

Lezioni di
Elettrodinamica

di R.Stroffolini

— \diamond —

DIPARTIMENTO DI SCIENZE FISICHE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

Indice

1	Equazioni di Maxwell nel vuoto e nei mezzi materiali	4
2	Cenni sulle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali	8
2.1	Problema di Cauchy	8
2.2	Caratteristiche di un'equazione differenziale lineare alle derivate parziali	14
2.3	Problema generalizzato di Cauchy e caratteristiche in generale	16
2.4	Riduzione a forma canonica in un punto e classificazione delle equazioni del secondo ordine in una funzione incognita	22
2.5	Riduzione a forma canonica in una regione di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti	24
2.6	Problemi ben posti	28
2.7	La nozione di soluzione generalizzata	30
2.8	Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Unicità della soluzione	32
2.9	La soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde	36
3	Il problema di Cauchy per le equazioni di Maxwell omogenee nel vuoto	52
4	Campo elettromagnetico generato da cariche e correnti: emissione di radiazione	54
4.1	Potenziali elettromagnetici	54
4.2	Emissione della radiazione elettromagnetica	59
5	Rappresentazione della soluzione della equazio-	

ne delle onde omogenea mediante trasformata di Fourier	69
6 Soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee nei mezzi materiali omogenei (ed isotropi) con assegnate condizioni iniziali	74
7 Metodo della fase stazionaria	81
8 Equazioni omogenee di Maxwell nei mezzi in cui le proprietà elettriche e magnetiche dipendono dal punto. Approssimazione dell'iconale.	92
9 Onde sonore	106
9.1 Diffusione da una superficie piana	118
9.2 Diffusione da una sfera	129
APPENDICE 1	144
APPENDICE 2	147

1 Equazioni di Maxwell nel vuoto e nei mezzi materiali

Le equazioni di Maxwell nel vuoto sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho & \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi \vec{j}}{c} \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

che nei mezzi materiali divengono

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho & \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi \vec{j}}{c} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} & \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M}. \end{aligned} \quad (2)$$

Le ultime due equazioni sono le relazioni costitutive in cui appaiono i campi di polarizzazione dielettrico e magnetico \vec{P} ed \vec{M} ; ρ e \vec{j} indicano, invece, la densità di carica e quella di corrente "libere", cioè non di polarizzazione.

Sulle superfici di separazione tra i mezzi materiali le equazioni (2) divengono delle condizioni sulle componenti dei campi normali e tangenti a queste superfici. Il teorema della divergenza applicato ad un cilindretto con basi appartenenti ai mezzi 1 e 2 disposto perpendicolarmente alla superficie rende $\operatorname{div} \vec{A}$ sulla superficie equivalente a $A_{2n} - A_{1n}$, le componenti di \vec{A} nella direzione di \vec{n} . Il teorema di Stokes applicato ad un circuito che vada dal mezzo 1 al mezzo 2 giacente in un piano passante per la normale alla superficie rende $\operatorname{rot} \vec{A}$ sulla superficie equivalente a $A_{2t} - A_{1t}$, le componenti di \vec{A} nella direzione di \vec{t} il versore tangente alla superficie contenuto nel piano. Le due equazioni senza sorgenti divengono

$$B_{2n} = B_{1n} \quad E_{2t} = E_{1t}$$

e le altre due

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\omega \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i$$

dove ω è la densità di carica superficiale – mandando a zero l'altezza del cilindro si ha $4\pi dQ = 4\pi \int \rho dV = (D_{2n} - D_{1n})dS$ e $\omega = dQ/dS$ – mentre i è la densità di corrente di superficie. L'equazione di continuità che esprime la conservazione della carica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

diventa sulla superficie

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{n}_1 + \vec{j} \cdot \vec{n}_2 = 0$$

perciò sulle superfici su cui ω varia nel tempo la quantità $4\pi\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t$ è continua.

Per quanto riguarda la relazione costitutiva tra \vec{M} ed \vec{H} (e quindi tra \vec{B} ed \vec{H}) notiamo che eccetto che nei mezzi ferromagnetici, $\vec{M} = \chi\vec{H}$ e quindi $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ($\mu = 1 + 4\pi\chi$) e che inoltre μ differisce dall'unità per termini dell'ordine di v/c (v velocità degli elettroni negli atomi, circa $1/100$ di c) per cui si potrà assumere $\mu = 1$.

Per calcolare la relazione tra \vec{P} ed \vec{E} consideriamo un modello semplice di un elettrone con forza di richiamo elastica e forza dipendente dalla velocità. L'equazione del moto dell'elettrone è quindi

$$\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} + \gamma\dot{\vec{x}} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

nella quale \vec{E} è calcolato nel punto di equilibrio dell'elettrone. L'equazione del momento di dipolo $\vec{p} = -e\vec{x}$ è allora:

$$\ddot{\vec{p}} + \omega_0^2\vec{p} + \gamma\dot{\vec{p}} = \frac{e^2}{m}\vec{E} \quad (3)$$

La soluzione dell'equazione omogenea è:

$$\vec{p}_0(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(C_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} \right)$$

Usando il metodo di Lagrange di variazione delle costanti arbitrarie si ha l'integrale generale della (3)

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0(t) + \int_{t_0}^t K(t-t')\vec{E}(t')dt'$$

$$K(t-t') = \frac{e^2}{m\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}(t-t').$$

Se scegliamo t_0 in modo che per $t < t_0$, $\vec{E}(t) = 0$ e quindi $\vec{p}_0(t) = 0$ abbiamo

$$\vec{p}(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t')\vec{E}(t')dt'$$

dove abbiamo esteso l'integrale a $-\infty$ poichè non ci interessa il particolare valore di t_0 , che però esiste.

Ricordiamo che \vec{P} è il momento di dipolo per unità di volume. Se $N(\vec{x})$ è il numero di molecole per unità di volume ed in ciascuna molecola ci sono f_i elettroni con costanti ω_i e γ_i avremo che

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = N(\vec{x}) \sum_i f_i \vec{p}_i = \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(\vec{x}, t - t') \vec{E}(t') dt'$$

con

$$\mathcal{K}(\vec{x}, t - t') = \frac{e^2 N(\vec{x})}{m} \sum_i f_i \frac{e^{-\frac{\gamma_i}{2}(t-t')}}{\sqrt{\omega_i^2 - \frac{\gamma_i^2}{4}}} \sin \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\gamma_i^2}{4}} (t - t')$$

Per materiali omogenei N è indipendente da \vec{x} e quindi \mathcal{K} è indipendente da \vec{x} .

Se pertanto si sostituisce nell'equazione di Maxwell la relazione tra \vec{D} ed \vec{E} , si riconosce che le equazioni di Maxwell nei mezzi materiali sono equazioni integrodifferenziali.

ESERCIZIO

Risolvere l'equazione (3) per la trasformata di Fourier

$$\tilde{\vec{E}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} \vec{E}(t') dt'$$

La trasformata di Fourier del momento di dipolo $\tilde{\vec{p}}$ soddisfa l'equazione

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\gamma) \tilde{\vec{p}} = e^2 \frac{\tilde{\vec{E}}(\omega)}{m}$$

e poichè

$$\tilde{\vec{p}}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{\tilde{\vec{E}}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

allora

$$\tilde{\vec{P}}(\omega) = \frac{e^2}{m} N \sum_i \frac{f_i \tilde{\vec{E}}(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_i}$$

Definendo

$$\tilde{\vec{P}}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\vec{E}}(\omega)$$

si ha

$$\vec{P}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') \tilde{\vec{E}}(t') dt'$$

per la proprietà del prodotto di convoluzione con

$$\chi(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\chi}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega.$$

Dimostrare che

$$\frac{\chi(t-t')}{\sqrt{2\pi}} = \mathcal{K}(t-t')\Theta(t-t')$$

calcolando $\chi(t-t')$ con il metodo dei residui.

Osserviamo che usualmente si definisce

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) \equiv 1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega)$$

ma $\tilde{\varepsilon}$ non è la trasformata di Fourier di una funzione $\varepsilon(t)$ poichè 1 non ammette trasformata di Fourier.

2 Cenni sulle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali

Problema di Cauchy. Caratteristiche delle equazioni a derivate parziali lineari. Classificazione delle equazioni differenziali a derivate parziali lineari del 2° ordine. Riduzione a forma canonica per le equazioni con due variabili indipendenti. Problemi ben posti e soluzioni generalizzate. Unicità ed esistenza della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde.

2.1 Problema di Cauchy

I problemi di fisica del continuo sono formulati in termini di equazioni differenziali a derivate parziali (lineari nella maggior parte dei casi cioè espressi mediante equazioni lineari nelle funzioni incognite e nelle loro derivate). Così il potenziale del campo elettrostatico soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2\Phi = 0$, l'equazione del moto della corda è $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, le equazioni di Maxwell nel vuoto sono un sistema di equazioni differenziali lineari a derivate parziali nelle funzioni incognite \vec{E} e \vec{B} . Dedicheremo pertanto alcune lezioni allo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari.

Osserviamo che affermare che una grandezza fisica incognita soddisfa un'equazione differenziale, ordinaria o a derivate parziali non costituisce una formulazione completa delle condizioni necessarie per la determinazione della grandezza incognita.

Così il problema del moto di un punto materiale è formulato in maniera completa se all'equazione del moto $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ si aggiungono le condizioni iniziali $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{v}_0$. Infatti si dimostra che la soluzione di tale problema, se esiste, è unica. L'esistenza della soluzione è garantita poi da opportune condizioni di regolarità della $\vec{F}(\vec{x})$.

In generale per un problema formulato con equazioni differenziali l'unicità della soluzione è garantita da opportune condizioni supplementari. Per le equazioni a derivate parziali le condizioni supplementari saranno di tipo diverso. Per esempio per l'equazione del moto della corda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, dove $u(x, t)$ è lo spostamento dalla posizione di equilibrio del punto di coordinata x della corda al tempo t , in analogia col moto di un punto materiale, è ragionevole ritenere che le condizioni supplementari che assicurano l'unicità della soluzione siano

$$u(x, t_0) = \phi_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \phi_1(x)$$

cioè che occorre assegnare lo spostamento e la velocità iniziale di ogni punto della corda (stiamo considerando la cosiddetta corda "infinita" il cui significato sarà precisato in seguito).

Per l'equazione di Laplace $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ l'unicità della soluzione in una regione connessa \mathcal{R} è garantita, per esempio, dall'assegnare il valore di $\Phi(\vec{x})$ sul bordo $S_{\mathcal{R}}$ della regione \mathcal{R} (problema di Dirichelet). Vogliamo ora esaminare in quali ipotesi è possibile dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione di una generica equazione differenziale a derivate parziali lineare con condizioni supplementari analoghe a quelle per il moto della corda, cioè assegnando il valore della funzione incognita $u(x_0, x_1, \dots, x_n)$ per un fissato valore di una delle variabili, e le derivate parziali rispetto a quella stessa variabile fino ad un opportuno ordine calcolato per lo stesso fissato valore della variabile.

Chiameremo nel seguito tale variabile t (infatti spesso è un tempo, ma non necessariamente) ed indicheremo con x_1, x_2, \dots, x_n le rimanenti variabili. Un primo requisito è quello che, se n_1 è l'ordine dell'equazione differenziale, nell'equazione compaia la derivata di ordine n_1 rispetto alla variabile prescelta (che abbiamo indicato con t). Inoltre supporremo che l'equazione sia risolta rispetto a tale derivata, cioè sia della forma

$$\frac{\partial^{n_1} u}{\partial t^{n_1}} = F \left(t, x_1, \dots, x_n, \dots \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \dots \right) \quad (4)$$

con

$$k = k_0 + k_1 + \dots + k_n \quad k \leq n_1 \quad k_0 < n_1$$

dove F è una funzione lineare della u e delle sue derivate parziali con coefficienti e termine noto dipendenti dalle variabili (t, x_1, \dots, x_n) . Le condizioni supplementari assegnano per $t = t_0$ la funzione u e le sue derivate fino all'ordine $n_1 - 1$ cioè:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t_0, x_1 \dots x_n) &= \Phi_k(x_1 \dots x_n) \quad ; \quad k = 0, 1 \dots n_1 - 1 \\ \left(\frac{\partial^0 u}{\partial t^0} \equiv u \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione dell'equazione (4) con le condizioni supplementari (5), che spesso vengono chiamate condizioni "iniziali" (e lo sono infatti nel caso in cui la variabile indicata con t sia effettivamente un tempo).

