

RETTE DELLO SPAZIO

① Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
L'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano

$$ax + by + cz + d = 0$$

è un piano e, viceversa, ogni piano dello spazio può essere descritto attraverso costanti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Quando un piano è descritto in questo modo si scrive

$$\pi: ax + by + cz + d = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

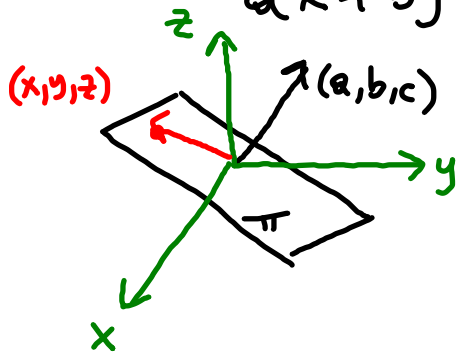
e si dice che il piano π è rappresentato in **forma cartesiana**.

② Siano $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Al variare di $d \in \mathbb{R}$ i piani

$$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0$$

descrivono un fascio di piani paralleli. Se $d = 0$ l'origine $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ appartiene al piano π e il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano π , dato che

$$ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z)$$



③ Quali possibilità ci sono nel considerare l'intersezione di due piani nello spazio?

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$$A_b = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow R(A) = 1, R(A_b) = 2$$

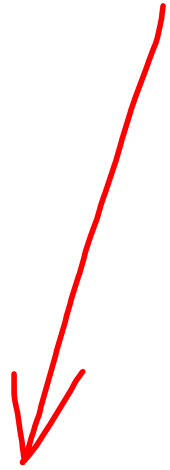
$$\rightarrow R(A) = 1, R(A_b) = 1$$

Il sistema è incompatibile, quindi i piani sono paralleli e non coincidenti

In tal caso (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono proporzionali e quindi le due equazioni rappresentano lo stesso piano: i piani sono (paralleli e) coincidenti

$$\rightarrow R(A) = 2 \text{ e } R(A_b) = 2$$

In tal caso il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da un solo parametro (perché ci sono 3 incognite e il rango comune alla matrice incompleta e alla matrice completa è 2, dunque $3 - 2 = 1$). Geometricamente: i due piani si intersecano in una retta.



Un modo di rappresentare una retta nello spazio è scrivere

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$R \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Rette nello spazio in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \\ z = z_0 + tr \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in r$$

$\vec{v} = (p, q, r)$ e' un vettore direzione di r

$$P = (x, y, z) \quad P = P_0 + t \vec{v} \quad (\text{forma vettoriale})$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$