RETTE DEL PIANO

(1) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$. L'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che verificano

$$ax + by + c = 0$$

descrive una retta del piano e, viceversa, ogni retta del piano puo' essere descritta attraverso costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $(a,b) \neq (0,0)$. Quando una retta e' descritta in questo modo si scrive

$$r: \quad ax + by + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0)$$

e si dice che la retta r e' rappresentata in forma cartesiana.

(2) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ le rette

$$r: ax + by + c = 0$$

descrivono un fascio di rette parallele; infatti i sistemi $\begin{cases} ax + by = -c_1 \\ ax + by = -c_2 \end{cases}$ $c_1 \neq c_2$ non ammettono soluzioni.

③ Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Se $c = 0$ la retta

$$r: \quad ax + by = 0$$

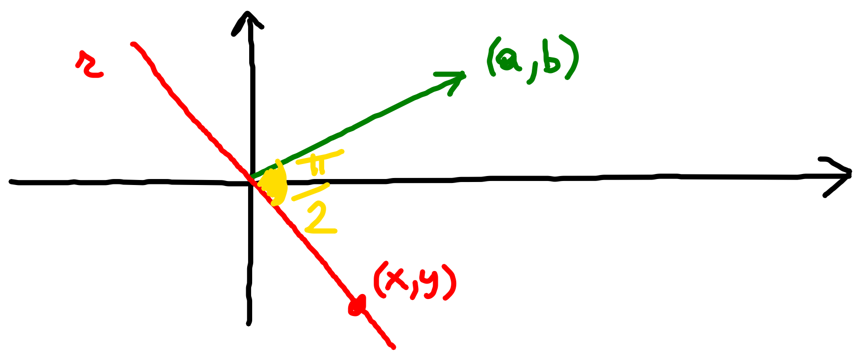
"passa per l'origine" (cioe' l'origine $(0,0)$ appartiene ad r, cioe' sostituendo $x=0$ e $y=0$ in $ax+by=0$, l'uguaglianza e' verificata).

Notiamo che

$$ax + by = 0 \iff (a,b)\cdot(x,y) = 0$$

(il prodotto scalare tra (a,b) e (x,y) e' nullo)

quindi il vettore (a,b) (che e' non nullo) e' ortogonale al vettore (x,y) per ogni punto $(x,y) \in r$:



e ogni vettore (x,y) ortogonale ad (a,b) e' rappresentato da un punto appartenente ad r. Quindi $(b,-a) \in r$ (perche' $(a,b)\cdot(b,-a)=0$) ed anche $t(b,-a) \in r$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

TRUCCO per costruire un vettore ortogonale ad un vettore $\vec{v}=(a,b)$ assegnato: e' sufficiente scambiare le due componenti e cambiare segno ad una delle due componenti: per esempio

$(5,8)$ e $(8,-5)$ sono vettori ortogonali

$(-2,1)$ e $(1,2)$ sono vettori ortogonali

ESEMPI

Un vettore ortogonale a $r: 5x-7y+13=0$ e' $(5,-7)$

Un vettore parallelo a $r: 5x-7y+13=0$ e' $(7,5)$

(ma anche $(14,10)$ e in generale $t(7,5)$ per ogni $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$)

Se r e' una retta parallela a $(7,5)$, r e' del tipo

$$r: \ 5x - 7y + c = 0 \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Se r e' una retta perpendicolare a $(5,-7)$, r e' del tipo

$$r: \ 5x - 7y + c = 0 \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

In generale: sia $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.
Se una retta r e' parallela al vettore (α,β) (scriveremo $r \,//\, (\alpha,\beta)$),
allora un'equazione cartesiana di r e' del tipo

$$r: \ \beta x - \alpha y + c = 0 \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Le coppie del tipo $(\alpha t, \beta t)$, $t \neq 0$, si dicono numeri direttori della retta r e
il vettore (α,β) si dice vettore direzione della retta r.

Se una retta r e' ortogonale al vettore (α, β) (scriveremo $r \perp (\alpha, \beta)$)
allora un'equazione cartesiana di r e' del tipo

$$r: \ \alpha x + \beta y + c = 0 \ , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Condizione di parallelismo tra due rette scritte in forma cartesiana:

$$r: \ ax + by + c = 0$$
$$r': \ a'x + b'y + c' = 0$$

sono parallele se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

Condizione di perpendicolarita' tra due rette scritte in forma cartesiana:

$$r: \ ax + by + c = 0$$
$$r': \ a'x + b'y + c' = 0$$

sono perpendicolari se e solo se $(a, b) \cdot (a', b') = 0$

(4) Se $a=0$ (e quindi $b \neq 0$), la retta $r: by+c=0$ e' costituita dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y = -\frac{c}{b}$ e quindi r e' una retta parallela all'asse x. Viceversa, ogni retta parallela all'asse x si puo' descrivere in forma cartesiana con il coefficiente di x uguale a 0.

