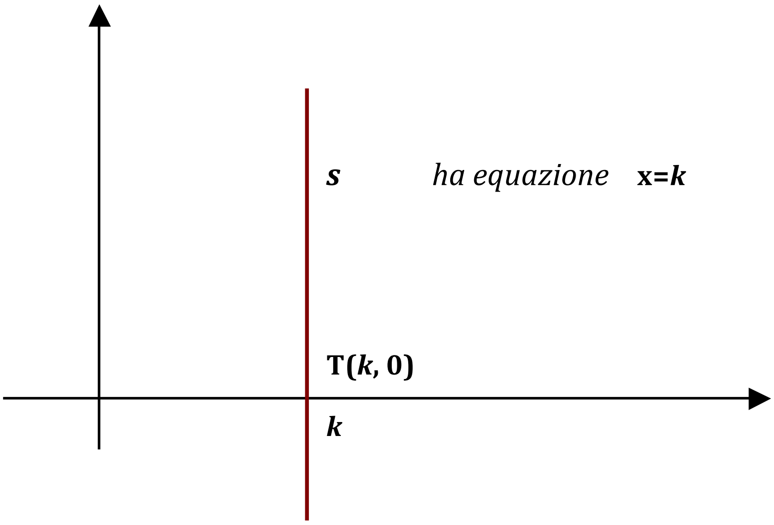
SCHEMA SULLE EQUAZIONI RAPPRESENTATI RETTE DI UN PIANO Π.

I. EQUAZIONI DELLE RETTE PARALLE AGLI ASSI COORDINATI

RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ORDINATE

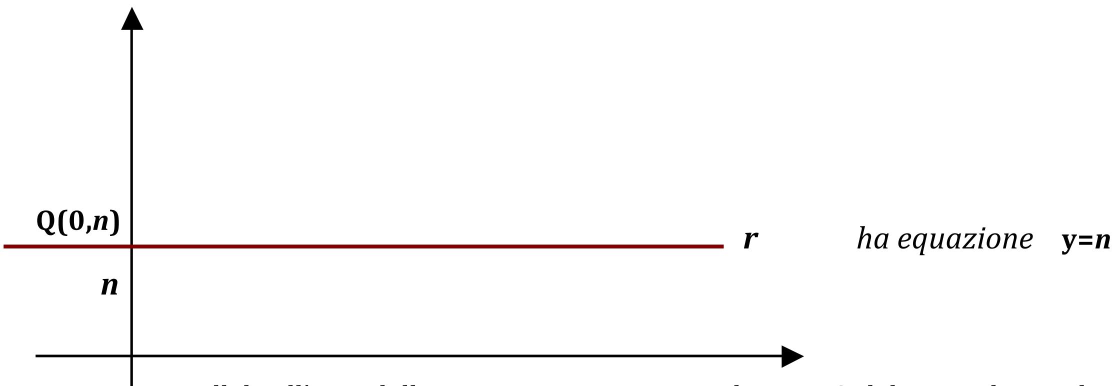


Una retta ***s*** parallela all'asse delle ordinate e passante per il punto T del piano di coordinate **(k, *0*)** è l'insieme

$$s=\{P(x,y)\in \Pi : x=k \text{ e } y\in \mathbf{R}\}$$

ed è pertanto rappresentato dall'equazione **x=*k*.**

RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ASCISSE



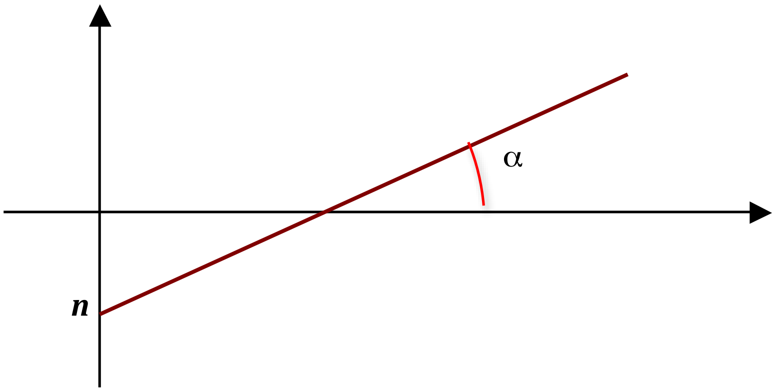
Una retta ***r*** parallela all'asse delle ascisse e passante per il punto **Q** del piano di coordinate **(0, *n*)** è l'insieme

$$r=\{P(x,y)\in \Pi : x\in \mathbf{R} \text{ e } y=n\}$$

ed è pertanto rappresentato dall'equazione **y=*n*.**

L'equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse rappresenta un caso particolare delle equazioni di cui al seguente punto **II**.

