

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ $\frac{a+b}{2}$



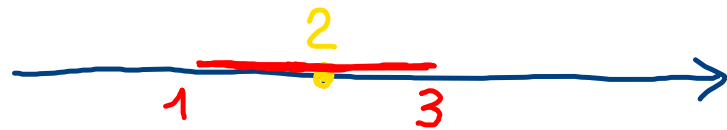
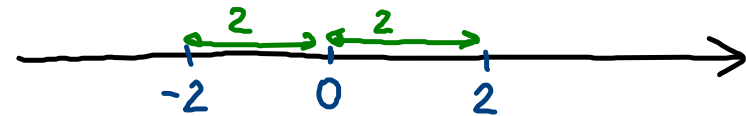
Il punto centrale dell'intervallo $]a, b[$ e' la media aritmetica $\frac{a+b}{2}$

ESEMPI

Il punto centrale dell'intervallo $] -2, 2[$ e' 0

Il punto centrale dell'intervallo $] -5, 5[$ e' 0

Il punto centrale dell'intervallo $] 1, 3[$ e' 2



Utilizzando la definizione di intorno diremo che

$] -2, 2[$ e' un intorno di 0

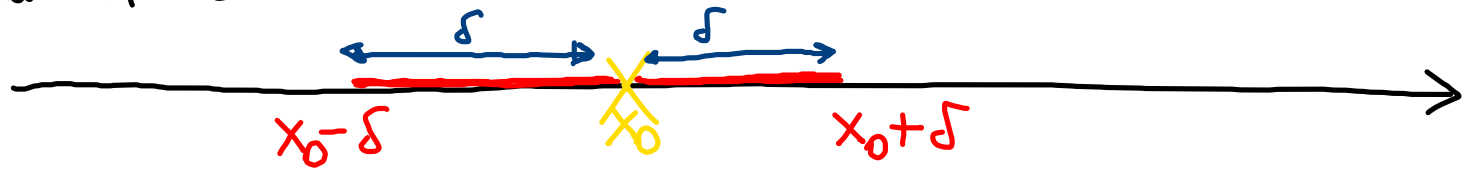
$] -5, 5[$ e' un intorno di 0

$] 1, 3[$ e' un intorno di 2

$$] 1, 3[=] 2-1, 2+1[$$

DEF. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Ogni intervallo aperto del tipo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si dice "intorno di x_0 ".

DEF. "informale/colloquiale/non ufficiale": Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Ogni insieme del tipo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} =]x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta[$ verrà informalmente chiamato "intorno bucato di x_0 ".



ESEMPLI

$$]1, 3[\setminus \{2\} =]1, 2[\cup]2, 3[$$

$$]-1, 5[\setminus \{2\} =]-1, 2[\cup]2, 5[=]2-3, 2[\cup]2, 2+3[$$

Sono "intorni bucati di 2".

Domande:

Esiste un "intorno bucato di 2" al quale non appartiene 0?

SI, per esempio $]1,3[\setminus \{2\}$

Esiste un "intorno bucato di 2" al quale appartiene 0?

SI, per esempio $] -1,5[\setminus \{2\}$

Esiste un "intorno bucato di 2" che interseca l'intervallo $[0,2[$?



SI, per esempio $]0,4[\setminus \{2\}$ interseca $[0,2[$

SI, per esempio $] -1,5[\setminus \{2\}$ interseca $[0,2[$

SI, per esempio $]1,3[\setminus \{2\}$ interseca $[0,2[$

ANZI OGNI intorno bucato di 2 interseca $[0,2[$! Diremo che 2 è punto di accumulazione per $[0,2[$

