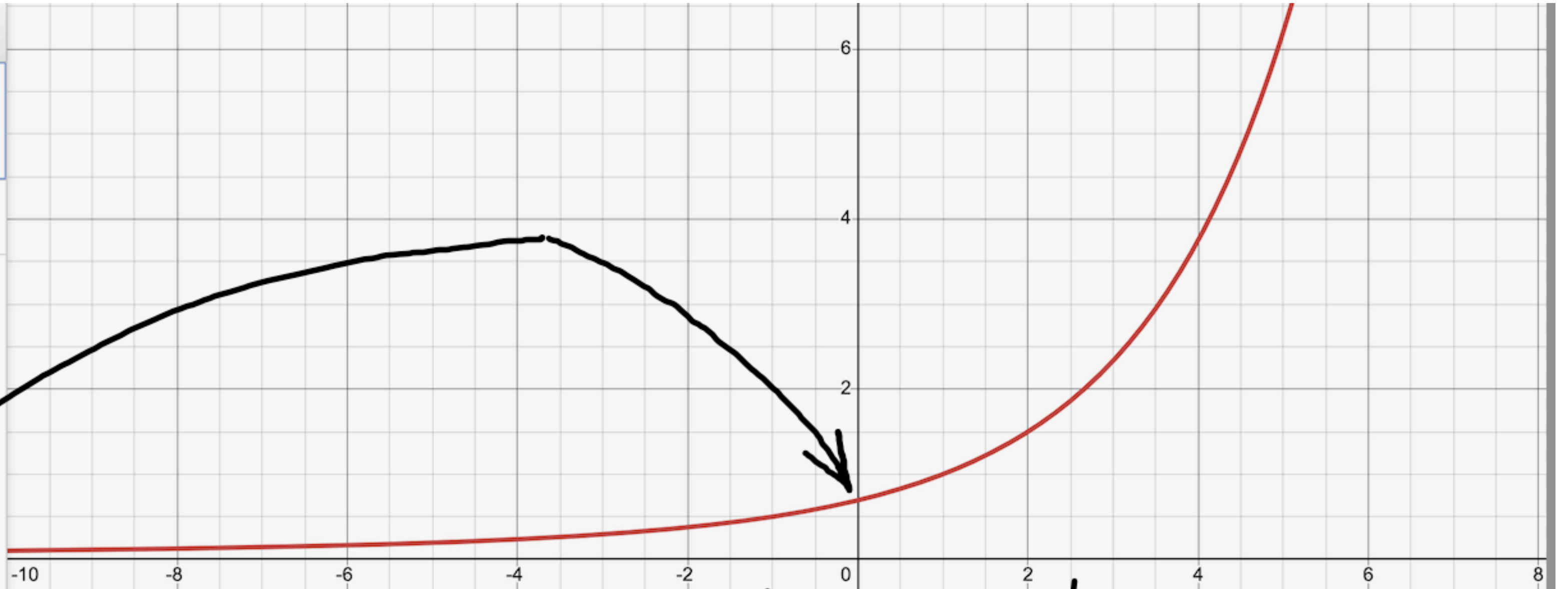
$\frac{(2^x - 1)}{x}$

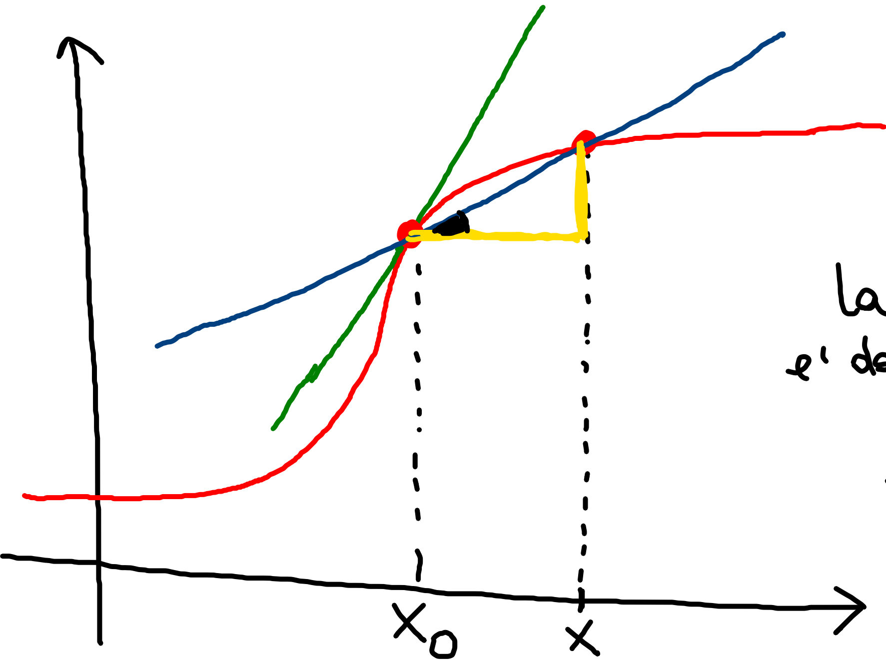
$$f(x) = \frac{2^x - 1}{x}$$



L'ordinata del punto che manca non puo' essere ottenuta ponendo $x=0$ nella espressione di $f(x)$, ma si puo' ottenere attraverso un procedimento di approssimazione che si formalizza con la definizione di limite.

$$\text{L'ordinata del punto che manca} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \log 2$$

Le funzioni che hanno un grafico "senza un punto" sono considerate frequentemente in Analisi Matematica e nelle applicazioni. Per esempio: come misurare la ripidità del grafico di una funzione in un punto?



$$\mathrm{tg}(\blacktriangleleft) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La "ripidità del grafico nel punto di ascisse x_0" è data dal

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

per definizione

p103.pdf – Pagina 103 di 225

Definizione 4.1 ⇝ Derivata

