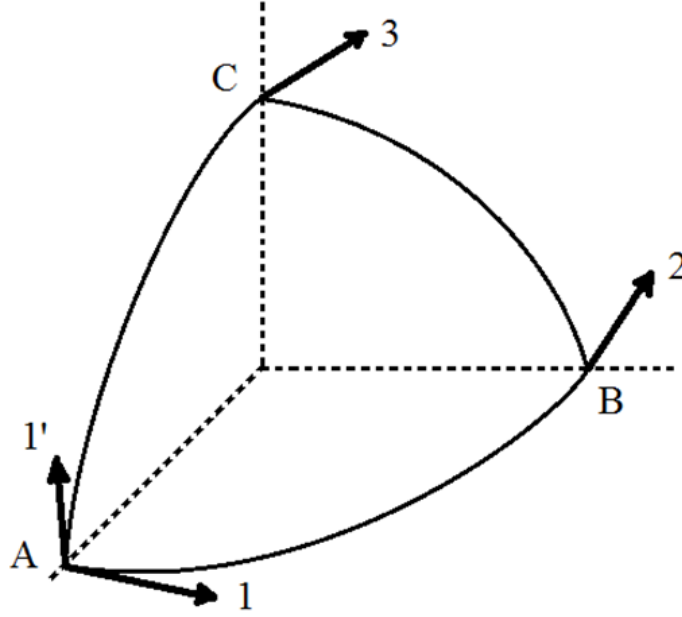


Figura 2.2: Trasporto parallelo lungo un percorso chiuso

ritornando al punto di partenza A, diventando il vettore $1'$, non coincidente col vettore 1. Stabiliamo, ora, la formula che determini la variazione di un vettore nel suo trasporto parallelo lungo una curva infinitesima chiusa. Tale variazione può esprimersi come:

$$\Delta A_\mu = \oint \delta A_\mu$$

dove, seguendo [Landau teoria dei campi] $DA_\mu = dA_\mu - \delta A_\mu \Rightarrow \delta A^\mu = (\partial_\nu - D_\nu)A_\mu dx^\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$ prendendolo lungo la linea chiusa formata dai tre segmenti.

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu \Rightarrow \Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu$$

Tenendo presente che la superficie delimitata dalla linea chiusa Δf è considerata una grandezza infinitesima, applicando il teorema di Stokes generalizzato, secondo cui (visto che la superficie racchiusa dalla curva $df^{\mu\nu}$ è antisimmetrica, come si può vedere percorrendola in senso inverso)

$$\oint A_\mu dx^\mu = \int \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} df^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) df^{\mu\nu} \quad (2.18)$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu &= \oint \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma dx^\nu = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A_\sigma)}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\lambda\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\lambda} A_\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma}{\partial x^\nu} A_\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} \right] \Delta f^{\lambda\nu} \end{aligned}$$

Per semplificare tale scrittura, si può fare un'approssimazione. In particolare, si può considerare che le componenti del vettore A_σ nei punti interni al contorno infinitesimo siano determinate unicamente dai loro valori sul contorno infinitesimo. Ciò vuol dire considerare solo termini del primo ordine (ipotesi di linearità), per cui vale la relazione:

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha A_\alpha$$

Sostituendo nelle relazioni precedenti, si ottiene

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\lambda} A_\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma}{\partial x^\nu} A_\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha A_\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha A_\alpha \right] \Delta f^{\lambda\nu} = \quad (2.19)$$

La quantità fra parentesi $-R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$ prende il nome di **Tensore di Riemann** o tensore di curvatura, perché, si può mostrare che in 3 dimensioni è proporzionale alla curvatura della superficie.