Se $b=0$ (e quindi $a \neq 0$), la retta $r: ax+c=0$ e' costituita dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x = -\frac{c}{a}$ e quindi r e' una retta parallela all'asse y. Viceversa, ogni retta parallela all'asse y si puo' descrivere in forma cartesiana con il coefficiente di y uguale a 0.

(5) Se $b \neq 0$, la retta $r: ax+by+c=0$ <u>non</u> e' parallela all'asse y e puo' essere descritta dall'equazione

$$r: \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Posto $m = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$, l'equazione assume la forma

$r : y = mx + q$

e prende il nome di equazione esplicita della retta r. Fissato $m \in \mathbb{R}$, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le rette descrivono un fascio di rette parallele e il numero m si dice coefficiente angolare della retta r. Se $q = 0$, la retta r passa per l'origine. Il vettore $(m, -1)$ e' ortogonale a r, mentre $(1, m)$ e' parallelo ad r. Le coppie del tipo (t, mt), $t \neq 0$ sono i numeri direttori della retta r.

In generale: sia $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Se $r \,//\, (\alpha, \beta)$, $\alpha \neq 0$, allora $r : \beta x - \alpha y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, si scrive anche

$$r : \quad y = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{c}{\alpha}$$

e quindi $m = \frac{\beta}{\alpha}$. Se invece $r \perp (\alpha, \beta)$, $\alpha \neq 0$, allora $r : \alpha x + \beta y + c = 0$ si scrive anche

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} x - \frac{c}{\beta}$$

e quindi $m = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Condizione di parallelismo tra due rette scritte in forma esplicita

$r : mx + q$

sono parallele se e soltanto se $m = m'$

$r' : m'x + q'$

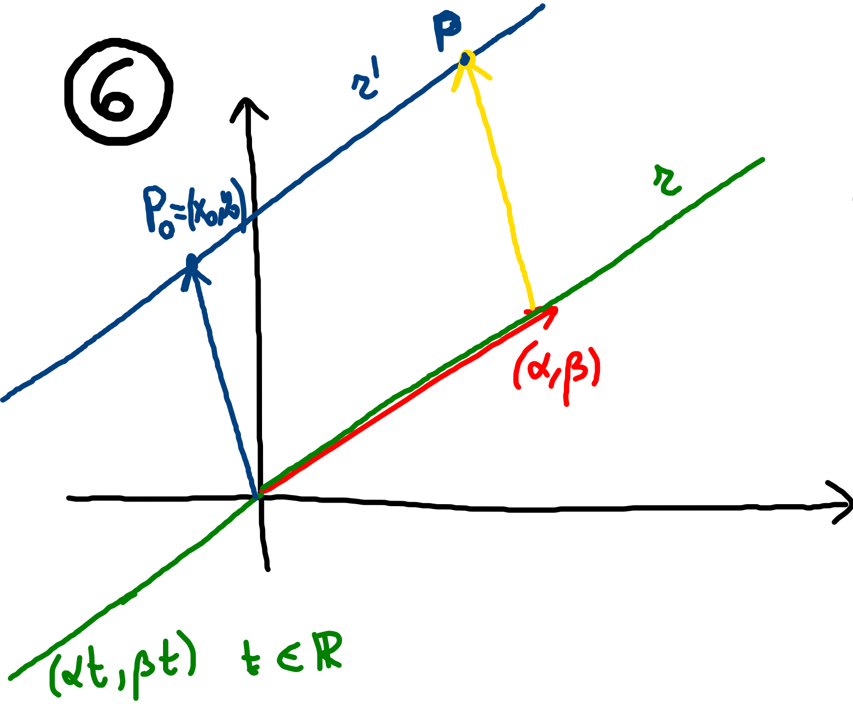
Condizione di perpendicolarità tra due rette scritte in forma esplicita

$r : mx + q$

sono perpendicolari se e soltanto se $m m' = -1$

$r' : m'x + q'$

⑥



Se $\vec{v}=(\alpha,\beta)\neq 0$, i punti del tipo $(\alpha t, \beta t)$, $t\in\mathbb{R}$ descrivono la retta parallela al vettore (α,β) e passante per l'origine.

Se una retta r' del piano passa per un punto $P_0=(x_0,y_0)$ ed e' parallela alla retta r, r' puo' essere descritta dall'insieme dei punti $P=(x,y)$ tali che

$$P=P_0+t\vec{v}\quad,\quad t\in\mathbb{R}$$

Quando una retta e' descritta in questo modo, si scrive

$$r':\ P=P_0+t\vec{v}$$

e si dice che la retta r' e' rappresentata in forma vettoriale. Il vettore $\vec{v}$ e' detto vettore direzione di r'.

7 In termini di coordinate, l' equazione $P = P_0 + t\vec{v}$ si scrive

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (\alpha t, \beta t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

oppure

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Quando una retta e' descritta in questo modo si dice che la retta e' rappresentata in forma parametrica. In tale rappresentazione (α, β) e' una coppia di numeri direttori e $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ e' un vettore direzione.

