**Introduzione alle equazioni differenziali**

Con il termine **equazione** in Matematica si intende un problema posto attraverso un’uguaglianza in cui compare un’incognita (=qualcosa che non si conosce), che chiamiamo ad esempio *x*, che può essere un numero, un punto (di una retta, di un piano, dello spazio), un insieme, un vettore, una funzione, ecc. Il problema è quello di determinare, se esistono, tutti i possibili valori dell’incognita *x* che rendono vera l’uguaglianza assegnata. L’insieme dei possibili valori dell’incognita, nel quale cercare i valori di *x* che rendono vera l’uguaglianza, è sempre un dato del problema (se non è detto esplicitamente, è sottinteso!). Nelle “equazioni algebriche” l’incognita *x* è un numero e l’uguaglianza che esprime il problema può essere trasformata in $f(x)=0$ con $f(x)$ polinomio. Nelle “equazioni differenziali” l’incognita è una funzione e nell’uguaglianza che esprime il problema compare una derivata (oppure compaiono più derivate) della funzione incognita. L’insieme costituito dalle funzioni che verificano l’uguaglianza si dice integrale generale dell’equazione differenziale, ed un suo elemento si dice integrale dell’equazione.

<u>Esempio 1</u> L'integrale indefinito $\int f(x)\,dx$ ( = l'insieme delle primitive di $f(x)$ ) rappresenta l'integrale generale dell'equazione

"derivata della funzione incognita" $= f(x)$

Come si denota la funzione incognita? <u>Non</u> $x$ (che spesso denota un numero reale), <u>non</u> $f$ (che e' una funzione assegnata), ma $y(x)$.

Dunque il problema della ricerca delle primitive di una funzione $f(x)$ si scrive

$$y'(x) = f(x)$$

<u>Esempio 2</u> Quali sono tutte le funzioni che coincidono con la propria derivata?

Il problema si scrive

$$y'(x) = y(x)$$

Una particolare soluzione e' $y(x) = e^x$. <u>Ce ne sono altre ?</u>

I due esempi sono casi particolari di equazioni del tipo

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni assegnate: nel caso dell'esempio 1 e' $a(x) = 0$, $b(x) = f(x)$; nel caso dell'esempio 2 e' $a(x) = 1$, $b(x) = 0$.

$$y' = a(x)y + b(x) \quad \text{in } I \subseteq \mathbb{R}$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$ (negli esercizi si omette il "+c")

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx$$ (negli esercizi si omette il "+c")

$$\boxed{\text{Integrale generale: } y(x) = e^{A(x)}\left[c + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx\right]}$$

$$D\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2}\cdot 2x$$

$$y' - 2xy = 0$$

$$y' = \underbrace{2x}_{a(x)}\,y \underbrace{+\,0}_{b(x)}$$

$$\int 2x\,dx = x^2$$

$$\int e^{-A(x)}\cdot 0\,dx = 0$$

Integrale generale:

$$y = e^{x^2}\left[c + 0\right] = c\,e^{x^2}$$

$$y' - y = \underline{e^{2x}}$$

$$y' = y + e^{2x}$$

$$a(x) = 1 \qquad b(x) = e^{2x}$$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)}\left[c + \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx\right]}$$

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int dx = x$$

$$\int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx = \int e^{-x} \cdot e^{2x}\, dx = \int e^{x}\, dx = e^{x}$$

Integrale generale: $y(x) = e^{x}\left[c + e^{x}\right]$