Se passiamo dal tensore misto $R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$ al tensore covariante $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} R_{\nu\rho\sigma}^\lambda$, è possibile scrivere un'espressione per quest'ultimo in funzione delle connessioni e delle loro espressioni in termini del tensore metrico:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma}) + g_{\xi\eta} (\Gamma_{\nu\rho}^\xi \Gamma_{\mu\sigma}^\eta - \Gamma_{\nu\sigma}^\xi \Gamma_{\mu\rho}^\eta) \quad (2.20)$$

Poniamoci in un sistema di riferimento localmente inerziale; lì le vale l'equazione geodetica 2.3 e l'accelerazione è nulla, il che implica che sono nulle le connessioni affini. Dunque la 2.20 diventa:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \quad (2.21)$$

2.7.1 Proprietà del tensore di Riemann

Evidentemente, è un tensore antisimmetrico per lo scambio di indici dispari:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = \quad (2.22)$$

$$= -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (2.23)$$

da cui si ricava la proprietà ciclica per lo scambio di tre posti:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0 \quad (2.24)$$

Dalla proprietà di antisimmetria rispetto allo scambio di indici attigui, deriva che la contrazione di indici attigui dà risultato nullo. Infatti

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\nu\mu\rho\sigma}) = 0$$

quindi ha senso contrarre indici alternati.

Infine, si possono dimostrare le identità di Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu} = 0 \quad (2.25)$$

Infatti, in un sistema localmente inerziale, derivando la 2.21, otteniamo:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho,\sigma} = \partial_\sigma R_{\lambda\mu\nu\rho} = (\partial_\sigma \partial_\nu \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho})$$

Lo schema degli indici è $R_{1234,5} = g[(14, 235) - (13, 245) + (23, 145) - (24, 135)]$ dunque, per i tre termini della 2.25:

$$\begin{aligned} [\lambda\mu\nu\rho, \sigma] &= (\lambda\rho, \mu\nu\sigma) - (\lambda\nu, \mu\rho\sigma) + (\mu\nu, \lambda\rho\sigma) - (\mu\rho, \lambda\nu\sigma) + \\ [\lambda\mu\sigma\nu, \rho] &= (\lambda\nu, \mu\sigma\rho) - (\lambda\sigma, \mu\nu\rho) + (\mu\sigma, \lambda\nu\rho) - (\mu\nu, \lambda\sigma\rho) + \\ [\lambda\mu\rho\sigma, \nu] &= (\lambda\sigma, \mu\rho\nu) - (\lambda\rho, \mu\sigma\nu) + (\mu\rho, \lambda\sigma\nu) - (\mu\sigma, \lambda\rho\nu) = 0 \end{aligned}$$

Per contrazione, possiamo costruire un tensore di rango 2 – il tensore di Ricci – ma solo contraendo gli indici pari o dispari, perché il tensore di Riemann è antisimmetrico per lo scambio di indici adiacenti:

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\rho\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \quad (2.26)$$

Con la definizione 2.20:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \quad (2.27)$$

simmetrico per lo scambio di indici. Lo scalare di Ricci corrispondente si ottiene effettuando una nuova contrazione.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

2.8 Il tensore Energia-impulso

2.8.1 Variazioni dell'azione ed equazioni di Eulero-Lagrange

L'azione del campo è definita dall'integrale sul 4-volume di una funzione $\mathcal{L}$, tale che

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^4x$$

La funzione $\mathcal{L}$ è la densità di Lagrangiana. Il principio di minima azione impone che la variazione di S sia nulla. Dunque, nell'ipotesi realistica in cui la variazione commuti con l'integrale:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \delta \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^4x = \\ &= \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) \delta \partial_\mu q d^4x \end{aligned}$$

Il secondo termine dell'integrando può essere scritto come:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \delta q \right) - \delta q \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right)$$

sostituendo:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) \right) \delta q + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \delta q \right) d^4x = 0$$

Il secondo termine dell'integrando, è la divergenza di un quadri-vettore, che, dopo l'applicazione del teorema di Gauss, svanisce nell'integrazione su tutto lo spazio. Il termine rimanente, ci fornisce le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (2.29)$$

2.8.2 Il tensore energia-impulso dal teorema di Noether

Consideriamo la variazione indotta da un cambiamento di coordinate: $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, dunque:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \partial_\mu q)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \frac{\partial \partial_\nu q}{\partial x_\mu} \right] \delta x_\mu \quad (2.30)$$