Analogamente per un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali lineare per le funzioni incognite $u_1, u_2 \dots, u_N$ di ordine n_i per la funzione u_i , il problema di Cauchy per la variabile prescelta che ancora indicheremo con t , nell'ipotesi che nelle equazioni compaiano le derivate $\partial^{n_i} u_i / \partial t^{n_i}$ e che le equazioni siano risolte rispetto alle $\partial^{n_i} u_i / \partial t^{n_i}$, consiste nel trovare una soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} &= F_i \left(t, x_1, \dots, x_n, \dots \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \dots \right) \\ k &= k_0 + k_1 + \dots + k_n \quad k \leq n_j \quad k_0 < n_j \end{aligned} \quad (6)$$

dove le F_i sono funzioni lineari delle u_j e delle loro derivate parziali con coefficienti e termini noti, funzioni delle (t, x_1, \dots, x_n) con le condizioni supplementari (iniziali)

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}(t_0, x_1 \dots x_n) = \Phi_i^k(x_1 \dots x_n) \quad ; \quad k = 0, 1 \dots n_i - 1 \quad (7)$$

Vale il seguente teorema di Cauchy-Kowalewski

Se nelle equazioni (6) e (7) i coefficienti ed i termini noti sono funzioni analitiche ¹ nelle variabili (t, x_1, \dots, x_n) nell'intorno di un punto $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ e se le funzioni Φ_i^k sono funzioni analitiche nelle variabili (t, x_1, \dots, x_n) nell'intorno di un punto $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ allora il problema di Cauchy (per la variabile t) ha una unica soluzione analitica in un qualche intorno del punto $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$

L'attenzione sarà posta soprattutto sulla dimostrazione dell'unicità. Trascureremo la dimostrazione dell'esistenza, per la quale ci basta solo accennare che occorre trovare una maggiorazione dei termini della serie calcolata e quindi dimostrare che la serie converge in qualche intorno del punto $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$. Il testo di riferimento è I.G.PETROVSKI "LECTURES ON PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS" - INTERSCIENCE di cui si riporteranno alcuni brani.

□ Il problema di Cauchy per i sistemi lineari arbitrari è facilmente riducibile a quello di sistemi lineari del primo ordine. Illustreremo il metodo applicandolo ad una singola equazione del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{0i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0 \frac{\partial u}{\partial t} + cu + f \quad (8)$$

nella quale $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c, f$ sono funzioni analitiche di (t, x_1, \dots, x_n) in un intorno del punto $(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Il problema di Cauchy per questa equazione consiste nel trovare una soluzione che soddisfa le seguenti condizioni iniziali

$$u(t^0, x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, \dots, x_n) \quad (9)$$

¹Una funzione $G(x_1 \dots x_n)$ di n variabili reali è analitica nell'intorno di un punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ se è rappresentabile come una serie di potenze

$$G(x_1 \dots x_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A_{k_1, k_2, \dots, k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} (x_2 - x_2^0)^{k_2} \dots (x_n - x_n^0)^{k_n}$$

che converge per sufficientemente piccoli valori di $|x_i - x_i^0|$. Si può mostrare che

$$A_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left. \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} G}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|_{x_i = x_i^0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^0, x_1, \dots, x_n) = \phi_0(x_1, \dots, x_n)$$

dove le funzioni ϕ e ϕ_0 sono analitiche in un intorno del punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Senza perdita di generalità possiamo assumere che

$$t^0 = x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0$$

perchè basta fare una trasformazione delle variabili indipendenti che non altera la forma dell'equazione.

Se la funzione $u(t, x_1, \dots, x_n)$ soddisfa l'equazione (8) e le condizioni iniziali (9), allora, ovviamente le funzioni

$$u, \quad u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= \sum_{i,j}^n a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_i^n \left(a_{0i} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + b_i u_i \right) + b_0 u_0 + c u + f, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &= \frac{\partial u_0}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= u_0, \end{aligned} \tag{10}$$

e le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(0, x_1, \dots, x_n) &= \phi(x_1, \dots, x_n), \\ u_0(0, x_1, \dots, x_n) &= \phi_0(x_1, \dots, x_n), \\ u_k(0, x_1, \dots, x_n) &= \phi_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{11}$$

per dimostrare l'equivalenza occorre provare che è vero anche il contrario. Se le funzioni u, u_0, u_1, \dots, u_n soddisfano le equazioni (10) in una certa regione G dello spazio (t, x_1, \dots, x_n) che insiste sulla regione G_0 dello spazio (x_1, \dots, x_n) nonchè le condizioni iniziali (11), allora $u(t, x_1, \dots, x_n)$ soddisfa l'equazione (8) e le condizioni iniziali (9) in tutta la regione G .

Infatti la (10.3) implica che in tutta la regione G

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Sostituendo u_0 nella (10.2) con $\partial u / \partial t$ abbiamo

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_k} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] = 0. \tag{12}$$

Quindi, la quantità $u_k - \partial u / \partial x_k$ è indipendente da t in tutta la regione G .

Dalla condizione (11.3),

$$u_k = \partial u / \partial x_k$$

in G_0 . Concludiamo sulla base della (12) che ²

$$u_k = \partial u / \partial x_k \quad (13)$$

in G . Sostituendo $u_0 = \partial u / \partial t$ e $u_k = \partial u / \partial x_k$ nella (10.1) vediamo che l'equazione (8) è soddisfatta in tutta G .

Abbiamo così dimostrato che il sistema (10) è equivalente all'equazione (8). Inoltre, per condizioni iniziali arbitrarie il sistema (10) ha, in un certo senso, più soluzioni dell'equazione (8), poichè possiamo istituire una corrispondenza uno a uno tra le soluzioni della (8) e le soluzioni del sistema (10) solo soddisfacendo la condizione iniziale $u_k = \partial u / \partial x_k$.

Abbiamo visto che il problema di Cauchy per l'equazione lineare del secondo ordine (8) è riducibile al problema di Cauchy per il sistema lineare del primo ordine (10). Usando un procedimento totalmente analogo si può ridurre un sistema arbitrario (6) ad un sistema di equazioni del primo ordine risolte per le derivate parziali rispetto a t di tutte le funzioni incognite. Ne segue che avremo provato il teorema di Cauchy-Kowalewski per un sistema lineare arbitrario (6) se possiamo provarlo per un sistema lineare arbitrario del primo ordine della forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^N b_{ij} u_j + c_i \quad (14)$$

con coefficienti analitici e condizioni iniziali arbitrarie analitiche

$$u_i(0, x_1, \dots, x_n) = \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

Il caso di funzioni analitiche arbitrarie ϕ_i si riduce facilmente al caso in cui esse sono tutte nulle

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0.$$

²Strettamente parlando, le considerazioni precedenti implicano solo che

$$u_k - \partial u / \partial x_k$$

non dipende da t su ciascun segmento di retta parallelo all'asse t se questo segmento è interamente contenuto in G . Di conseguenza $u_k - \partial u / \partial x_k = 0$ nella parte di G che può essere ricoperta da segmenti di linea retta paralleli all'asse t contenuti interamente in G e intersecanti G_0 . Comunque, dato che le funzioni considerate sono analitiche, segue da un ben noto teorema sulle funzioni analitiche che $u_k - \partial u / \partial x_k = 0$ in tutto G

Basta, infatti, sostituire le funzioni incognite $u_i(t, x_1, \dots, x_n)$ con le nuove funzioni incognite

$$v_i(t, x_1, \dots, x_n) = u_i(t, x_1, \dots, x_n) - \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (16)$$

Le funzioni v_i soddisferanno il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^N b_{ij} v_j + \\ \left(c_i + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^N b_{ij} \phi_j \right) \end{aligned} \quad (17)$$

che è interamente analogo al sistema (14), con condizioni iniziali

$$v_i(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0. \quad (18)$$

È chiaro che una prova dell'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy per il sistema (17) con condizioni iniziali che sono identicamente nulle implicherebbe l'esistenza di una soluzione del nostro problema originario.

Per semplificare la notazione assumeremo che le funzioni originarie $u_i(t, x_1, \dots, x_n)$ soddisfino le condizioni iniziali

$$u_i(0, x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (19)$$

Proveremo ora l'unicità in un intorno del punto $O(t = 0, x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ della soluzione analitica del problema di Cauchy per il problema (14) e le condizioni iniziali (19). In altre parole, vogliamo mostrare che in nessun intorno del punto O esistono due differenti soluzioni analitiche del sistema (14) che soddisfano, per $t = 0$, le stesse condizioni iniziali (19). Poichè si suppone che le funzioni $u_i(t, x_1, \dots, x_n)$ siano analitiche in un certo intorno dell'origine, esse possono essere sviluppate attorno all'origine in serie di potenze in t, x_1, \dots, x_n . In questo sviluppo il coefficiente $a_{k_0 k_1 \dots k_n}^i$ di $t^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ è eguale a

$$\frac{1}{k_0! k_1! \dots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n} u_i}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{t=x_1=\dots=x_n=0}.$$

Avremo provato l'unicità della soluzione del problema di Cauchy se possiamo provare che le condizioni iniziali (19) determinano univocamente in valori delle derivate delle u_i in $O(t = 0, x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$. Determineremo queste derivate una per una. Le condizioni iniziali determinano univocamente i valori in O di tutte le derivate della forma

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{t=x_1=\dots=x_n=0}. \quad (20)$$

Tutte queste derivate sono eguali a zero, poichè le identità (19) possono essere differenziate rispetto a x_1, x_2, \dots, x_n . Assumiamo l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy e sostituiamo le u_i nella (14) con le funzioni della presunta soluzione. Differenziando le risultanti identità k_1 volte rispetto a x_1 , k_2 volte rispetto a x_2, \dots, k_n volte rispetto a x_n , otteniamo a sinistra derivate della forma

$$\frac{\partial^{k+1} u_i}{\partial t \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad (21)$$

e a destra derivate rispetto a x_1, x_2, \dots, x_n delle funzioni incognite e dei coefficienti dell'equazione, cioè quantità che sono determinate univocamente nel punto O dalle equazioni e dalle condizioni iniziali. Le identità così ottenute determinano i valori nel punto O delle derivate della forma (21) (cioè derivate con una sola differenziazione rispetto a t).