II. EQUAZIONI DI RETTE NON PARALLELE ALL'ASSE DELLE ORDINATE IN FORMA ESPLICITA



m*=tag****α***

II1. Equazione della retta ottenuta assegnando la pendenza *m* e un punto $P_1(x_1, y_1)$ della retta

1. $$\boxed{y = y_1 + m(x - x_1)}$$

equazione nella forma punto -pendenza

è l'equazione della retta avente pendenza, o coefficiente angolare, ***m,*** e passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$

Come si ottiene l'equazione 1. Sia ***P(x, y)*** il punto variabile sulla retta; al variare sulla retta di $P \neq P_1$ non varia il rapporto $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ perché esso è in ogni caso uguale alla pendenza ***m*** della retta:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad \forall P(x, y) \in retta : P(x, y) \neq P_1(x_1, y\ )$$

Allora l'equazione 1 è ottenuta a partire dall'uguaglianza $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$, per $P \neq P_1$, moltiplicando i membri di essa per $x\text{-}x_1$ e osservando che l'uguaglianza che si ottiene è verificata anche per $P = P_1$

1.1 $$\boxed{y = mx + n}$$

equazione nella forma pendenza – intercetta (*sull'asse* ***y)***

equazione in forma esplicita

è l'equazione della retta di pendenza, o coefficiente angolare, ***m*** , passante per il punto $P_0(0, n)$.

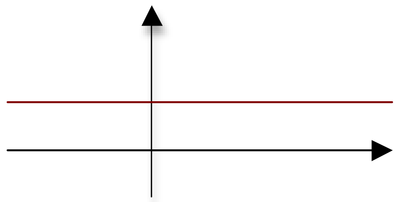
Come si ottiene l'equazione 1.1 Operando il prodotto al 2° membro della **1**. si ottiene

$$y = mx + y_1 - mx_1$$

e ponendo $n = y_1 - mx_1$ si ottiene l'equazione 1.1. Si verifica ponendo x=0 nell'equazione che la retta passa per $P_0(0, n)$. All'equazione si giunge anche scegliendo nella 1 come punto $P_1(x_1, y_1)$ il punto della retta di ascissa 0 e quindi di coordinate ***(0, n).***

Casi particolari:

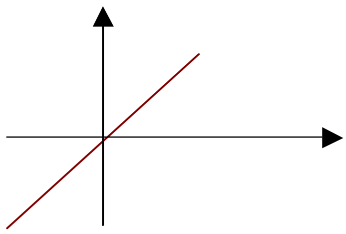
- se **m = 0,** *allora la retta è parallela all'asse delle x*



da 1. → $\boxed{y = y_1}$

equazioni di una retta parallela all'asse delle x

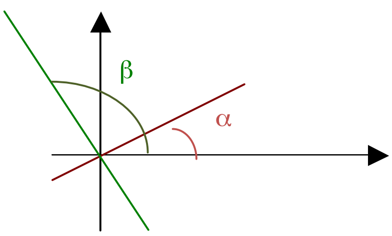
da 1.1→ $\boxed{y = n}$



- se **n= 0** *allora la retta passa per l'origine* **O(0,0)**

da 1.1 $\boxed{y = mx}$

equazione di una retta parallela passante per l'origine del riferimento



Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità

y =mx+ n ed ***y =m'x+ n' indicano rette parallele se e solo se m= m'***

y =mx+ n ed ***y =m'x+ n' indicano rette perpendicolari non parallele agli assi se e solo se***

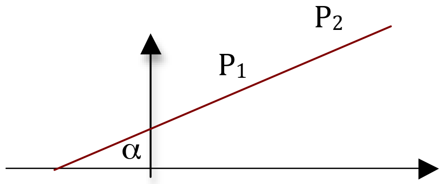
m'= -1/m *(*)* ***cioè m m'=-1***

(*)-------

se la retta di coefficiente angolare ***m=tag α*** *e la retta di coefficiente angolare* ***m' =tag β*** *sono perpendicolari , i due angoli di pendenza differiscono di un angolo retto, ad esempio* ***β= α+π/2****, allora:*

$$m' = tg\beta = tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot g\alpha = -\,{}^{1}\!/_{tg\alpha} = -\frac{1}{m}$$

II$_2$. Equazione della retta ottenuta assegnando due punti distinti $P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tag\alpha$$

2.