Sostituiamo nel primo termine la 2.29

$$\delta \mathcal{L} = \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right] \delta x_\mu = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \partial_\mu q \right) \delta x_\mu$$

d'altra parte

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu = (\delta^\mu_\nu \partial_\nu \mathcal{L}) \delta x_\mu$$

sottraendo membro a membro le ultime due equazioni:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \partial_\mu q - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \right) = 0 \quad (2.31)$$

Quindi c'è una quantità conservata

$$T^\nu_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu q} \partial_\mu q - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \quad (2.32)$$

che, vedremo, è il tensore energia-impulso. Infatti, consideriamo l'integrale sull'ipersuperficie a x^0 costante di T^ν_μ (quindi fissato uno degli indici a 0)

$$\int T^\nu_\mu dS^\mu$$

Dalla conservazione del tensore deriva che, separando la parte spaziale e temporale:

$$\partial_0 \int T^0_0 dV = \int \partial_m T^m_0 dV = \int T^m_0 dS_m \quad (2.33)$$

Ora,

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 q} \partial_0 q - \delta^0_0 \mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \mathcal{E}$$

Quindi, la 2.33 ci dice che la variazione dell'energia nel volume è pari al flusso di T^m_0 attraverso la superficie che racchiude il volume. Analogamente all'equazione di continuità $\partial_t q = -\partial_i J^i$, possiamo associare a q , T^0_0 e a $J \leftrightarrow T^i_0$ e dunque

$$P^i = \int T^i_0 dV \quad (2.34)$$

Le altre combinazioni, possono essere scritte, sempre a partire da $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, che può essere (anti-)simmetrizzata come

$$\partial_\rho (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}) \quad (2.35)$$

infatti: $\partial_\rho (x^\mu T^{\nu\rho}) = \delta_\rho^\mu T^{\nu\rho} + x^\mu \partial_\rho T^{\nu\rho}$, il secondo termine (e il IV) è 0 per la conservazione del tensore energia-impulso, il primo si annulla con il terzo. La 2.35, definisce un'altra quantità conservata, che è il momento generalizzato:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}) dS_\rho = \int (x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu) dV = \\ &= \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} x_\rho P_\sigma dV \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.9 Le equazioni del campo gravitazionale

Consideriamo una particella in moto non relativistico ($\frac{dx}{dt} \ll c \Rightarrow x^i \ll x^0$) in un campo debole e stazionario (i.e. $\partial_t x^i = 0$). Le equazioni geodetiche

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau}$$

si riducono a

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = -\Gamma_{00}^\mu \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2$$

Dall'espressione che definisce le $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ come funzione delle derivate del tensore metrico:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} \right)$$

troviamo che

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{0\tau}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left(2 \frac{\partial g_{\tau 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} \right)$$

e, vista la stazionarietà del campo, $\partial_0 g_{\tau 0} = 0$, dunque:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\tau} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau} \quad (2.37)$$

L'approssimazione di campo debole si ottiene ponendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$; $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Per trovare il duale di $h_{\mu\nu}$ ricordiamo che $g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} = \delta_\nu^\sigma$, e che gli indici di $h_{\mu\nu}$ si muovono con le $\eta_{\mu\nu}$ dunque: $(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}) = \delta_\nu^\sigma + O(h^2)$, sicché: $g^{\mu\sigma} = (\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma})$. In quest'approssimazione:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\tau} \quad (2.38)$$

e quindi l'equazione geodetica diventa:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\tau} \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \quad (2.39)$$

La geodetica può essere scomposta nella parte spaziale e temporale:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 x^0}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2} \partial_0 h_{00} \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \end{cases} \quad (2.40)$$

Assumendo che il campo sia stazionario, $\partial_0 h_{00} = 0$, quindi la seconda equazione è nulla (e può essere scritta come $v/c = 0$, che è una delle ipotesi). Nella prima possiamo assumere: $\frac{\partial x^0}{\partial \tau} = 1$ quindi