Sia data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e sia $x_0 \in I$. Diremo che f è **derivabile nel punto** x_0 se **esiste finito** il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.1}$$

In tal caso, il valore di questo limite verrà indicato con $f'(x_0)$ e si chiamerà **derivata** di f nel punto x_0.

DEF. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
$f : I \to \mathbb{R}$ si dice "funzione derivabile" se f e' derivabile in ogni punto appartenente ad I.

Se f e' una funzione derivabile, e' possibile considerare una nuova funzione

$$f' : x \in I \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$$

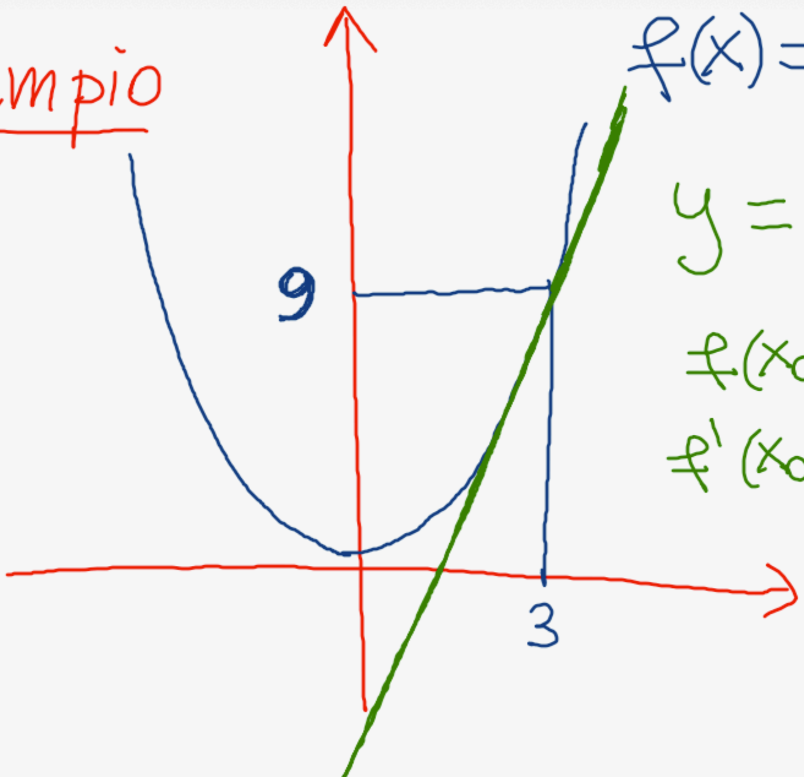
($f'(x)$ e' il limite del rapporto incrementale relativo al punto x)

La funzione f' si dice "derivata di f" oppure "derivata prima di f".

Retta tangente al grafico

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \ . \tag{4.3}$$

Esempio



$f(x) = x^2$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad x_0 = 3$

$f(x_0) = 3^2 = 9$

$f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 3 = 6$

$y = 9 + 6\,(x - 3)$