Differenziamo ora ciascuna delle identità (14) una volta rispetto a t, k_1 volte rispetto a x_1, k_2 volte rispetto a x_2, \dots, k_n volte rispetto a x_n . Allora a destra otterremo espressioni che consistono di derivate delle u_i della forma (20) e (21) e di derivate dei coefficienti a_{ij}, b_{ij}, c_i . A sinistra otteniamo derivate della forma

$$\frac{\partial^{k+2} u_i}{\partial t^2 \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (22)$$

(cioè derivate che comportano due differenziazioni rispetto al tempo). Dato che abbiamo già mostrato che i valori nel punto O di tutte le derivate della forma (20) e (21) sono univocamente determinate dalle equazioni (14) e dalle condizioni iniziali (19), ne segue che i valori nel punto O di tutte le derivate della forma (22) sono ancora determinate univocamente. Continuando questo processo troveremo che tutti i valori nel punto O di tutte le derivate delle u_i sono determinati univocamente dalle equazioni (14) e dalle condizioni iniziali (19). Ora i valori al punto O fissato di tutte le derivate di una funzione analitica $u_i(t, x_1, \dots, x_n)$ determinano univocamente i valori dei coefficienti del suo sviluppo in serie di potenze attorno al punto O e così determinano univocamente i valori della funzione stessa in un certo intorno di O . Così due soluzioni analitiche del sistema (14) che soddisfano le stesse condizioni iniziali (19) necessariamente coincidono in qualche intorno dell'origine. Ciò prova l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per il sistema (14) nella classe delle funzioni analitiche. \square

2.2 Caratteristiche di un'equazione differenziale lineare alle derivate parziali

Nel formulare il problema di Cauchy per una variabile prescelta, convenzionalmente designata con t , abbiamo richiesto che l'equazione differenziale (od

il sistema di equazioni differenziali) fosse risolta nei riguardi della derivata parziale rispetto a t dell'ordine uguale al massimo ordine delle derivate parziali della funzione incognita (o delle funzioni incognite) nell'equazione. Vogliamo ora discutere cosa avviene quando tale requisito non è soddisfatto. Considereremo, per semplicità, il caso di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine la cui forma più generale è

$$\sum_{i,j=0}^n A_{ij}(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^n B_i(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_0, x_1, \dots, x_n)u + D(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (23)$$

Supponiamo di voler assegnare le condizioni di Cauchy per una variabile, per esempio x_0 , per $x_0 = x_0^0$.

$$\begin{aligned} u(x_0^0, x_1, \dots, x_n) &= \varphi^0(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0^0, x_1, \dots, x_n) &= \varphi^1(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (24)$$

Se $A_{00}(x_0, x_1, \dots, x_n)$, coefficiente della derivata $\partial^2 u / \partial x_0^2$ è identicamente nullo, cioè la $\partial^2 u / \partial x_0^2$ non compare nell'equazione, oppure se $A_{00}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ è nullo per $x_0 = x_0^0$ (identicamente per ogni valore di (x_1, \dots, x_n)) diremo che $x_0 = x_0^0$ è una caratteristica dell'equazione (nel primo caso tutti i piani $x_0 = \text{cost.}$ sono caratteristiche dell'equazione). Se $x_0 = x_0^0$ è una caratteristica dell'equazione, essa si riduce alla relazione per $x_0 = x_0^0$

$$2 \sum_{j=1}^n A_{0j} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x_i \partial x_j} + B_0 \varphi^1 + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_i} + C \varphi_0 + D = 0. \quad (25)$$

Cioè φ^0 e φ^1 non possono essere assegnate indipendentemente.

Pertanto se $A_{00} = 0$ in generale il problema di Cauchy (rispetto alla variabile prescelta x_0) non ammette soluzione. Se poi assegnata φ^0 si sceglie φ^1 in modo da soddisfare l'equazione (25) il problema ammette soluzione, ma la soluzione non è unica perchè l'equazione non determina $\partial^2 u / \partial x_0^2$ nei punti

(x_0^0, x_1, \dots, x_n) . Occorre però osservare che la funzione

$$u_2(x_0^0, x_1, \dots, x_n) \equiv (\partial^2 u / \partial x_0^2)_{x_0=x_0^0}$$

non è completamente indeterminata. Se infatti si deriva l'equazione (23) rispetto a x_0 e la si calcola per $x_0 = x_0^0$ si ottiene

$$2 \sum_{j=0}^n A_{0j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + B_0 u_2 + \dots \quad (26)$$

dove i termini rimpiazzati da puntini dipendono solo da φ^0, φ^1 , dai coefficienti, dal termine noto e dalle derivate delle predette funzioni. Pertanto avendo scelto φ^0 e φ^1 in modo da soddisfare la (25), la u_2 deve essere soluzione dell'equazione (26), ma non è determinata completamente da tale richiesta.

2.3 Problema generalizzato di Cauchy e caratteristiche in generale

Nel problema di Cauchy le condizioni supplementari sono assegnate su un piano definito da una delle variabili eguale a costante. Tuttavia non c'è ragione di limitarci a questa forma del supporto delle condizioni supplementari. Possiamo cioè considerare il caso in cui le condizioni supplementari sono assegnate su una superficie regolare S di equazione

$$G(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (27)$$

Ci limiteremo, per semplicità, a considerare il caso dell'equazione differenziale del 2° ordine (23).

Nel caso in cui il supporto delle condizioni supplementari è il piano $x_0 = x_0^0$ le condizioni supplementari son il valore della u e della sua derivata prima rispetto a x_0 , cioè nella direzione della normale al piano, sul piano $x_0 = x_0^0$: In effetti avremmo anche potuto dire che assegniamo sul piano tutte le derivate prime della funzione, poichè assegnando la u sul piano restano determinate tutte le derivate prime rispetto alle variabili (x_1, \dots, x_n) , mentre la derivata rispetto a x_0 è assegnata indipendentemente. Analogamente le condizioni supplementari sulla superficie S dovranno essere i valori di $n + 1$ derivate prime di direzioni indipendenti per ogni punto di S . Poichè assegnando la funzione sulla superficie restano determinate le derivate prime in n direzioni (linearmente) indipendenti nel piano tangente in ogni punto della superficie S . Inoltre occorre assegnare, in ogni punto, la derivata in una direzione indipendente dalle precedenti, cioè in una qualunque direzione che non giace nel piano tangente in quel punto (che viene anche chiamata derivata esterna alla superficie) in particolare nella direzione della normale a S . Dalla conoscenza di queste $n + 1$ derivate prime indipendenti è possibile poi calcolare le derivate prime rispetto a (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Formulate così le condizioni supplementari eseguiamo un cambiamento delle variabili indipendenti introducendo nuove variabili (X_0, X_1, \dots, X_n) in modo tale che l'equazione della superficie nelle nuove variabili diventi una delle variabili uguale a zero, per esempio $X_0 = 0$, cioè l'equazione di un piano. Tale requisito implica che dobbiamo porre

$$X_0 = G(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Se scegliamo inoltre n funzioni $g_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) sufficientemente regolari (nel senso specificato nel seguito) tali che lo Jacobiano

$$\left| \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right| \quad g_0 = G \quad (k = 0, 1, \dots, n)(i = 0, 1, \dots, n)$$

sia diverso da zero in un qualche intorno della superficie S, allora le relazioni

$$\begin{aligned} X_0 &= G(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ X_1 &= g_1(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ X_n &= g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

costituiscono effettivamente un cambiamento di variabili nel suddetto intorno della superficie S.

Il problema generalizzato di Cauchy risulta quindi equivalente al problema di Cauchy nella variabile X_0 , se l'equazione differenziale per le nuove variabili X_i risulta risolubile rispetto alle derivate seconda della funzione rispetto alla variabile X_0 , cioè se il coefficiente della derivata seconda rispetto ad X_0 è diverso da zero per $X_0 = 0$.

Ponendo

$$\begin{aligned} v(X_0, X_1, \dots, X_n) &\equiv u(x_0(X_0, \dots, X_n), \\ &x_1(X_0, \dots, X_n), \dots, x_n(X_0, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} u(x_0, x_1, \dots, x_n) &= v(X_0(x_1, \dots, x_n), \\ &X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{k=0}^n \frac{\partial v}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} ; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k,l=0}^n \frac{\partial^2 v}{\partial X_k \partial X_l} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} + \sum_{k=0}^n \frac{\partial v}{\partial X_k} \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

che sostituite nella (23) forniscono

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=0}^n A_{ij}(x_0(X_0, \dots, X_n), \dots, x_n(X_0, \dots, X_n)) \times \\ &\times \sum_{k,l=0}^n \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial X_k \partial X_l} + \dots = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato esplicitamente solo i termini in cui compaiono le derivate seconde della funzione v , che sono i soli che ci interessano, cioè

$$\sum_{k,l} A'_{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial X_k \partial X_l} + \dots = 0$$

con

$$A'_{kl} = \sum_{i,j=0}^n A_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \quad A'_{00} = \sum_{i,j=0}^n A_{ij} \frac{\partial X_0}{\partial x_i} \frac{\partial X_0}{\partial x_j}.$$

Pertanto l'equazione nelle nuove variabili è risolubile rispetto a $\partial^2 v / \partial X_0^2$ per $X_0 = 0$ se e solo se ($X_0 = G(x_0, \dots, x_n)$)

$$A'_{00}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{ij} A_{ij}(x_0, \dots, x_n) \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

è diverso da zero per i valori di (x_0, x_1, \dots, x_n) tali che

$$G(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

L'equazione

$$\sum_{ij} A_{ij}(x_0, \dots, x_n) \alpha_i \alpha_j = 0 \quad (28)$$

nelle incognite α_i prende il nome di equazione caratteristica dell'equazione differenziale (23). Normalizzando le α_i in modo che $\sum_i \alpha_i^2 = 1$, l'equazione (28) definisce per ogni punto (x_0, x_1, \dots, x_n) un insieme di direzioni di coseni direttori α_i . Dalla geometria sappiamo che l'equazione (28) è l'equazione di un cono, quindi l'insieme di tali direzioni, per ogni punto, costituisce un cono che prende il nome di cono (normale) caratteristico relativo al punto (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Poichè abbiamo posto

$$X_0 = G(x_0, \dots, x_n)$$

le quantità $\partial X_0 / \partial x_i = \partial G / \partial x_i$ sono proporzionali ai coseni direttori della normale alla superficie nel punto (x_0, x_1, \dots, x_n) . Una superficie S passante per il punto (x_0, x_1, \dots, x_n) si dirà caratteristica in tale punto se la sua normale appartiene al cono normale caratteristico in tale punto. Una superficie si dice caratteristica se è caratteristica in ogni suo punto cioè se soddisfa l'equazione

$$\sum_{ij} A_{ij}(x_0, \dots, x_n) \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} = 0$$

in ogni suo punto.

Pertanto affinchè il problema generalizzato di Cauchy per una superficie S sia equivalente al problema di Cauchy (nella variabile X_0), occorre anzitutto che la superficie S non sia caratteristica in alcun suo punto (in modo da assicurare la risolubilità rispetto alla derivata seconda nella variabile X_0). Inoltre per assicurare l'esistenza ed unicità della soluzione occorre che l'equazione scritta nelle variabili X_i soddisfi le ipotesi del teorema di

Cauchy-Kowalewski. Pertanto i coefficienti ed il termine noto dell'equazione (23) devono essere funzioni analitiche. Inoltre $X_0 = G(x_0, \dots, x_n)$ deve essere una funzione analitica delle (x_0, \dots, x_n) e deve essere possibile scegliere le $g_i(x_0, \dots, x_n)$ come funzioni analitiche dei loro argomenti, in modo da garantire che i coefficienti ed il termine noto dell'equazione nelle variabili X_i siano funzioni analitiche in un intorno del punto $X_0 = 0$ e dei valori delle X_1, \dots, X_n che corrispondono a punti della superficie S . In tal caso diremo che la superficie S è analitica. Inoltre le condizioni supplementari devono essere funzioni analitiche dei loro argomenti sulla superficie S .

Se viceversa la superficie S è caratteristica in un punto (x_0, x_1, \dots, x_n) il problema generalizzato di Cauchy non ammette in generale soluzione perchè, come abbiamo già visto per il problema di Cauchy, non si possono assegnare in maniera indipendente le condizioni supplementari. Se poi le condizioni supplementari soddisfano le relazioni tra di esse che seguono dall'annullarsi del coefficiente di $\partial^2 v / \partial X_0^2$ nel punto $X_0 = 0$, e per X_1, X_2, \dots, X_n corrispondenti a (x_0, x_1, \dots, x_n) , il problema non può avere una soluzione unica, anche nel caso in cui si potesse dimostrare l'esistenza sotto ipotesi meno restrittive del teorema di Cauchy-Kowalewski (il che è possibile, come vedremo, per l'equazione delle onde), perchè l'equazione non determina $\partial^2 v / \partial X_0^2$ nel punto considerato.

Consideriamo alcuni esempi per la determinazione delle superfici caratteristiche.

1) L'equazione di Laplace in n variabili è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

pertanto $A_{ij} = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) e quindi l'equazione caratteristica è

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1.$$

L'equazione di Laplace non ha quindi superfici caratteristiche (nel campo reale).