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (2.41)$$

Ricordando che per un potenziale Newtoniano Φ vale l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

e che $F = -\nabla U \Rightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = -\nabla \Phi$, assieme alla 2.41:

$$-\frac{1}{2} \nabla h_{00} = \frac{\partial^2 x^i}{c^2 \partial t^2} \Rightarrow h_{00} = 2 \frac{\Phi}{c^2}$$

e quindi

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

sicché:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

e, considerato che $T_{00} = \rho c^2$, assieme all'equazione di Poisson, troviamo:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (2.42)$$

Quindi, per le equazioni di campo ci si aspetta qualcosa del tipo

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Dobbiamo fare qualche ipotesi sul tensore $G_{\mu\nu}$:

1. Deve trasformarsi come un tensore
2. deve essere lineare nelle derivate seconde e nei prodotti di due derivate prime della metrica
3. deve essere simmetrico come $T_{\mu\nu}$
4. Deve conservare $T_{\mu\nu}$ *i.e.* $T_{\mu\nu;\nu} = 0$
5. Si deve ridurre a $G_{00} = \nabla^2 g_{00}$ in approssimazione di campo debole

Dobbiamo dunque costruire un tensore di rango 2, che legghi il tensore energia-impulso alla curvatura e la cui divergenza covariante sia nulla. Per fare ciò, abbiamo a disposizione due tensori: il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ e lo scalare di Ricci

moltiplicato per la metrica $g_{\mu\nu}R$. In generale potremo scrivere una combinazione lineare dei due:

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R$$

in cui le costanti possono essere determinate dalle 5 ipotesi di cui sopra. Appliciamo la conservazione dell'energia (ipotesi 4) $D_\nu G_{\mu\nu} = 0$ tenendo conto dell'identità di Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu} = 0 \quad (2.43)$$

Contraiamo la 2.43 sul primo e III indice del primo termine, ricordando le simmetrie del tensore di Riemann:

$$\begin{aligned} g^{\lambda\nu} (R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu}) &= \\ = g^{\lambda\nu} (R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} - R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu}) &= \\ = R_{\mu\rho;\sigma} - R_{\mu\sigma;\rho} + R_{\mu\rho\sigma;\nu}^\nu &= 0 \end{aligned}$$

contraendo anche gli altri due indici:

$$g^{\mu\rho} (R_{\mu\rho;\sigma} - R_{\mu\sigma;\rho} + R_{\mu\rho\sigma;\nu}^\nu) = R_{;\sigma} - R_{\sigma;\rho}^\rho - R_{\sigma;\nu}^\nu = 0$$

dove il segno - all'ultimo termine viene dall'aver scambiato ρ con σ per non contrarre indici attigui del tensore di Riemann (che fa 0). In definitiva, siccome $R_{\sigma}^\nu = g_{\mu\sigma} R^{\mu\nu}$ e $R_{;\sigma} = R_{;\nu} g_{\sigma}^\nu = g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} R_{;\sigma} = 0$,

$$R_{;\sigma} = 2R_{\sigma;\nu}^\nu \Leftrightarrow \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 \quad (2.44)$$

che ci dice che $c_2 = 1/2 c_1$ e dunque:

$$G^{\mu\nu} = c_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \quad (2.45)$$

Rimane da determinare la costante c_1 che possiamo determinare imponendo la condizione 5 in campo debole, ovvero quando $|T_{ij}| \ll |T_{00}| \Rightarrow |G_{ij}| \ll |G_{00}|$. Se poniamo quindi $|G_{ij}| \approx 0$, ciò implica $R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R$. Siccome

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = g_{00} R^{00} + g_{ij} R^{ij} \quad (2.46)$$

essendo in regime di campo debole $g_{ij} = \eta_{ij} \Rightarrow R_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ij} R$. D'altra parte dalla 2.46:

$$R = \eta_{00} R^{00} + \eta_{ij} \left(\frac{1}{2} \eta^{ij} R \right)$$

ora: $\eta_{ij} \eta^{ij} = 3$, quindi: $R(1 - 3/2) = R^{00}$ ed in fine:

$$R = -2R^{00} \quad (2.47)$$

e l'equazione di campo per la componente 00 diventa:

$$G^{00} = 2c_1 R^{00} \quad (2.48)$$

Cominciamo con lo scrivere $R_{00} = g^{\mu\nu} R_{\mu 0 \nu 0}$ e riscriviamo la 2.21:

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = \partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu}$$

In un campo stazionario, in cui le derivate temporali si annullano, ponendo $\mu = \sigma = 0$, rimane:

$$R_{\lambda 0 \nu 0} = -\partial_\lambda \partial_\nu g_{00}$$

e quindi:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu 0 \nu 0} = R_{00} = -\partial^\nu \partial_\nu g_{00}$$

o, anche, al primo ordine:

$$R_{00} = \left(\partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda \right)$$

di nuovo, siccome $\partial_0 = 0$ nel caso stazionario, rimane:

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda$$

Nel limite di campo debole:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\tau}$$

quindi:

$$R_{00} = -\partial_\lambda \frac{1}{2} \eta^{\lambda\tau} \partial_\tau g_{00} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \partial^\lambda g_{00}$$

espandendo la quadridivergenza: $\partial_\lambda \partial^\lambda = \partial_0^2 - \nabla^2$, risulta:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

Quindi, dalla 2.45 per $\mu = \nu = 0$ si ha:

$$G^{00} = c_1 \left(R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} R \right) = 2c_1 R^{00} = 2c_1 \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

avendo tenuto conto della 2.48. Quindi perché la condizione 5 sia soddisfatta deve essere $c_1 = 1$ ed in definitiva, l'equazione del campo gravitazionale (equazioni di Einstein) è:

$$\boxed{\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (2.49)$$

La forma alternativa, può essere scritta moltiplicando a sinistra per $g^{\mu\nu}$:

$$R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

Ma $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$ dunque: $-R = \frac{8\pi G}{c^4} T$ e, sostituendo nelle equazioni di Einstein,

$$\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = R_{\mu\nu} \quad (2.50)$$

Le equazioni di Einstein NON sono lineari, quindi non vale il principio di sovrapposizione per i campi gravitazionali, che può essere invocato solo per campi deboli in una teoria linearizzata. Nel vuoto $T_{\mu\nu} = 0$ quindi $R_{\mu\nu} = 0$. Questo non vuol dire in alcun modo che lo spazio-tempo nel vuoto sia piatto, perché sia piatto c'è bisogno della condizione più forte: $R_{\mu\nu\rho}^\lambda = 0$.

2.10 Equazioni linearizzate

Consideriamo il caso in cui il tensore metrico differisca poco dal tensore piatto:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Il tensore metrico è invariante per trasformazioni generiche del tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ e la sua trasformazione è

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}$$

Se specializziamo la trasformazione in $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, i.e. $x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x)$, allora:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \xi^\rho)(\delta_\nu^\sigma - \partial_\nu \xi^\sigma) g_{\rho\sigma} = \\ &= (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\sigma \partial_\mu \xi^\rho + \delta_\mu^\rho \partial_\nu \xi^\sigma)(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = (\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Quindi,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) \quad (2.52)$$

Possiamo calcolare il tensore di Ricci al primo ordine in h date le relazioni:

$$R_{\mu\nu\lambda}^\sigma = (\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma) + (\Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha)$$

$$R_{\mu\rho} = R_{\mu\rho\sigma}^\sigma$$

e la 2.17

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)$$

che al primo ordine diventa:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} \eta^{\mu\tau} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)$$

È evidente che i termini prodotti delle Γ , sono all'ordine $O(h^2)$, quindi rimane solo:

$$R_{\mu\nu} = (\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \quad (2.53)$$

Sviluppiamo le derivate:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \partial_\lambda \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda - \square h_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

similmente: $\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\lambda})$

$$\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda + \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda - \partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\rho).$$

e, sostituendo: il tensore di Ricci al primo ordine è

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda + \partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h] \quad (2.54)$$

Possiamo usare la libertà di scegliere un sistema di coordinate per semplificare l'ultima espressione. La scelta più conveniente, è la cosiddetta gauge di Lorentz che realizza la condizione:

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (2.55)$$

che è l'analogo della condizione di Lorentz per il potenziale vettore nel campo elettromagnetico ($\partial_\mu A^\mu = 0$) La 2.55, al primo ordine diventa:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\rho\nu} - \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu})\eta^{\lambda\rho} \right] = \\ = \frac{1}{2}(\partial^\nu h_\nu^\lambda + \partial^\mu h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_\mu^\mu) \end{aligned}$$

I primi due termini sono uguali, dunque, la condizione di Lorentz è equivalente all'espressione:

$$\partial^\mu h_\mu^\lambda - \frac{1}{2}\partial^\lambda h_\mu^\mu = \partial^\mu \left(h_\mu^\lambda - \frac{1}{2}\eta_\mu^\lambda h \right) = 0 \quad (2.56)$$

che annulla i termini oltre il d'Alambertiano nella 2.54. Dunque, la 2.50, diventa:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \bar{T}_{\mu\nu} \quad (2.57)$$

dove $\bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$ e $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h$ è la perturbazione alla metrica che realizza la condizione di Lorentz. L'eq 2.57, è l'analogo della ?? per il campo elettromagnetico e si può risolvere con la tecnica della funzione di Green (cap. 9); il risultato è un potenziale ritardato:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\bar{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x \quad (2.58)$$

La conservazione dell'energia, ovvero del tensore energia-impulso, $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ implica $\partial_\mu \bar{T}_\nu^\mu = \frac{1}{2}\partial_\nu \bar{T}$, conseguentemente, per una sorgente contenuta in un volume finito, l'integrale 2.58 soddisfa le condizioni armoniche di Lorentz. Alla 2.58, si può aggiungere una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

che rappresenta la propagazione del campo prodotto dalla sorgente nello spazio con velocità pari a quella della luce.

2.10.1 Onde gravitazionali - approssimazione di onda piana

Se consideriamo la trasformata di Fourier di $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu}(x) = \int A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} dx$$

in cui $A_{\mu\nu}$ è un tensore di polarizzazione simmetrico; l'equazione delle onde diventa:

$$\eta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\nu A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} = -\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$$

che ci dice che $k_\mu k^\mu = 0$ (che è la nota relazione di dispersione $\omega = ck$).

La condizione di Lorentz $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$, si traduce in:

$$k_\alpha \delta_\mu^\alpha h^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow k_\mu A^{\mu\nu} = 0$$

Ci dice che il vettore numero d'onda è ortogonale al piano di polarizzazione (trasverso) corrisponde a 4 condizioni (quindi, il numero di paramtri indipendenti, da 10 passa a 6). Per un'onda progressiva che si propaga lungo x, $h_\mu^\nu(t - x/c)$. Per esteso possiamo scrivere:

$$\partial_\mu h_\nu^\mu = \partial_0 h_0^\nu + \partial_x h_\nu^x = 0$$

, ma per un potenziale ritardato $\partial_x/c = -\partial_t$, quindi: $\partial_t(\bar{h}_\nu^t - \bar{h}_\nu^x) = 0$, che può essere integrata e si possono porre a 0 le costanti di integrazione.

$$\begin{aligned} \bar{h}_t^t &= \bar{h}_t^x & \bar{h}_x^t &= h_x^x \\ \bar{h}_y^t &= \bar{h}_y^x & \bar{h}_z^t &= \bar{h}_z^x \end{aligned} \quad (2.59)$$

Possiamo ancora sfruttare la possibilità di cambiare il riferimento: $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ purché $\eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu x'^\lambda = \square x^\lambda = 0$ per imporre un'altra condizione. Sfruttiamo le 4 ξ^μ per porre: $h_x^t = h_y^t = h_z^t = \bar{h}_y^y + \bar{h}_z^z = 0$ che, insieme alle 2.59 danno:

$$\bar{h}_x^t = h_x^x = 0 \quad \bar{h}_t^t = \bar{h}_t^x = \bar{h}_x^T = 0$$

ed infine: $h_t^t + h_x^x + h_y^y + h_z^z = 0$. Queste condizioni implicano che in questa gauge (Traceless-Transverse - TT) $\bar{h}_\mu^\mu = \eta_\mu^\mu (h_\mu^\mu - 1/2 \eta_\mu^\mu h) = h - 4/2 h = -h$ Quindi $\bar{h}_\nu^\mu = h_\nu^\mu$ nella gauge TT.