In generale: sia $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Se $r \parallel (\alpha, \beta)$, allora r, scritta in forma parametrica, e' del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e il punto $(x_0, y_0) \in r$.

Se $r \perp (\alpha, \beta)$, allora r, scritta in forma parametrica, e' del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 - \beta t \\ y = y_0 + \alpha t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e il punto $(x_0, y_0) \in r$.

Condizione di parallelismo tra rette scritte in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + \alpha' t \\ y = y_1 + \beta' t \end{cases}$$

sono parallele se e solo se $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} = 0$

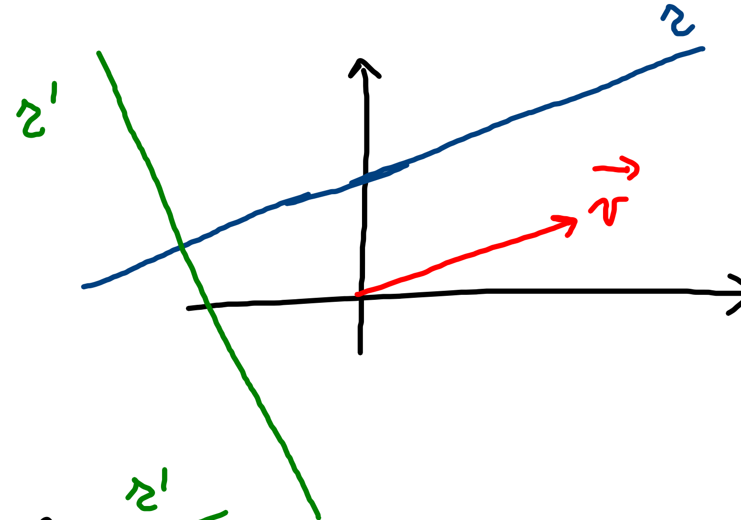
Condizione di ortogonalità tra rette scritte in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + \alpha' t \\ y = y_1 + \beta' t \end{cases}$$

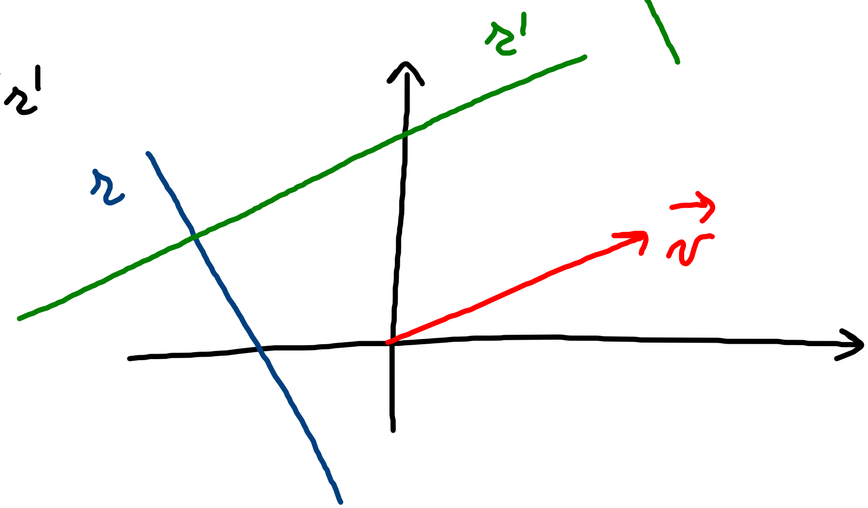
sono ortogonali se e solo se $(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = 0$

7 Osservazioni

$$\vec{v} \,/\!/\, r \,, \quad r \perp r' \Rightarrow \vec{v} \perp r'$$



$$\vec{v} \perp r \,, \quad r \perp r' \Rightarrow \vec{v} \,/\!/\, r'$$



ESERCIZI

Determinare una rappresentazione parametrica della retta r' parallela a

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e passante per $P=(0,2)$.

$$r': \begin{cases} x = 0+2t \\ y = 2+3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esprimere in forma cartesiana la retta r' perpendicolare a

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

e passante per $P = (1,2)$.

r' e' del tipo $3x - y + c = 0$

Affinche' r' passi per $P = (1,2)$ deve essere

$$3 \cdot 1 - 2 + c = 0$$

cioe' $1 + c = 0$, $c = -1$.

La retta r' puo' essere scritta nella forma cartesiana $r': 3x - y - 1 = 0$

Determinare l'equazione esplicita della retta r'

parallela a

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4t \end{cases}$$

e passante per $P = (-1, 2)$

r' e' del tipo $\qquad y = -\frac{4}{3}x + q$

Affinche' r' passi per $P = (-1, 2)$ deve essere $2 = -\frac{4}{3} \cdot (-1) + q$

cioe' $\quad 2 = \frac{4}{3} + q \quad , \qquad q = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$

La retta r' scritta in forma esplicita e' $\quad r' : y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$