2) L'equazione delle onde in due dimensioni spaziali è:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Indicando con x_0 la variabile t abbiamo

$$A_{00} = \frac{1}{v^2}, \quad A_{11} = A_{22} = -1, \quad A_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j.$$

L'equazione caratteristica è

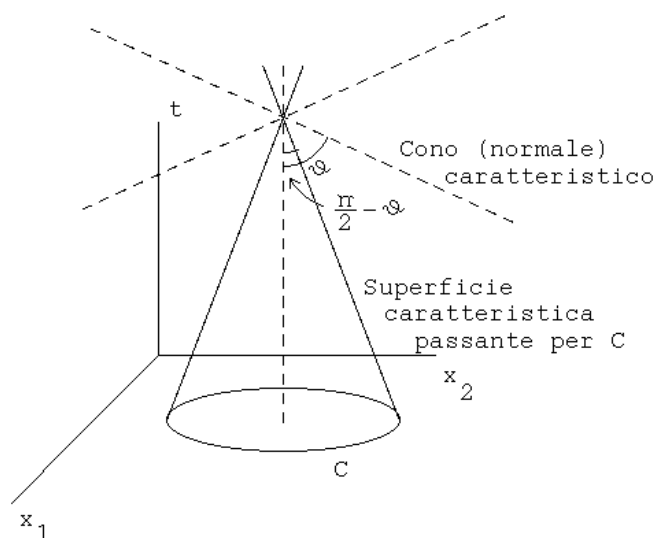
$$\alpha_0^2 - v^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$$

$$\text{e quindi } \alpha_0^2 \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) = 1 \text{ cioè } \alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 1/v^2}}.$$

Pertanto il cono caratteristico normale ha un asse parallelo all'asse t e le sue generatrici formano con l'asse t un angolo $\vartheta = \arctan 1/v$.

Pertanto una superficie caratteristica passante per una retta r del piano (x_1, x_2) è un piano passante per r e la cui normale forma un angolo ϑ con l'asse t

Se C è la circonferenza di un cerchio nel piano (x_1, x_2) la superficie caratteristica passante per C deve essere una superficie la cui normale in ogni punto deve formare un angolo ϑ con l'asse t e pertanto tale superficie è un cono circolare con asse parallelo all'asse t le cui generatrici formano con l'asse t un angolo $\pi/2 - \vartheta = \pi/2 - \arctan 1/v$.³



3) L'equazione del calore in tre dimensioni spaziali è

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

$u(\vec{x}, t)$ temperatura nel punto \vec{x} al tempo t , $\alpha = k/c\rho$ per un sistema omogeneo, k conducibilità termica, c calore specifico, ρ densità. Ponendo $x_0 = at$ si ha

$$A_{00} = 0, \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1, \quad A_{ij} = 0, i \neq j$$

³Nel caso in cui si scelga $x_0 = vt$ il cono caratteristico (normale) ha generatrici che fanno un angolo $\pi/4$ con x_0 , e la superficie caratteristica passante per C è un cono che coincide con il cono caratteristico normale poichè $\pi/2 - \vartheta = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$.

e quindi l'equazione caratteristica è

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

e quindi $\alpha_0^2 = 1$ cioè il cono caratteristico (normale) degenera nella retta parallela all'asse t e quindi le superfici caratteristiche sono tutti gli (iper)-piani $t = \text{cost.}$

Vogliamo aggiungere qualche considerazione sull'unicità della soluzione del problema di Cauchy generalizzato.

Abbiamo visto che il teorema di Cauchy-Kowalewski assicura l'unicità, oltre all'esistenza, di una soluzione analitica del problema generalizzato di Cauchy sempre che il supporto delle condizioni supplementari sia una superficie analitica S in nessun punto caratteristica. Ci si può domandare se l'unicità della soluzione del problema generalizzato di Cauchy è assicurata se la soluzione, supposto che esista, non è analitica ma solamente dotata di derivate di tutti gli ordini che compaiono nell'equazione (è ovviamente questa una richiesta minima affinché abbia senso affermare che la funzione soddisfi l'equazione) il che è equivalente ⁴ a dimostrare che se esiste una soluzione appartenente alla suddetta classe di funzioni con dati supplementari nulli sulla superficie S , essa è nulla in un intorno di S . In effetti è stato dimostrato da Holmgren che per un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee con coefficienti analitici, se esiste una soluzione del problema generalizzato di Cauchy nella classe delle funzioni dotate di derivate continue degli ordini che compaiono nelle equazioni, con dati supplementari nulli su una superficie che in nessun punto è caratteristica ⁵, tale soluzione è nulla in un qualche intorno della superficie S .

Oltre all'interesse in sè, tale risultato, assicurando l'unicità, fa ritenere ragionevole porsi il quesito dell'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy in tale classe più ampia di soluzioni. Tuttavia la risposta affermativa a tale quesito dipende dal tipo di equazione differenziale. Così ogni soluzione dell'equazione di Laplace deve essere necessariamente analitica (lo vedremo quando studieremo questa equazione) mentre per l'equazione delle onde esistono soluzioni della classe suddetta.

⁴Se u_1 e u_2 sono soluzioni dell'equazione con gli stessi dati supplementari su S , allora $u = u_1 - u_2$ è una soluzione con dati supplementari nulli su S .

⁵Precedentemente abbiamo definito le superfici caratteristiche solo per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Per un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite u_i una superficie S è caratteristica in un punto se in quel punto non è possibile risolvere il sistema delle equazioni differenziali nelle variabili X_0, X_1, \dots, X_n rispetto alla derivate massime di u_i rispetto a X_0 .

2.4 Riduzione a forma canonica in un punto e classificazione delle equazioni del secondo ordine in una funzione incognita

□ Consideriamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$\sum_{i,j} A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i B_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \dots, x_n)u + F(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (29)$$

nella funzione incognita u . Assumiamo che $A_{ij} = A_{ji}$, B_i , C e F siano reali e definiti in una regione G dello spazio (x_1, \dots, x_n) . Definiamo ora una trasformazione di coordinate ponendo

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \quad (k = 1, \dots, n), \quad (30)$$

dove a_{ki} sono certe costanti. Supponiamo che la trasformazione (30) è non-singolare, cioè che il determinante $|a_{ki}|$ non è nullo. Allora la trasformazione (30) è univoca. Nelle nuove coordinate $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ l'equazione (29) avrà la forma ⁶

$$\sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} a_{ki} a_{lj} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \dots = 0. \quad (31)$$

Sono stati scritti solo i termini con derivate del secondo ordine nella funzione incognita u . È chiaro dalla equazione (31) che sotto la trasformazione (30) delle variabili indipendenti i coefficienti delle derivate di u cambiano esattamente allo stesso modo in cui i coefficienti della forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j \quad (32)$$

cambiano quando le x_k sono sostituite dalle ξ_k secondo le formule

$$x_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i \quad (k = 1, \dots, n). \quad (33)$$

Consideriamo i coefficienti A_{ij} della forma (32) come costanti i cui valori sono gli stessi di quelli dei coefficienti $A_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ dell'equazione (29) in un certo punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ di G .

⁶ Affinchè il passaggio formale dalle derivate rispetto alle variabili indipendenti x_i ($i = 1, \dots, n$) alle derivate rispetto alle variabili indipendenti ξ_i ($i = 1, \dots, n$) sia corretto, è sufficiente supporre che la funzione u sia due volte continuamente differenziabile

Si prova in algebra che esiste una trasformazione reale non singolare (33) che riduce una qualunque forma (32) con coefficienti reali A_{ij} nella forma

$$\sum_{i=1}^m \pm \xi_i^2, \quad \text{dove } m \leq n. \quad (34)$$

Vi sono molte trasformazioni reali non singolari che riducono la forma (32) alla forma (34), ma il numero dei termini con segno positivo e il numero dei termini con segno negativo della forma (34) è determinato completamente dalla forma (32) ed è indipendente dalla scelta della trasformazione non-singolare (33). (Legge di inerzia delle forme quadratiche.)

Se una certa trasformazione (33) riduce la forma (32) alla forma (34), allora la trasformazione (30) con una matrice (a_{ik}) eguale alla trasposta inversa di quella che compare nella (33) riduce la (29) alla forma

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}^*(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \dots = 0, \quad (35)$$

dove

$$A_{ij}^*(x_1^0, \dots, x_n^0) = \pm 1 \quad \text{se } i = j \leq m$$

$$A_{ij}^*(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \quad \text{se } i \neq j \text{ o se } i = j > m.$$

Abbiamo scritto solo i termini che contengono derivate dell'ordine più alto della funzione u . La forma (35) dell'equazione (29) è chiamata la sua *forma canonica nel punto* (x_1^0, \dots, x_n^0) .

È allora possibile esibire per ogni punto (x_1^0, \dots, x_n^0) della regione G una trasformazione non singolare delle variabili indipendenti che riduce l'equazione (29) in quel punto alla sua forma canonica.

In generale la trasformazione (30) che riduce l'equazione (29) alla sua forma canonica in un dato punto (x_1^0, \dots, x_n^0) varia con questo punto, cioè essa può non ridurre l'equazione (29) in forma canonica in un punto diverso da (x_1^0, \dots, x_n^0) . Si può mostrare con esempi che non appena il numero delle variabili indipendenti è maggiore di due, in generale, impossibile esibire una trasformazione lineare con coefficienti costanti, o una qualunque trasformazione, che riduca una data equazione lineare del secondo ordine a forma canonica in una *regione arbitrariamente piccola*. Nel caso di due variabili una tale trasformazione esiste sotto ipotesi molto generali sui coefficienti dell'equazione (29). Ciò sarà dimostrato nel paragrafo successivo.

La classificazione delle equazioni del secondo ordine è basata sulla possibilità di ridurre l'equazione (29) a forma canonica in un punto.

L'equazione (29) è detta essere *ellittica* nel punto (x_1^0, \dots, x_n^0) se tutti i $A_{ii}^*(x_1^0, \dots, x_n^0)$ nella (35) sono diversi da zero ed hanno tutti lo stesso segno.

L'equazione (29) è detta essere *iperbolica* nel punto (x_1^0, \dots, x_n^0) se tutti tranne uno degli $A_{ii}^*(x_1^0, \dots, x_n^0)$ nella (35) hanno lo stesso segno, l' A_{ii}^* eccezionale

ha segno opposto e $m = n$.

L'equazione (29) è detta essere *ultraiperbolica* nel punto (x_1^0, \dots, x_n^0) se nella (29) il numero degli $A_{ii}^*(x_1^0, \dots, x_n^0)$ positivi e' maggiore di uno, il numero degli $A_{ii}^*(x_1^0, \dots, x_n^0)$ negativi e' maggiore di uno e $m = n$.

L'equazione (29) è detta essere *parabolica in senso lato* nel punto (x_1^0, \dots, x_n^0) se alcuni degli $A_{ii}^*(x_1^0, \dots, x_n^0)$ sono nulli, cioè se $m < n$.

L'equazione (29) è detta essere *parabolica in senso stretto* o, semplicemente, *parabolica* se solo uno dei coefficienti $A_{ii}^*(x_1^0, \dots, x_n^0)$ (diciamo A_{11}^*) è zero e tutti gli altri A_{ii}^* hanno lo stesso segno, ed il coefficiente di $\partial u / \partial \xi_1$ è diverso da zero.

L'equazione (29) è detta essere *ellittica, iperbolica, ultraiperbolica, ecc.*, nell'intera regione G se è ellittica, iperbolica, ultraiperbolica, ecc., in ciascun punto della regione G .

2.5 Riduzione a forma canonica in una regione di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti

Consideriamo l'equazione ⁷

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (36)$$

Qui i coefficienti A , B e C sono funzioni di x ed y che sono due volte continuamente differenziabili. Supporremo che la la funzione $u(x, y)$ sia anch'essa due volte continuamente differenziabile. Passiamo ora dalle variabili indipendenti x, y alle variabili indipendenti ξ, η . Siano le funzioni

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (37)$$

due volte continuamente differenziabili, e sia lo Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

diverso da zero nella regione che stiamo considerando. È allora possibile risolvere il sistema (37) in modo univoco per x ed y in una certa regione del piano (ξ, η) . Le risultanti funzioni $x(\xi, \eta)$ ed $y(\xi, \eta)$ saranno anch'esse

⁷In questo paragrafo consideriamo equazioni che sono un pò più generali delle equazioni lineari, utilizzando così il fatto che la procedura impiegata per ridurre un'equazione lineare a forma canonica è applicabile anche ad esse.

funzioni di ξ e di η due volte continuamente differenziabili. Nelle nuove variabili indipendenti l'equazione (36) ha la forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left[A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left[A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left[A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (39)$$

nella funzione incognita $\phi(x, y)$. Tratteremo separatamente i casi nei quali $B^2 > AC$, $B^2 < AC$ e $B^2 = AC$ in tutta la regione G . Non considereremo il caso in cui l'espressione $B^2 - AC$ cambia segno in G , o si annulla in punto di questa regione senza essere identicamente nulla in tutta la regione.