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Equazione della retta passante per

$P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ con $x_2 \neq x_1$

L'equazione **2** si ottiene dall'equazione **1,** ricordando che la pendenza ***m*** di una retta è uguale al rapporto $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tra le differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti distinti qualsiasi della retta.

Caso particolare:

- se $y_2 = y_1$, *allora la retta è parallela all'asse delle ascisse e l'equazione 2 diventa*

$$y = y_1 \qquad o \qquad y - y_1 = 0$$

III. **EQUAZIONE DI UNA RETTA DI <u>QUALSIASI TIPO</u> OTTENUTA ASSEGNANDO DUE PUNTI DISTINTI**

$P_1(x_1,y_1) \quad P_2(x_2,y_2)$

3. $$\boxed{(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)}$$

Equazione della retta passante per $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$

Nel caso in cui è $x_2 \neq x_1$ (retta non perpendicolare all'asse delle ascisse) le equazioni 2 e 3 sono ovviamente equivalenti e quindi la **3** rappresenta, come la **2**, la retta non perpendicolare per P_1 e P_2.

Nel caso in cui è $x_2 = x_1$, la retta è perpendicolare all'asse delle ascisse e ha equazione $x=x_1$; d'altra parte se $x_2 = x_1$ la **3** si scrive

$$\textbf{3.}\quad (y_2-y_1)(x-x_1)=0$$

ed essendo $y_1 \neq y_2$, perché i punti fissati (che hanno uguale ascissa) sono distinti si ha l'equivalenza

$$3.\quad (y_2-y_1)(x-x_1)=0 \Leftrightarrow (x-x_1)=0 \Leftrightarrow x=x_1,$$

quindi anche la 3 rappresenta la retta verticale $x=x_1$

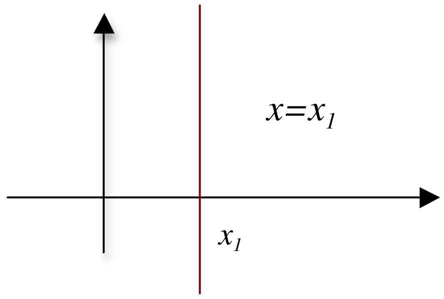
Casi particolari:

- *se* $y_2 = y_1$, *allora la retta è parallela all'asse delle ascisse e l'equazione è equivalente alla seguenti:*

$$y = y_1 \quad o \quad y - y_1 = 0$$

- *se* $x_2 = x_1$, *allora la retta è parallela all'asse delle ordinate e l'equazione è equivalente alla seguenti :*

$$x = x_1 \quad o \quad x - x_1 = 0$$



IV. EQUAZIONE GENERALE DELLA RETTA (IN FORMA IMPLICITA)

Una retta del piano è rappresentata dall'equazione ***x= k*** (se parallela all'asse delle ordinate)

o dall'equazione ***y=mx+n*** (se non è parallela all'asse delle ordinate)

Entrambe le equazioni possono sono equivalenti a un'equazione della seguente forma in cui i coefficienti della x e della y non sono entrambi nulli:

$$\textbf{4.} \qquad \boxed{ax + by + c = 0 \qquad\qquad (a, b) \neq (0, 0)}$$

Infatti:

x= k $\Leftrightarrow$ ***x-k=0*** $\Leftrightarrow$ ***ax +by +c =0*** *con a=1≠0, b=0 e c= -k*

y= mx +n $\Leftrightarrow$ ***mx-y +n =0*** $\Leftrightarrow$ ***ax +by +c =0*** *con a=m, b=-1 ≠0 c= n*

Nell'equazione **4.** Si trasforma anche l'equazione **3,** ponendo $a= y_2 - y_1$ ***e*** $-b = x_2 - x_1$

Quindi una retta è rappresentata da un'equazione del tipo 4.