Alla fine, gli unici due parametri che rimangono liberi sono $\bar{h}_y^y$ e $\bar{h}_z^z$ che, con la condizione di traccia nulla, forniscono l'espressione di

$$\bar{h}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_y^y & h_z^z \\ 0 & 0 & h_z^z & -h_y^y \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

2.10.2 Effetto delle onde gravitazionali

Consideriamo un onda incidente su un anello circolare di masse nel piano yz (Fig.2.3):

$$\begin{cases} h_{yy} = -h_{zz} = A_+ e^{i\omega(t-x/c)} \\ h_{yz} = -h_{zy} = A_\times e^{i\omega(t-x/c)} \end{cases} \quad (2.61)$$

la distanza fra due punti posti a $y=0$ e $y=\ell$ sull'asse y è:

$$\ell' = \int_0^\ell |g_{\mu\nu}|^{1/2} dy = \int_0^\ell |1 + h_{yy}|^{1/2} dy \sim \ell + 1/2 h_{yy} \ell$$

cioé $\Delta\ell/\ell = h_{yy}/2$ o $\ell' = \ell(1 + h_{yy}/2)$

Se consideriamo le particelle sugli assi y e z, e $A_\times = 0$ $A_+ \in \mathbb{R}$, then, if at $t=0$ $\omega(t - x/c) = \pi/2 \Rightarrow h_{yy} = 0$, dopo un tempo $t>0$, con l'aiuto della 2.60:

$$\begin{cases} y(t) = y(0)(1 + \frac{1}{2} A_+ e^{i\omega(t-x/c)}) \\ z(T) = z(0)(1 - \frac{1}{2} A_+ e^{i\omega(t-x/c)}) \end{cases}$$

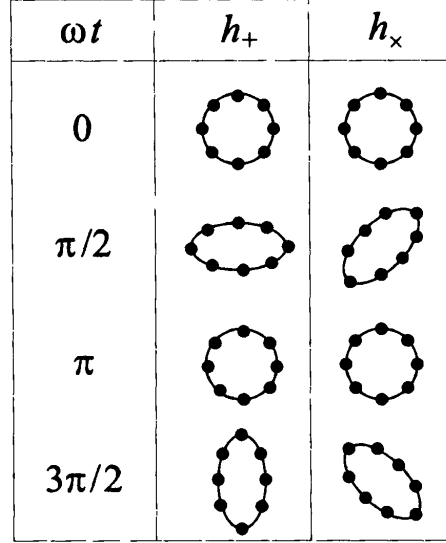


Figura 2.3: Effetto di un'onda gravitazionale trasversa su un anello di particelle poste nel piano ortogonale alla direzione di propagazione

quindi l'anello si espande lungo y e si contrae lungo z .

Nel caso in cui la polarizzazione è $A_+ = 0$; $A_\times \neq 0$:

$$\begin{cases} y(t) = y(0) + 1/2 h_{yz} z(0) = y(0) + 1/2 A_\times e^{i\omega(t-x/c)} z(0) \\ z(t) = y(0) - 1/2 h_{yz} z(0) \end{cases}$$

cioè, quando l'esponente è $\pi/2$:

$$\begin{cases} y(T/4) = y(0) + \frac{1}{2} A_\times z(0) \\ z(T/4) = y(0) - \frac{1}{2} A_\times z(0) \end{cases}$$

che è equivalente al caso precedente ruotato di $\pi/4$.