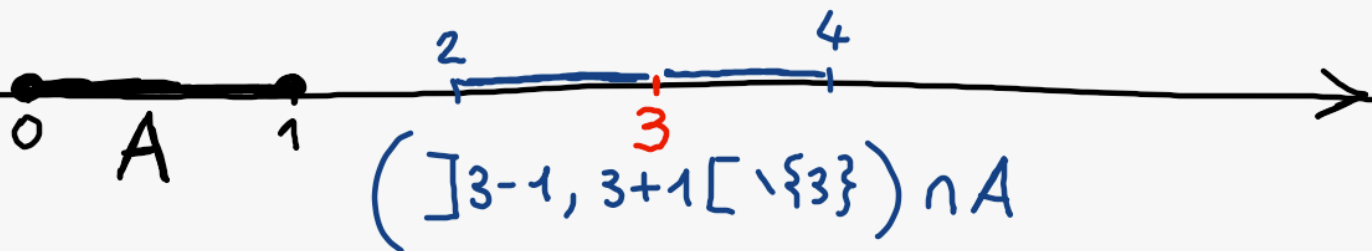
Definizione 3.1 $\Leftrightarrow$ Punto di accumulazione

Sia A un sottoinsieme dei numeri reali. Diremo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di A se **ogni** intorno di x_0 contiene punti di A distinti da x_0 stesso, cioè se per ogni $\delta > 0$ si ha $[(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.

DEF. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice "di accumulazione per A " se

$$\forall \delta > 0 \quad \left(\underbrace{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}}_{\text{"intorno di } x_0"} \right) \cap A \neq \emptyset$$

$$A = [0, 1]$$



Definizione 3.1 $\Leftrightarrow$ Punto di accumulazione

Sia A un sottoinsieme dei numeri reali. Diremo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di A se **ogni** intorno di x_0 contiene punti di A distinti da x_0 stesso, cioè se per ogni $\delta > 0$ si ha $[(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.

DEF. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice "di accumulazione per A " se

$$\forall \delta > 0 \quad \left(\underbrace{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}}_{\text{"intorno di } x_0"} \right) \cap A \neq \emptyset$$