È vero il viceversa : la 4., con la condizione (a, b) ≠ (0, 0) rappresenta una retta. *Infatti*

- Se ***b ≠ 0*** l'equazione può porsi nella forma:

$$\boxed{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}}$$

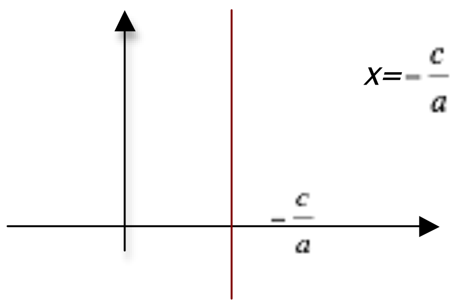
retta di coefficiente angolare $m=-\frac{a}{b}$ e intercetta $n=-\frac{c}{b}$;

Nota: la retta incontra l'asse delle ordinate in $P(0, -\frac{c}{b})$ *e l'asse delle ascisse in* $Q\,(-\frac{c}{a}, 0)$

- Se ***b = 0 e a≠0*** l'equazione può porsi nella forma:

$$\boxed{x = -\frac{c}{a}}$$

retta parallela all'asse delle y



L'equazione 4. è detta equazione generale della retta (equazione in forma implicita)

Condizione di parallelismo

ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0 sono equazioni di rette parallele se e solo se b=b'=0 oppure $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ***; quindi sono equazioni di rette parallele se e solo se*** $\boxed{ab' = a'b}$

Condizione di perpendicolarità

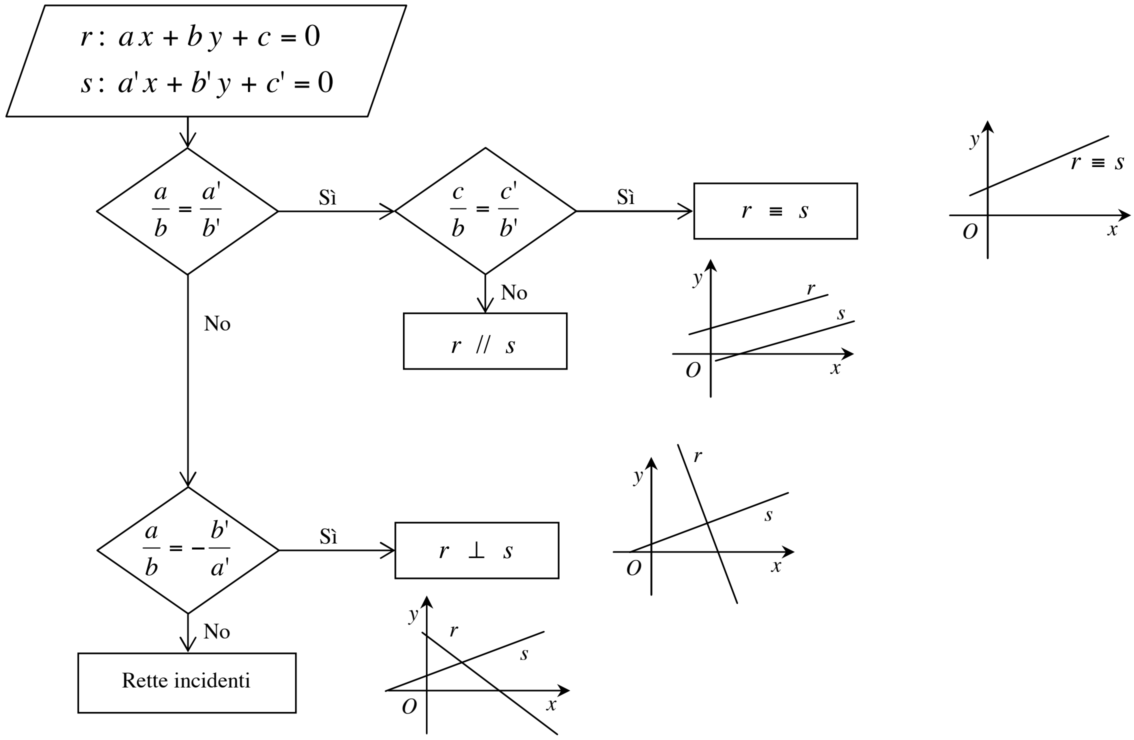
ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0 sono equazioni di rette perpendicolari se e solo se a=b' =0 oppure b=a' =0 oppure $\frac{a'}{b'} = -\frac{b}{a}$ ***; quindi sono equazioni di rette perpendicolari se e solo se***