Incominciamo a considerare il caso $B^2 > AC$ (in tutti i punti della regione), cioè il caso in cui l'equazione (36) è iperbolica (secondo la definizione di iperbolicità data nel paragrafo precedente).

In questo caso l'equazione (36) è equivalente alle due equazioni

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= [-B - (B^2 - AC)^{\frac{1}{2}}] \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \\ A \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= [-B + (B^2 - AC)^{\frac{1}{2}}] \frac{\partial \phi_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (40)$$

Se il coefficiente A si annulla allora una di queste due equazioni diventa indeterminata (se, per esempio, $B > 0$, allora la seconda delle equazioni (40) diventa indeterminata). La sua indeterminazione, comunque, è facilmente rimossa moltiplicando ambo i membri per le espressioni identicamente eguali

$$[-B - (B^2 - AC)^{\frac{1}{2}}]/A \equiv C/[-B + (B^2 - AC)^{\frac{1}{2}}]. \quad (41)$$

Dato che lo Jacobiano di ϕ_1 e di ϕ_2 rispetto a x ed y è non nullo⁸, possiamo porre nell'equazione (37)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) = \phi_1(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y) = \phi_2(x, y). \end{aligned} \quad (42)$$

⁸Per la dimostrazione rimandiamo al Petrovski

Ne segue che i termini dell'equazione (38) che contengono $\partial^2 u / \partial \xi^2$ e $\partial^2 u / \partial \eta^2$ debbono annullarsi. Allo stesso tempo, il coefficiente di $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ sarà diverso da zero in tutta la regione considerata. Altrimenti, un cambiamento dalle coordinate (x, y) alle coordinate (ξ, η) diminuirebbe l'ordine dell'equazione, e, di conseguenza, il cambiamento opposto dalle coordinate (ξ, η) alle coordinate (x, y) aumenterebbe l'ordine della equazione, cosa ovviamente impossibile.

Dividendo l'equazione per il coefficiente di $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ la riduciamo alla sua forma canonica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (43)$$

in tutta la regione di definizione di $\phi_1(x, y)$ e $\phi_2(x, y)$. Se poniamo $\xi = \alpha + \beta$ e $\eta = \alpha - \beta$, l'equazione (43) diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (44)$$

Anche questa forma è detta canonica.

Se una equazione iperbolica è stata ridotta nella forma canonica (43), si può talvolta integrarla in forma chiusa, cioè trovare una formula che dà tutte le soluzioni dell'equazione.

Esempio La trasformazione

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta$$

riduce l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Quindi

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) = \phi_1(x + y) + \psi_1(x - y),$$

dove ϕ e ψ sono due arbitrarie funzione due volte continuamente differenziabili.

Se

$$B^2 = AC$$

in tutta la regione G allora l'equazione (36) è parabolica secondo la definizione di parabolicità della sezione precedente. In questo caso la forma canonica risulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

Se infine

$$B^2 > AC$$

in tutta la regione G allora l'equazione (36) e' ellittica secondo la definizione di ellitticit  della sezione precedente con forma canonica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

Questi ultimi due casi sono trattati in dettaglio sul Petrovski.

Abbiamo ridotto la nostra equazione in forma canonica in un intorno di (x_0, y_0) in cui esiste una soluzione analitica dell'equazione (40) con derivate non nulle. Si pu  mostrare con considerazioni pi  intricate che una tale riduzione   possibile senza supporre che $A(x, y)$, $B(x, y)$ e $C(x, y)$ siano analitiche.   sufficiente supporre che questi coefficienti siano due volte continuamente differenziabili. \square

2.6 Problemi ben posti

Abbiamo già detto che affinché un problema formulato con equazioni differenziali (in particolare lineari) sia determinato, cioè affinché una sua soluzione, se esiste, sia unica, occorre formulare alcune condizioni supplementari (non necessariamente di Cauchy).

Inoltre affinché il problema sia possibile, cioè affinché esista una soluzione, occorre specificare alcune proprietà di regolarità delle funzioni coefficienti e termine noto, per le equazioni lineari, e delle funzioni che definiscono le condizioni supplementari nonché del supporto delle condizioni supplementari (nel caso particolare del problema generalizzato di Cauchy la superficie supporto non deve essere in alcun punto caratteristica ⁹).

Ma occorre anche esigere un altro requisito affinché il problema sia ben posto: occorre che la soluzione sia continua rispetto ai dati supplementari cioè che una piccola variazione dei dati supplementari possa solo cambiare di poco i valori della funzione nella regione in cui essa è determinata dai dati supplementari. Più precisamente. poichè per le equazioni differenziali a derivate parziali i dati supplementari sono formulati assegnando un insieme di funzioni su un opportuno supporto, la continuità si formula nel modo seguente:

$\forall \varepsilon, \exists y$ tale che se il sup del modulo della variazione di ciascuna funzione dato supplementare è minore di y , allora il sup del modulo della variazione della soluzione è minore di ε , sup calcolato per i punti della regione in cui la soluzione è determinata dai dati supplementari.

La motivazione del requisito di continuità è ovvia. Poichè le condizioni supplementari in qualunque problema delle scienze naturali, o di economia, di sociologia ecc., sono conosciuti solo approssimativamente con un errore che si può rendere sufficientemente piccolo ma non nullo, se non ci fosse continuità rispetto ai dati supplementari la soluzione potrebbe variare di una quantità arbitrariamente grande per piccole variazioni dei dati supplementari ed essere quindi di fatto completamente indeterminata.

Diremo, pertanto, che un problema è ben posto (secondo Hadamard) se è formulato in modo da garantire esistenza, unicità e continuità della soluzione rispetto ai dati supplementari. Faremo ora vedere che il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace non è ben posto, utilizzando un controesempio trovato da Hadamard per mostrare che la soluzione del problema non è continua rispetto ai dati supplementari.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy: trovare una soluzione

⁹Osserviamo che per l'equazione del calore i piani $t=\text{cost.}$ sono caratteristici e quindi il problema di Cauchy per $t=\text{cost.}$ non è possibile. Tuttavia esiste ed è unica la soluzione assegnando come dato supplementare $u(t_0, \vec{x}) = f(\vec{x})$ con $f(\vec{x})$.

dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= \frac{1}{n^k} \sin ny \end{aligned}$$

con n, k interi positivi.

Facciamo vedere che la soluzione di tale problema può essere scritta nella forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Infatti sostituendo nell'equazione si ha

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

e quindi

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\alpha^2 Y.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} & \alpha > 0 \\ Y(y) &= C \sin \alpha y + D \cos \alpha y \end{aligned}$$

e quindi

$$u(x, y) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})(C \sin \alpha y + D \cos \alpha y).$$

Poichè $u(0, y) = 0$ deve essere $A = -B$ e quindi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})(C \sin \alpha y + D \cos \alpha y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 2\alpha(C \sin \alpha y + D \cos \alpha y). \end{aligned}$$

Poichè $\partial u(0, y)/\partial x = \sin ny/n^k$ si ha $D = 0, \alpha = n,$
 $C = 1/2n^{k+1}$.

Pertanto la soluzione del problema è

$$u(x, y) = \frac{\sin ny}{n^{k+1}} \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \right)$$

Poichè

$$\left| \frac{\partial u(0, y)}{\partial y} \right| < \frac{1}{n^k}$$

segue che per n sufficientemente grande il modulo di $\frac{\partial u(0,y)}{\partial y}$ è arbitrariamente piccolo. D'altra parte il modulo della soluzione assume valori arbitrariamente piccoli non appena n è sufficientemente grande. Supponiamo ora di aver trovato la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Laplace con condizioni supplementari

$$u(0, y) = \varphi_0(y) \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \varphi_1(y)$$

ed indichiamo con $u_0(x, y)$ tale soluzione (ovviamente tale soluzione non è in generale il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y). Allora la funzione

$$v(x, y) = u_0(x, y) + \frac{\sin ny}{n^{k+1}} \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \right)$$

è soluzione del problema di Cauchy con dati supplementari

$$v(0, y) = \varphi_0(y) \quad \frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = \varphi_1(y) + \frac{1}{n^k} \sin ny.$$

Pertanto un cambiamento arbitrariamente piccolo dei dati supplementari dovuto all'aggiunta della funzione $\sin ny/n^k$ alla φ_1 dà luogo ad un cambiamento arbitrariamente grande del modulo della soluzione per x arbitrariamente piccolo non appena n è sufficientemente grande. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Laplace non è continua rispetto ai dati supplementari ed il problema non è ben posto. Lo stesso si può dimostrare per l'equazione di Laplace per un numero qualsiasi di variabili indipendenti, e più in generale per le equazioni di tipo ellittico. Invece il problema di Dirichelet per l'equazione di Laplace è ben posto perchè, come vedremo, la soluzione esiste, è unica ed è continua rispetto al dato supplementare (soluzione assegnata sul bordo di una regione connessa).

Dalla continuità segue la possibilità di definire soluzioni generalizzate. È opportuno preannunciare che per il problema di Dirichelet per l'equazione di Laplace ogni soluzione generalizzata è anche soluzione.

2.7 La nozione di soluzione generalizzata

□ Nei paragrafi precedenti abbiamo discusso la ragionevolezza del problema di Cauchy per condizioni iniziali sufficientemente regolari. Tuttavia, di solito, i problemi fisici conducono a condizioni iniziali che non hanno una regolarità tale da giustificare l'affermazione che il problema in questione abbia soluzione. Spesso accade che un problema di condizioni al contorno non abbia soluzioni differenziabili se le condizioni non sono continue e differenziabili un

numero sufficiente di volte. In questo caso l'uso del concetto di "soluzione generalizzata" delle equazioni differenziali si rivela essere estremamente utile.

S.L.Sobolev è stato il primo ad introdurre il concetto di soluzione generalizzata di una equazione differenziale e ad applicarlo in modo sistematico. Secondo la sua definizione,

chiameremo un sistema di funzioni u_1, u_2, \dots, u_N una soluzione generalizzata di un sistema di equazioni differenziali in una regione G , se esiste una successione infinita di soluzioni $(u_1^{(k)}, \dots, u_N^{(k)})$ di questo sistema che converge uniformemente a (u_1, \dots, u_n) , cioè se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{P \in G} \sum_{i=1}^N |u_i^{(k)}(P) - u_i| = 0. \quad (45)$$

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$\partial^2 u / \partial x \partial y = 0.$$

Ogni funzione $u(x, y)$ della forma

$$u = \phi(x) + \psi(y)$$

sarà una soluzione ordinaria (non generalizzata) di questa equazione purchè le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(y)$ siano due volte continuamente differenziabili. Sappiamo che è possibile rappresentare arbitrarie funzioni $\phi(x)$ e $\psi(y)$ che siano continue (ma non necessariamente differenziabili) in $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$, rispettivamente, come limiti uniformi di successioni di funzioni due volte continuamente differenziabili $\phi^k(x)$ e $\psi^k(y)$, rispettivamente. Perciò la somma

$$\phi(x) + \psi(y)$$

di due funzioni continue $\phi(x)$ e $\psi(y)$ rappresenta una soluzione generalizzata dell'equazione nel senso indicato sopra.

S.L.Sobolev ha provato l'esistenza e l'unicità di soluzioni generalizzate per i più comuni problemi di condizioni al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali.

L'introduzione di soluzioni generalizzate col metodo indicato sopra non estende la classe delle soluzioni ordinarie sia delle equazioni ellittiche sia di quelle paraboliche. Tuttavia, nel caso delle equazione iperboliche l'estensione è di importanza fondamentale.