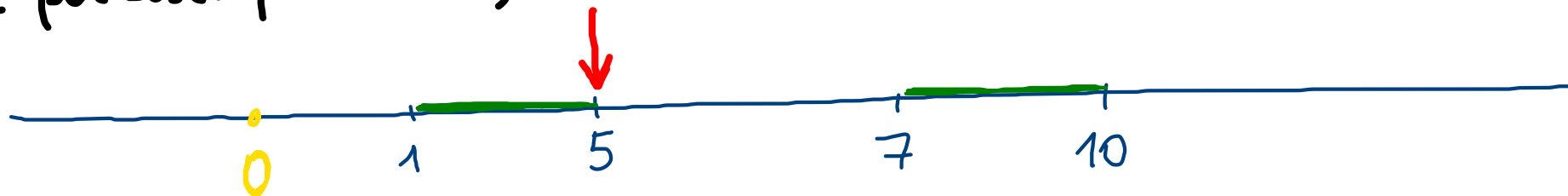
$$A = \{3, 5\}$$

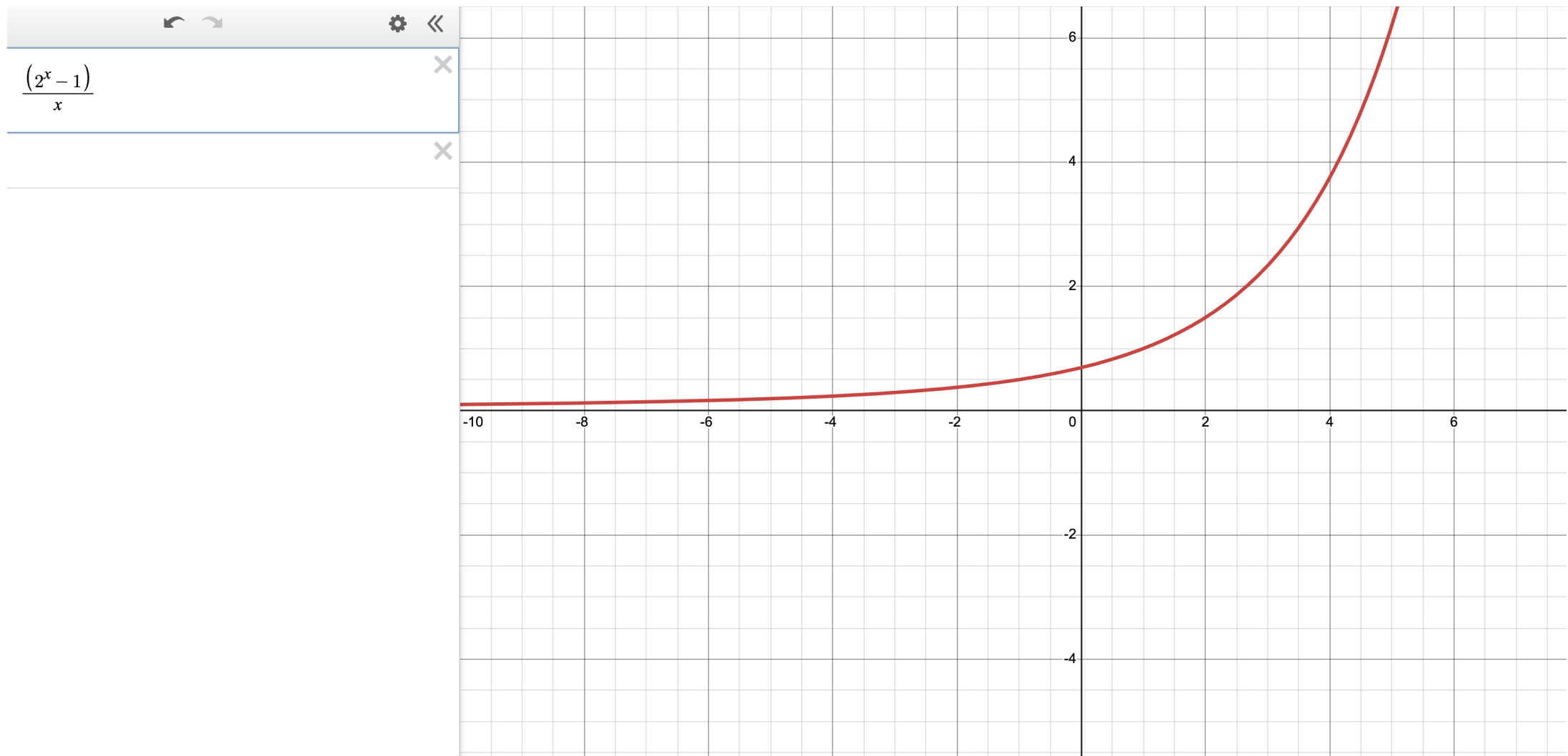


Sia $A =]1,5[\cup]7,10[$

Domanda: $x_0 = 5$ e' di accumulazione per A ?

Risposta: Si: infatti $\forall \delta > 0 \ (]5-\delta, 5+\delta[\setminus \{5\}) \cap (]1,5[\cup]7,10[) \neq \emptyset$
Se per esempio $\delta = 2$, risulta $4 \in (]3,7[\setminus \{5\}) \cap (]1,5[\cup]7,10[)$





Definizione 3.2 $\Leftrightarrow$ Limite

Sia data $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A . Diremo che il numero reale l è il limite di f per x che tende a x_0 , e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\forall x \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}] \cap A. \quad (3.2)$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta, x \in A$$

$$\forall x : 0 \neq |x - x_0| < \delta, x \in A$$

$$\forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap A$$

TEOREMA ("Proprietà di continuità delle funzioni elementari")

f funzione elementare
(quindi f è affine, oppure
 f è il valore assoluto, oppure
 f è una potenza, esponenziale,
logaritmo, trigonometrica)

$x_0 \in \text{Dom}(f)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$$

ecc.