2.11 Cenni sulla produzione di onde gravitazionali

Partiamo dall'equazione di campo linearizzata:

$$(\partial_\mu \partial^\mu) h^{\nu\sigma} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\nu\sigma} \quad (2.62)$$

e la conservazione dell'energia-impulso:

$$\partial_\nu T^{\nu\sigma} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{0\sigma} + \partial_i T^{\sigma i} = 0$$

In primis,

$$\int \partial_0 T^{0\nu} d^3x = - \int \partial_i T^{i\nu} d^3x = \int_S T^{i\nu} dS_i$$

L'integrale sulla superficie va a 0 e quindi:

$$\partial_0 \int T^{0\nu} d^3x = 0 \Rightarrow \int T^{0\nu} d^3x = \text{const.} \quad (2.63)$$

Che rappresenta la conservazione del 4-impulso: $\dot{P}^\nu = 0$ e corrisponde alla conservazione della massa/energia (componente 0) e della quantità di moto. Poiché ci interessa solo la variazione temporale, possiamo porre la costante a 0 e ottenere:

$$\int T^{0\nu} d^3x = 0$$

d'altra parte, per la 2.58::

$$\bar{h}^{0\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \bar{T}^{0\nu} d^3x \quad (2.64)$$

quindi:

$$\bar{h}^{0\nu} = 0; \quad (2.65)$$

Ora prendiamo la parte spaziale della legge di conservazione, moltiplicata per x^k

$$\partial_t \int T^{0j} x^k d^3x = - \int \partial_i T^{ij} x^k d^3x$$

Riscriviamo il II membro come:

$$- \left(\int \partial_i (T^{ij} x^k) d^3x - \int T^{ij} \partial_i x^k d^3x \right)$$

Il primo addendo va a 0 nell'integrazione, quindi:

$$\partial_t \int T^{0j} x^k d^3x = - \int T^{ij} \partial_i x^k d^3x$$

Ovvero, per la componente 0:

$$\dot{d}^k = \int T^{0k} d^3x = 0 \quad (2.66)$$

dove

$$d^k = \int T^{00} x^k d^3x$$

è il momento di dipolo. Prendendo la componente 0 della conservazione di T, moltiplicata per $x^j x^k$:

$$\frac{1}{c} \partial_t \int T^{00} x^j x^k d^3x = - \int \partial_i T^{i0} x^j x^k d^3x = - \left[\int \partial_i (T^{i0} x^j x^k) d^3x - \int T^{i0} \partial_i (x^j x^k) d^3x \right]$$

Ancora, il termine di divergenza svanisce e rimane:

$$\int T^{i0} \frac{1}{2} (\delta_i^j x^k + \delta_i^k x^j) d^3x = \int T^{j0} x^k d^3x$$

dove si è simmetrizzato sulla derivata di $x^j x^k$. Infine, derivando ancora ambo i membri rispetto al tempo:

$$\frac{1}{c} \partial_t \partial_t \int T^{00} x^j x^k d^3x = 2 \partial_t \int T^{0j} x^k d^3x = 2 \int T^{kj} d^3x \quad (2.67)$$

Quindi, definendo il momento di quadrupolo:

$$q^{jk} = \frac{1}{c} \int T^{00} x^j x^k d^3x \quad (2.68)$$

possiamo riscrivere dall'equazione 2.67

$$\int T^{jk} d^3x = \frac{1}{2} \ddot{q}^{jk}$$

E l'equazione d'onda diventa:

$$\square h^{\tau\sigma} = \frac{4\pi G}{c^4} \ddot{q}^{\tau\sigma} \quad (2.69)$$

La soluzione è la stessa trovata per le onde elettromagnetiche con le funzioni di Green:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(t - (x - x')/c)}{|x - x'|} d^3x' \quad (2.70)$$

Se guardiamo la radiazione da lontano rispetto alle dimensioni del radiatore ($|x - x'| \ll x$), allora:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4 x} \int T^{\mu\nu}(t - x/c) d^3x'$$

e, quindi per la parte spaziale:

$$h^{ij}(x, t) = \frac{2G}{c^4 x} \ddot{q}^{ij}$$

Dunque, il dipolo non entra nella produzione di onde gravitazionali, che, invece sono causate dall'accelerazione del quadrupolo di massa, con un fattore di accoppiamento che vale:

$$\frac{2G}{c^4} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}}{(3 \cdot 10^8)^4} = 1.64 \cdot 10^{-44}$$

Dunque, la produzione è altamente inefficiente per oggetti poco massicci e/o poco accelerati.