$$\boxed{aa' = -bb'}$$

Da www.amolamatematica.it

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

scritte in forma implicita



ESERCIZI

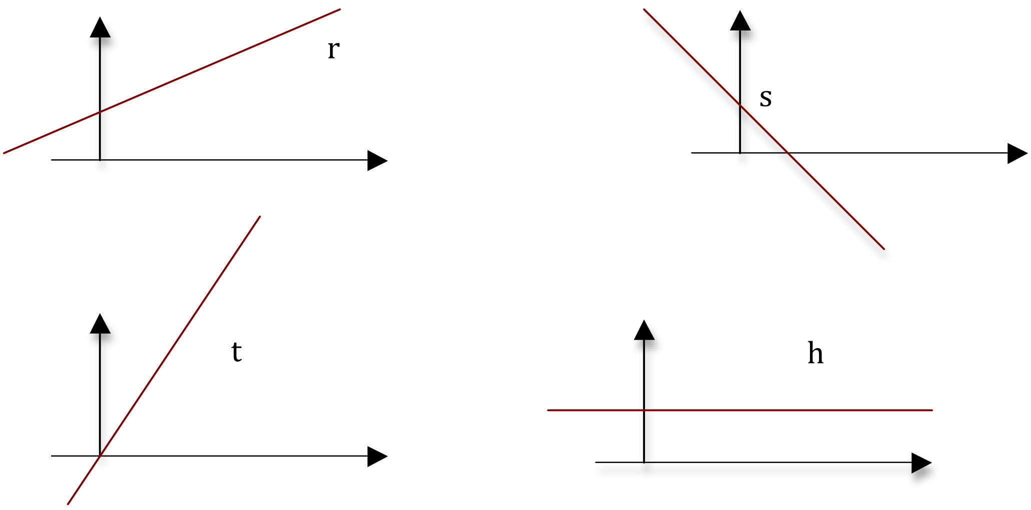
1. *Determinare l'equazione esplicita della retta per $P_0(-1, 4)$ di coefficiente angolare 3.*
2. *Determinare l'intercetta sull'asse y della retta di cui all'esercizio precedente.*
3. *Dire se il punto di coordinate (1, 2) appartiene alla retta.*
4. *Determinare l'equazione della retta per $P_0(-1, 4)$ che forma con l'asse delle ascisse un angolo di 60° gradi.*
5. *Determinare l'equazione della retta per $P_0(-1, 4)$ che forma con l'asse delle ascisse un angolo di misura in radianti pari a $\pi/2$.*
6. *Determinare il coefficiente angolare della retta $P_1(1, 3)$ e $P_2(2, -2)$.*
7. *Determinare il coefficiente angolare dell'asse del segmento di estremi $P_1(1, 3)$ e $P_2(2, -2)$.*
8. *Determinare l'equazione dell'asse del segmento di estremi $P_1(1, 3)$ e $P_2(2, -2)$.*
9. *Dire quali dei seguenti punti giacciono sulla stessa retta:*
   a) (1, 1), (-2, -5) e (0, -1),
   b) (-2, 4), (0, 2) e (1, 5).
10. *Determinare l'equazione esplicita della retta per $P_1(1, 3)$ e $P_2(2, -2)$ nella forma punto pendenza.*
11. *Determinare l'equazione esplicita della retta per $P_0(1,4)$ parallela alla retta $y=2x-5$.*
12. *Determinare l'equazione esplicita della retta per $P_0(1,4)$ perpendicolare alla retta $y=2x-5$.*
13. *Assegnata la retta di equazione $2x-3y+6=0$, determinare la pendenza della retta e le intersezioni con gli assi.*
14. *Scrivere l'equazione della retta di cui all'esercizio precedente in forma esplicita.*
15. *Determinare l'equazione della retta per l'origine parallela alla retta $2x-3y+6=0$.*
16. *Determinare l'equazione della retta per l'origine perpendicolare alla retta $2x-3y+6=0$.*

17. Determinare la posizione reciproca delle rette
r) $y=3x-1$ e r') $2x-y+5=0$.

18. Determinare le pendenze dei lati del triangolo di vertici (-1, 2), (6,5) e (2,7).

19. Dire se il triangolo dell'esercizio precedente è un triangolo rettangolo o non lo è.

20. Ordina le seguenti rette secondo l'ordine crescente del coefficiente angolare (*)



(*) Adottando la convenzione che "per angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse" si intende l'angolo positivo che l'asse delle ascisse deve descrivere per sovrapporsi alla retta, per rispondere alla domanda occorre conoscere come varia la *tang* α al variare di α in $[0, \pi/2[$ e in $]\pi/2, \pi]$.