

prietà del prodotto scalare ci permettono di dimostrare facilmente la validità della disuguaglianza triangolare per la norma. Infatti si ha

$$\begin{aligned}\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{v} + \vec{u} \rangle = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ &\leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| = (\|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|)^2,\end{aligned}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{v} + \vec{u} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{v} + \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{u} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle =\end{aligned}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$$