Per poter assicurare l'esistenza di soluzioni ordinarie nel caso dei problemi fondamentali di condizioni al contorno, è necessario imporre rigide condizioni di regolarità alle funzioni che prescriviamo sul contorno. Ciò che rende conveniente l'introduzione del concetto di soluzione generalizzata è il fatto

che, per poter assicurare la loro esistenza, non dobbiamo imporre condizioni di regolarità egualmente rigide sulle funzioni prescritte sul contorno. Per illustrare questo punto risolviamo il problema di Cauchy per l'equazione

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2 \quad (46)$$

con condizioni iniziali

$$u(0, x) = \phi(x), \quad u'_t(0, x) = \psi(x). \quad (47)$$

Si può provare facilmente che la soluzione di questo problema è data dalla funzione

$$u(t, x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi. \quad (48)$$

Questa formula dà la soluzione ordinaria dell'equazione (46) solo sotto l'ipotesi che $\phi(x)$ abbia derivate continue fino al secondo ordine e che $\psi(x)$ abbia derivata del primo ordine continua. Contemporaneamente, per arbitrarie funzioni continue $\phi(x)$, $\phi'(x)$ e $\psi(x)$, la formula (48) dà una soluzione generalizzata dell'equazione (46) che soddisfa le condizioni (47).

È essenziale considerare le soluzioni generalizzate poichè i valori delle funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono noti solo approssimativamente. La corrispondente funzione $u(t, x)$ dell'equazione (46) rappresenta solo una approssimazione alla soluzione esatta del problema. Che questa approssimazione sia una soluzione ordinaria o generalizzata dell'equazione (46) non ha importanza. Ciò che importa è che questa approssimazione differisca poco dalla soluzione vera se le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ differiscono dalle vere condizioni $u(0, x)$ e $u'_t(0, x)$ di una quantità uniformemente piccola.

Osservazione. S.L.Sobolev chiama soluzione generalizzata di una equazione differenziale in una regione G anche una qualunque funzione u che è il limite, nel senso della convergenza in media, di una successione di soluzioni ordinarie di questa equazione, cioè se $u^{(k)}$ è una soluzione ordinaria, allora una soluzione generalizzata è una funzione u per la quale

$$\int_G [u - u^{(k)}]^2 d\sigma \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty.$$

Le soluzioni generalizzate definite in questo modo possono essere discontinue.

2.8 Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Unicità della soluzione

La funzione $u(t, x_1, x_2)$ soddisfi l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (49)$$

nei punti dell'interno di un cono circolare K il cui asse è parallelo all'asse t , il cui vertice è nel punto A , e le cui generatrici formano un angolo $\alpha = 45^\circ$ con l'asse t . Inoltre, la funzione $u(t, x_1, x_2)$ e tutte le sue derivate fino a quelle del secondo ordine sia continua all'interno e sulla frontiera di K .

Allora il valore di $u(t, x_1, x_2)$ nel punto A è determinato univocamente dai valori di u e di $\partial u/\partial n$ alla base del cono nel piano $t = t_0$.

In questo caso la superficie caratteristica è il cono K che, solo per questa particolare scelta delle unità di misura, è coincidente con il cono normale caratteristico (vedi nota a pag.22).

Il teorema è vero sia se la coordinata t del punto A è maggiore di t_0 sia se essa è minore di t_0 .

Possiamo sempre supporre che $t_0 = 0$. Il caso di un t_0 arbitrario si riduce a quest'ultimo se passiamo dalla variabile indipendente t alla nuova variabile indipendente $t^* = t - t_0$. Questa trasformazione non cambia la forma dell'equazione.

Supponiamo di assegnare nel piano $t = 0$ una regione G_0 la cui frontiera sia L . Costruiamo coni K con basi nella regione G_0 , con gli assi paralleli all'asse t , e le cui generatrici formano un angolo di $\pm 45^\circ$ con l'asse t . Segue dal nostro teorema che, prescrivendo i valori di u e di $\partial u/\partial t$ nella regione G_0 , resta univocamente determinata la soluzione dell'equazione (49) nella regione G dello spazio (t, x_1, x_2) che è riempita dai coni K . Così, ad esempio, assegnando u e $\partial u/\partial t$ nel quadrato $|x_1| < a, |x_2| < a$ si determina univocamente una soluzione $u(t, x_1, x_2)$, due volte continuamente differenziabile, dell'equazione (49) all'interno di due piramidi con il quadrato come base comune, con i lati che formano un angolo di 45° con questa base comune. Assegnare i valori di u e di $\partial u/\partial t$ sulla base di un cono K determina u all'interno e sulla frontiera di K .

Assegnando i valori di u e di $\partial u/\partial t$ in un cerchio G_0 nel piano x_1, x_2 non è determinata la soluzione $u(t, x_1, x_2)$ dell'equazione (49) in qualsiasi punto B esterno alla totalità dei coni con basi nel cerchio G_0 , con assi paralleli all'asse t e le cui generatrici formano un angolo di 45° con l'asse t . Per provare questa asserzione è sufficiente mostrare che esiste una soluzione $\tilde{u}(t, x_1, x_2)$ per la quale \tilde{u} e $\partial \tilde{u}/\partial t$ sono eguali a zero in G_0 e per la quale $\tilde{u}(B) \neq 0$. Per costruire un tale soluzione osserviamo che, se $f(x)$ è una qualunque funzione due volte continuamente differenziabile e se $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, allora la funzione

$$f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \quad (50)$$

è una soluzione dell'equazione (49).

La funzione (50) è costante in tutti i punti dei piani

$$t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = C. \quad (51)$$

ciascuno dei quali forma un angolo di 45° con l'asse t . Scegliamo α_1 ed α_2 in modo tale che il piano della famiglia (51) che passa per il punto B non interseca il cerchio G_0 . Ora si può scegliere una funzione due volte continuamente differenziabile $f(x)$ tale che $f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ è diversa da zero nel punto B e tale che f e la sua derivata prima si annullano in G_0 . Allora

$$\tilde{u}(t, x_1, x_2) = f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

è la soluzione che cercavamo.

La prova dell'unicità che daremo nel seguito si estende alla soluzione due volte continuamente differenziabile dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

per un qualunque valore di n . Sarebbe necessario sostituire il cono tridimensionale menzionato nella formulazione del teorema con un cono nello spazio a $n + 1$ dimensioni con l'asse parallelo all'asse t e le cui generatrici formano un angolo di 45° con l'asse t . Per $n = 1$ questo cono si riduce ad un triangolo con la base parallela all'asse x e con i lati che formano con questo asse un angolo di 45° .

Prova del teorema di unicità. Supponiamo che esistano nell'interno di K e sulla sua superficie due soluzioni due volte continuamente differenziabili $u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2)$ dell'equazione (49). I valori di u_1 e u_2 ed i valori u'_{1t} e u'_{2t} coincidano sulla base di K . Allora la differenza

$$u(t, x_1, x_2) = u_1(t, x_1, x_2) - u_2(t, x_1, x_2)$$

deve soddisfare l'equazione omogenea (49) nell'interno di K , e $u(t, x_1, x_2)$ e $u'_t(t, x_1, x_2)$ si debbono annullare sulla superficie di K . Avremo provato il nostro teorema di unicità se possiamo mostrare che $u(t, x_1, x_2) = 0$ al vertice di K .

Per provarlo integriamo l'espressione

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

sull'interno di K . Questa espressione si annulla in tutti i punti dell'interno di K , se la funzione u soddisfa l'equazione (49). Poichè

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint_K \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dt dx_1 dx_2 \\
&= \iiint_K \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right\} dt dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Questo integrale triplo può esser trasformato in integrale doppio usando il teorema di Green. Indichiamo con K_1 la superficie del cono K senza la sua base C . Basta considerare l'integrale su K_1 essendo quello su C nullo poichè in tutti i punti di C

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

per le condizioni iniziali assegnate. Abbiamo così¹⁰

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \iint_{K_1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] \cos(n, t) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, x_1) - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, x_2) \right\} d\sigma
\end{aligned} \tag{52}$$

Su K_1 superficie del cono senza la base

$$\cos^2(n, t) - \cos^2(n, x_1) - \cos^2(n, x_2) = 0 \tag{53}$$

Moltiplicando e dividendo l'integrando per $\cos(n, t)$ e usando la (53) otteniamo dalla (52)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2 \cos(n, t)} \iint_{K_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, t) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, t) \right)^2 \right\} d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

¹⁰Richiamiamo l'attenzione del lettore sul fatto che trasformando l'integrale

$$\iiint_K \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dt dx_1 dx_2$$

abbiamo fatto uso della continuità delle derivate prime di u dentro K e sulla sua frontiera e della integrabilità su K delle derivate seconde di u . Le derivate seconde di u sono sempre integrabili su K se esse sono continue in K e sulla sua frontiera.

dove $\cos(n, t)$ è stato portato fuori dal segno di integrale, poichè questa quantità è costante su K_1 (essendo $\cos(n, t) = 1/\sqrt{2}$ per $t > t_0$ e $\cos(n, t) = -1/\sqrt{2}$ per $t < t_0$).

La (54) implica che sulla superficie del cono K (senza la sua base)

$$\frac{u'_t}{\cos(n, t)} = \frac{u'_{x_1}}{\cos(n, x_1)} = \frac{u'_{x_2}}{\cos(n, x_2)} = v. \quad (55)$$

Se indichiamo con m la direzione di una qualsiasi delle generatrici di K , allora, per la (55), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial m} &= u'_t \cos(m, t) + u'_{x_1} \cos(m, x_1) + u'_{x_2} \cos(m, x_2) \\ &= v[\cos(n, t) \cos(m, t) + \cos(n, x_1) \cos(m, x_1) \\ &\quad + \cos(n, x_2) \cos(m, x_2)] \\ &= v \cos(m, n) = 0. \end{aligned}$$

Così sulla superficie del cono K la derivata di u nella direzione di una generatrice si annulla. Perciò la funzione u si annulla nel vertice del cono, dato che essa si annulla nei punti della sua base. Abbiamo allora conseguito la prova dell'unicità. \square

2.9 La soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde

Sia $u(\vec{x}, t)$ soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (56)$$

con le condizioni iniziali $u(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x})$, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\vec{x})$.

Supporremo che la $u(\vec{x}, t)$ abbia proprietà di regolarità sufficienti per la validità delle operazioni che andremo ad eseguire.

Applichiamo la trasformata di Fourier rispetto alla variabile tempo all'equazione e scambiando ∇^2 con l'integrale sul tempo avremo

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{u}(\vec{x}, \omega) + k^2 \tilde{u}(\vec{x}, \omega) &= -4\pi \tilde{f}(\vec{x}, \omega) \\ k = \frac{|\omega|}{v}, \quad \tilde{u}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int e^{i\omega t} u(\vec{x}, t) dt. \end{aligned} \quad (57)$$

Sia $G(\vec{x}, 0)$ una soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 G(\vec{x}, 0) + k^2 G(\vec{x}, 0) = 0 \quad (58)$$

in ogni punto ad eccezione dell'origine ed indipendente da θ e ϕ . Pertanto avremo

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G(r, 0)}{\partial r} \right) + k^2 G(r, 0) = 0.$$

Poichè $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rG)}{\partial r^2}$ abbiamo

$$\frac{\partial^2 rG(r, 0)}{\partial r^2} + k^2 rG(r, 0) = 0$$

e pertanto l'equazione (58) ha due soluzioni linearmente indipendenti

$$G_+(r, 0) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad G_-(r, 0) = \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad r = |\vec{x}|. \quad (59)$$

Consideriamo ora soluzioni della (58) in ogni punto eccetto il punto $\vec{x} = \vec{x}'$, e che siano indipendenti dagli angoli θ e ϕ in sistema di coordinate sferiche con l'origine nel punto $\vec{x} = \vec{x}'$. Poichè l'equazione (58) è invariante per traslazione, queste soluzioni si ottengono dalle (59) con una traslazione che porta l'origine nel punto $\vec{x} = \vec{x}'$, cioè

$$G_+(|\vec{x} - \vec{x}'|, 0) = \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad G_- (|\vec{x} - \vec{x}'|, 0) = \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (60)$$

Le funzioni G_{\pm} prendono il nome di funzioni di Green dell'equazione (58).

Osserviamo che essendo $\tilde{u}(\vec{x}, \omega)$ soluzione della (57) e $G(\vec{x}, \vec{x}')$ soluzione della (58) in ogni \vec{x} eccetto $\vec{x} = \vec{x}'$

$$\begin{aligned} & \int_{V-V_\varepsilon} \left(\tilde{u}(\vec{x}', \omega) \nabla^2 G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') - G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') \nabla^2 \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \right) d^3 x' = \\ & \int_{V-V_\varepsilon} \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \left(\nabla^2 G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') + k^2 G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') \right) - G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') \left(\nabla^2 \tilde{u}(\vec{x}', \omega) + k^2 \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \right) d^3 x' = \\ & \hspace{15em} (61) \end{aligned}$$

$$= 4\pi \int_{V-V_\varepsilon} G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3 x'$$

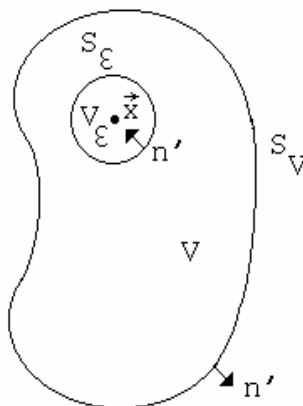
dove V_ε è una sfera con centro nel punto $\vec{x} = \vec{x}'$ e raggio ε . Applicando la II identità di Green ¹¹ al primo membro della (61) abbiamo

$$\int_{S_V} \left(\tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} \right) dS' +$$

¹¹Se $g \in C^1$ ed $h \in C^2$ abbiamo che

$$\begin{aligned} & \int_A g \nabla^2 h d^3 x' = \int_A \operatorname{div}(g \operatorname{grad} h) d^3 x' - \int_A \nabla g \cdot \nabla h d^3 x' \quad \text{e quindi} \\ & \int_A g \nabla^2 h d^3 x' = \int_{S_A} g \frac{\partial h}{\partial n} dS' - \int_A \nabla g \cdot \nabla h d^3 x' \quad \text{I identità di Green.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varepsilon} \left(\tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial G_\pm(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} \right) dS' \\ &= 4\pi \int_{V-V_\varepsilon} G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' \end{aligned}$$



da cui segue

$$\begin{aligned} & \int_{S_V} \left(\tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial G_\pm(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} \right) dS' \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left(\tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial G_\pm(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} \right) dS' \\ &= 4\pi \int_V G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' \end{aligned}$$

poichè per definizione

$$\int_V G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V-V_\varepsilon} G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

Osserviamo che posto $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n'} dS' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{\pm ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x} + \vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi} \varepsilon^2 d\Omega =$$

Se $g \in C^2$ ed $h \in C^2$ usando la prima identità di Green abbiamo

$$\int_A (g \nabla^2 h - h \nabla^2 g) d^3x' = \int_{S_A} \left(g \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS' \quad \text{II identità di Green.}$$

A regione connessa, S_A bordo della regione A con S_A unione finita di superfici connesse sufficientemente regolari.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\pm ik\varepsilon} \int \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x} + \vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi} d\Omega = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\pm ik\varepsilon} 4\pi\varepsilon \left. \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x} + \vec{\xi}^*, \omega)}{\partial \xi} \right|_{\vec{\xi} = -\vec{\xi}^*, |\vec{\xi}| = \varepsilon} = 0 \\
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G_\pm(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \tilde{u}(\vec{x} + \vec{\xi}) dS' = 4\pi \tilde{u}(\vec{x}, \omega)
\end{aligned}$$

Nei calcoli precedenti abbiamo fatto uso del teorema della media ($\vec{\xi} = \vec{\xi}^*$ è il valore di $\vec{\xi}$ del teorema della media) e del fatto che $\tilde{u}(\vec{x}, \omega)$, $\frac{\partial \tilde{u}(\vec{x} + \vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi}$ sono funzioni continue. Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\vec{x}, \omega) &= \int_V G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_V} \left(G_\pm(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} - \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial G_\pm(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right) dS'
\end{aligned}$$

III identità di Green.

Per $\omega > 0$ usiamo per $\tilde{u}(\vec{x}, \omega)$ la III identità di Green con al secondo membro la $G_+(\vec{x}, \vec{x}')$, mentre per $\omega < 0$ usiamo per $\tilde{u}(\vec{x}, \omega)$ la III identità di Green con $G_-(\vec{x}, \vec{x}')$ al secondo membro.

Pertanto

$$\begin{aligned}
u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{u}(\vec{x}, \omega) d\omega = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} d\omega \int_V \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^0 d\omega \int_V \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega t}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{\infty} d\omega \int_{S_V} \left(\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} - \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial}{\partial n'} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) e^{-i\omega t} dS' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{-\infty}^0 d\omega \int_{S_V} \left(\frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} - \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{\partial}{\partial n'} \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) e^{-i\omega t} dS' \right) \right]
\end{aligned}$$

Poichè $k = \frac{|\omega|}{v}$, per $\omega > 0$ si ha $e^{i(k|\vec{x}-\vec{x}'|-\omega t)} = e^{-i\omega(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{v})}$,

per $\omega < 0$ si ha $e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|-i\omega t} = e^{-i|\omega|\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{v}-i\omega t} = e^{-i\omega(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{v})}$.

Pertanto scambiando l'integrale su $d\omega$ con gli integrali su d^3x' e dS' rispettivamente abbiamo

$$\begin{aligned}
u(\vec{x}, t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_V \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})} \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d\omega \right. \\
& + \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_V} \frac{dS'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})} \frac{\partial \tilde{u}(\vec{x}', \omega)}{\partial n'} d\omega \right. \\
& - \int_{S_V} dS' \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\vec{x}', \omega) \frac{i\omega}{v} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} n' \cdot \nabla' |\vec{x} - \vec{x}'| d\omega + \\
& \left. \left. + \int_{S_V} \frac{dS'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} n' \cdot \nabla' |\vec{x} - \vec{x}'| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\vec{x}', \omega) e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})} d\omega \right) \right].
\end{aligned}$$

Ponendo $\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}$ si ha che

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d\omega = f(\vec{x}', \tau), \\
& \text{e } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n'}(\vec{x}', \omega) d\omega = \\
& = \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \tilde{u}(\vec{x}', \omega) d\omega = \frac{\partial}{\partial n'} u(\vec{x}', \tau), \\
& \frac{i}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{u}(\vec{x}', \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = -\frac{1}{v} \frac{\partial u(\vec{x}', \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}}.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
u(\vec{x}, t) = & \int_V \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \\
& + \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_V} \frac{dS'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial u(\vec{x}', \tau)}{\partial n'} \Big|_{\tau=t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}} \right. \\
& + \frac{1}{v} \int_{S_V} dS' \frac{\partial u(\vec{x}', \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}} \frac{n' \cdot \nabla' |\vec{x} - \vec{x}'|}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
& \left. + \int_{S_V} dS' \frac{n' \cdot \nabla' |\vec{x} - \vec{x}'|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} u(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}) \right). \tag{62}
\end{aligned}$$

Scegliamo nella (62) come regione V la sfera solida (palla) di centro $\vec{x}' = \vec{x}$ e raggio vt ($t > 0$). Per \vec{x}' sulla superficie di questa sfera abbiamo $|\vec{x} - \vec{x}'| = vt$ e quindi $\tau = 0$: Negli integrali di superficie poniamo $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}$ e quindi $|\vec{\xi}| = vt$. Abbiamo allora

$$n' \cdot \nabla' |\vec{x} - \vec{x}'| = \frac{\partial}{\partial \xi} \xi = 1$$

e quindi, indicando con $V_{\vec{x},vt}$ il volume di questa sfera solida e con $S_{\vec{x},vt}$ la sua superficie

$$u(\vec{x}, t) = \int_{V_{\vec{x},vt}} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \left(\int \frac{1}{\xi} \frac{\partial u(\vec{x} + \vec{\xi}, 0)}{\partial \xi} \xi^2 d\Omega + \right. \\ \left. \frac{1}{v} \int \frac{\partial u(\vec{x} + \vec{\xi}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\xi^2 d\Omega}{\xi} + \int u(\vec{x} + \vec{\xi}, 0) d\Omega \right)_{\xi=vt}$$

Raccogliendo insieme il primo ed il terzo integrale di superficie

$$u(\vec{x}, t) = \int_{V_{\vec{x},vt}} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \int \xi u(\vec{x} + \vec{\xi}, 0) d\Omega \right)_{\xi=vt} \\ + \frac{1}{4\pi v^2} \int_{S_{\vec{x},vt}} \frac{\partial u(\vec{x}', t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{dS'}{t} = \\ \int_{V_{\vec{x},vt}} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi v^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{u(\vec{x}', 0)}{t} dS' + \int_S \frac{\partial u(\vec{x}', t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{dS'}{t} \right)$$

Poichè $u(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x})$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \varphi_1(\vec{x})$ abbiamo per $t \geq 0$

$$\int_{V_{\vec{x},vt}} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi v^2} \left(\int_S \frac{\varphi_1(\vec{x}')}{t} dS' + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\varphi_0(\vec{x}')}{t} dS' \right) \quad (63)$$

dove S sta per $S_{\vec{x},vt}$. Notiamo che se $f(\vec{x}', t) = 0$ per $t < 0$

$$\int_{|\vec{x} - \vec{x}'| \geq vt} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = 0 \text{ perchè } t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v} < 0$$

e quindi se $f(\vec{x}', t) = 0$ per $t < 0$ possiamo anche scrivere per $t > 0$, $u(\vec{x}, t) =$

$$\int_{R^3} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi v^2} \left(\int_S \frac{\varphi_1(\vec{x}')}{t} dS' + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\varphi_0(\vec{x}')}{t} dS' \right)$$

Se inoltre $\varphi_1(\vec{x}) = 0$ e $\varphi_0(\vec{x}) = 0$

$$u(\vec{x}, t) = \int_{R^3} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad t > 0$$

Ricordiamo che abbiamo ottenuto la relazione (63) per

$t > 0$ nell'ipotesi che $u(\vec{x}, t)$ sia soluzione dell'equazione (56) con dati iniziali $u(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x})$, $\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(\vec{x})$ e che inoltre le proprietà di regolarità di

$\varphi_0(\vec{x})$ e di $\varphi_1(\vec{x})$ garantiscono la validità delle operazioni eseguite precedentemente sulla $u(\vec{x}, t)$.

Per sapere quali proprietà devono avere $\varphi_0(\vec{x})$, $\varphi_1(\vec{x})$ ed $f(\vec{x}, t)$ affinché la (63) sia soluzione dell'equazione (56) occorre sostituire la (63) nell'equazione (56) e determinare le proprietà di $\varphi_0(\vec{x})$, $\varphi_1(\vec{x})$ ed $f(\vec{x}, t)$ che assicurano che $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e $\nabla^2 u$ siano funzioni continue e che inoltre $\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t)$.

Nel caso dell'equazione omogenea ($f(\vec{x}, t) = 0$) Petrovski mostra che se $\varphi_0(\vec{x}) \in C^3$ e $\varphi_1(\vec{x}) \in C^2$ la (62) (con $f(\vec{x}, t) = 0$) soddisfa l'equazione omogenea. Inoltre Petrovski mostra anche che la $u(\vec{x}, t)$ definita dalla (63) (con $f(\vec{x}, t) = 0$) ha la proprietà che

$$u(\vec{x}, t_0) = \varphi_0(\vec{x}) \quad \text{e che} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) \right|_{t=t_0} = \varphi_1(\vec{x}).$$

Nel caso dell'equazione non omogenea si vede facilmente che l'integrale di volume per $t = 0$ è zero e che la derivata rispetto al tempo dell'integrale di volume, calcolato per $t = 0$, è zero. Pertanto anche per l'equazione non omogenea la (63) definisce una funzione che ha la proprietà

$$u(\vec{x}, t_0) = \varphi_0(\vec{x}) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) \right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Per la dimostrazione che la (63) soddisfa l'equazione non omogenea rimandiamo a quanto sarà mostrato per l'equazione di Laplace $\nabla^2 v = -4\pi f$.

Notiamo che se le condizioni iniziali sono assegnate ad un tempo t_0 , cioè

$$u(\vec{x}, t_0) = \varphi_0(\vec{x}) \quad \left. \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \varphi_1(\vec{x})$$

si sceglierà nella (62) come regione V una sfera solida di raggio $v(t - t_0)$ e si otterrà di conseguenza la soluzione per $t \geq t_0$

$$u(\vec{x}, t) = \int_{V_{\vec{x}, v(t-t_0)}} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' + \frac{1}{4\pi v^2} \left(\int_{S_{\vec{x}, v(t-t_0)}} \frac{\varphi_1(\vec{x}')}{t - t_0} dS' \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{\vec{x}, v(t-t_0)}} \frac{\varphi_0(\vec{x}')}{t - t_0} dS' \right)$$

$$\text{Se } \left| \frac{f(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right| < \Phi(\vec{x}) \text{ funzione sommabile, e}$$

$$\left| \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right| < \Phi_1(\vec{x}) \text{ funzione sommabile e}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(\vec{x}, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$$

allora $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{R^3} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = 0$

e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial t} \int_{R^3} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = 0.$

Pertanto in tali ipotesi l'espressione

$$u(\vec{x}, t) = \int_{R^3} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \quad (64)$$

è la soluzione dell'equazione non omogenea con le condizioni iniziali (asintotiche) per $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(\vec{x}, t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) = 0.$$

Se, sempre nelle stesse ipotesi sulla $f(\vec{x}, t)$, il problema si pone nei termini: determinare la soluzione dell'equazione non omogenea che, per $t \rightarrow -\infty$, tende ad una soluzione dell'equazione omogenea che possiamo scrivere nella forma

$$u_0(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k + c.c.$$

allora la soluzione è

$$u(\vec{x}, t) = \int_{R^3} \frac{f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' + u_0(\vec{x}, t)$$

Osserviamo che se nella III identità di Green per $la \tilde{u}(\vec{x}, \omega)$ scegliamo per $\omega > 0$ al secondo membro la $G_-(\vec{x}, \vec{x}')$ e per $\omega < 0$ scegliamo al secondo $G_+(\vec{x}, \vec{x}')$ allora nella (62) otterremo $f(\vec{x}', t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})$ al posto di $f(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})$ e risulta $\tau = t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}$. Allora per $t < 0$ scegliamo come regione V una sfera solida con centro $\vec{x}' = \vec{x}$ e raggio $v|t|$ ed otterremo la soluzione per $t < 0$

$$u(\vec{x}, t) = \int_{V_{\vec{x}, v|t|}} \frac{f(\vec{x}', t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' + \frac{1}{4\pi v^2} \left(\int_{S_{\vec{x}, v|t|}} \frac{\varphi_1(\vec{x}')}{|t|} dS' \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial |t|} \int_{S_{\vec{x}, v|t|}} \frac{\varphi_0(\vec{x}')}{|t|} dS' \right)$$

con condizioni

$$u(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x}) \quad \left. \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\vec{x}).$$

$$\text{Se } \left| \frac{f(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right| < \Phi(\vec{x}) \text{ sommabile, e } \left| \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right| < \Phi_1(\vec{x})$$

$$\text{sommabile, } \frac{\partial f}{\partial t} \text{ continua, } \lim_{t \rightarrow \infty} f(\vec{x}, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$$

allora

$$u(\vec{x}, t) = \int_{R^3} \frac{f\left(\vec{x}' \cdot t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x'$$

è la soluzione dell'equazione non omogenea con le condizioni asintotiche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(\vec{x}, t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = 0$$

ed analogamente,

$$u(\vec{x}, t) = \int_{R^3} \frac{f\left(\vec{x}' \cdot t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{v}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' + u_0(\vec{x}, t)$$

(con $u_0(\vec{x}, t)$ soluzione dell'equazione omogenea) è la soluzione dell'equazione non omogenea con la condizione asintotica che $u(\vec{x}, t)$ tende per $t \rightarrow \infty$ alla soluzione $u_0(\vec{x}, t)$ dell'equazione omogenea.

La verifica che la soluzione dell'equazione omogenea soddisfa l'equazione delle onde è riportata dal Petrovski. Per l'equazione non omogenea la verifica è più difficile perchè, analogamente a quanto avviene per dimostrare che

$$\nabla^2 \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = -4\pi\rho(\vec{x}),$$

bisogna supporre che il termine non omogeneo $f(\vec{x}, t)$ sia hölderiano rispetto a \vec{x} e t .

□. Sia G_0 il dominio di definizione nello spazio (x_1, x_2, x_3) di una funzione tre volte continuamente differenziabile $\phi_0(x_1, x_2, x_3)$ e di una funzione due volte continuamente differenziabile $\phi_1(x_1, x_2, x_3)$. Vogliamo determinare in G (la regione che si ottiene da G_0 per riempimento con i coni caratteristici K introdotta nella discussione dell'unicità) la soluzione $u(x_1, x_2, x_3, t)$ dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \quad (65)$$

che soddisfa per $t = 0$ le condizioni

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \phi_0(x_1, x_2, x_3), \quad (66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) = \phi_1(x_1, x_2, x_3).$$

Cerchiamo prima una soluzione $u_\phi(x_1, x_2, x_3, t)$ dell'equazione (65) quando le condizioni iniziali hanno la forma particolare

$$\begin{aligned} u_\phi(x_1, x_2, x_3, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) &= \phi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (67)$$

Si verifica poi, facilmente, che la funzione

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial u_\phi}{\partial t}$$

soddisfa per $t = 0$ le condizioni

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, x_3, 0) &= \phi(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) &= \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial x_3^2} = 0. \end{aligned}$$

Perciò la soluzione dell'equazione (65) che soddisfa entrambe le condizioni (66) è data dalla formula

$$u = \frac{\partial u_{\phi_0}}{\partial t} + u_{\phi_1}. \quad (68)$$

Perciò il problema di Cauchy generale per l'equazione (65) è ridotto a quello di determinare u_ϕ . Si può verificare che

$$u_\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \frac{\phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t} d\sigma_t \quad (69)$$

Formula di Kirchhof

Qui $S_t(x_1, x_2, x_3)$ indica la sfera con raggio t , il centro in (x_1, x_2, x_3) nell'iperpiano $t = 0$ in cui la funzione ϕ è prescritta e $d\sigma_t$ un elemento della superficie di questa sfera.

Se la funzione $\phi_1(x_1, x_2, x_3)$ è continua solo con le sue derivate prime, allora la funzione u definita dalla (68) e dalla (69) è una soluzione solo generalizzata del problema di Cauchy.

Consideriamo ora il caso particolare in cui ϕ non dipende da x_3 . È facile vedere che in questo caso la funzione u_ϕ , data dalla formula di Kirchhof, a sua volta non dipende da x_3 e perciò soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \quad (70)$$

In questo caso, possiamo sostituire l'integrale sulla sfera S_t con l'integrale doppio preso sull'intersezione K_t di questa sfera con il piano $\alpha_3 = x_3$. Proiettando un elemento di superficie $d\sigma_t$ di questa sfera sul piano $\alpha_3 = x_3$ si ha

$$d\sigma_t = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

e la formula di Kirchhof può essere riscritta come segue

$$u_\phi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{\phi(\alpha_1, \alpha_2)}{t} d\sigma_t = \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t} \frac{\phi(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}.$$

Perciò la soluzione dell'equazione (70) che soddisfa le condizioni

$$u(x_1, x_2, 0) = \phi_0(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \phi_1(x_1, x_2)$$

è data dalla formula

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t} \frac{\phi_1(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_t} \frac{\phi_0(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}. \quad (71)$$

Questa è la cosiddetta *formula di Poisson*.

Se la funzione ϕ non dipende nè da x_2 nè da x_3 , allora neanche la funzione u_ϕ data dalla formula di Kirchhof dipende da x_2 ed x_3 e soddisfa perciò l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \quad (72)$$

In questo caso la formula di Kirchhof può esser scritta come

$$u_\phi(x_1, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{\phi(\alpha_1)}{t} d\sigma_t = \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \phi(\alpha) d\alpha.$$

Dove si è tenuto conto che l'area della porzione della sfera S_t contenuta tra due piani, $\alpha_1 = \text{cost.}$ e $\alpha_1 + d\alpha_1 = \text{cost.}$, che intersecano S_t è eguale a $2\pi t d\alpha_1$ e la funzione $\phi(\alpha)$ ha un valore quasi costante in tutti i punti di questa porzione di sfera ¹².

Perciò la soluzione dell'equazione (72) che soddisfa le condizioni

$$u(x_1, 0) = \phi_0(x_1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = \phi_1(x_1),$$

¹²L'area di una striscia sottile di ampiezza $d\alpha$ della superficie di una sfera è approssimativamente eguale a $2\pi\rho dl$, dove ρ è il raggio della sezione mediana della striscia e dl è la lunghezza della generatrice del tronco di cono iscritto nella striscia. Ma $t/\rho = dl/d\alpha$, dove $\rho dl = t d\alpha$ e $d\sigma_t = 2\pi t d\alpha$.

è data da

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \phi_1(\alpha_1) d\alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \phi_0(\alpha_1) d\alpha_1 \\ &= \frac{\phi_0(x_1+t) + \phi_0(x_1-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \phi_1(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (73)$$

Questa formula è nota come *formula di d'Alembert*.

Osserviamo che per il teorema di unicità che le sole soluzioni del problema di Cauchy sono la (68) per l'equazione (65), la (71) per l'equazione (70) e la (73) per l'equazione (72). Il metodo usato per ottenere le soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni (70) e (72) dalla soluzione del problema di Cauchy per l'equazione (65) è denominato *metodo della discesa*.

Abbiamo trovato la soluzione del problema di Cauchy per $t > 0$. Il caso $t < 0$ si riduce al caso considerato se sostituiamo t con $-t$; questa trasformazione non cambia le equazioni (65), (70) e (72).

- *Dipendenza con continuità della soluzione dalle condizioni iniziali.*

Le formule che abbiamo derivato e che risolvono il problema di Cauchy per l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (74)$$

per $n = 2, 3$ contengono tutte integrali dei dati iniziali e derivate rispetto al tempo di questi integrali; nel caso $n = 1$ esse contengono solo integrali dei dati iniziali.

Ne segue che, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono cambiati in modo tale che queste funzioni e le loro derivate prime cambiano di una quantità sufficientemente piccola, allora la funzione $u(x_1, \dots, x_n, t)$ che è soluzione del problema di Cauchy cambia anch'essa di una piccola quantità. Nel caso $n = 1$ per ottenere la stessa cosa basta che i soli dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 siano cambiati di una piccola quantità. Se la regione in cui sono prescritte le condizioni iniziali è infinita, allora è ovviamente necessario considerare solo quei valori di t che sono inferiori ad un certo estremo superiore.

In altri termini *il problema di Cauchy per le equazioni (65), (70) e (72) è ragionevole*.

È possibile derivare formule analoghe alla (65), (71) e (73) per la soluzione del problema di Cauchy per un n arbitrario. È allora possibile dimostrare che il problema di Cauchy è ragionevole in un numero arbitrario di dimensioni se i dati iniziali soddisfano opportune condizioni di regolarità.

Le formule (68) e (71) mostrano che, a prescindere da quanto piccoli siano ϕ_0 e ϕ_1 , i valori di $|u(x_1, x_2, x_3, t)|$ e di $|u(x_1, x_2, t)|$ possono essere molto grandi per piccoli valori di t se le derivate di ϕ_0 e ϕ_1 sono sufficientemente grandi: le onde possono fare "spruzzi".

- *Diffusione delle onde*

Le formule (68) e (69) mostrano che il valore nel punto (x_1, \dots, x_n, t) della soluzione dell'equazione delle onde (74) per $n = 3$ dipende solo dai dati iniziali sulla frontiera della base del cono caratteristico che ha il vertice in (x_1, x_2, x_3, t) . Invece, per $n = 1$ ed $n = 2$, $u(x_1, \dots, x_n, t)$ dipende dalle condizioni assegnate su tutta la base di questo cono, come si evince dalla (71) e (73).

Supponiamo che i valori iniziali di u e di $\partial u/\partial t$ per $t = 0$ siano diversi da zero solo dentro una piccola regione G_ε nell'intorno di un punto (x_1^0, \dots, x_n^0, t) . Iniziando da $t = 0$, consideriamo i valori di u nei punti (x_1, \dots, x_n, t) per valori fissati di x_1, \dots, x_n al crescere di t . Nel caso $n = 3$, il valore di $u(x_1, \dots, x_n, t)$ è diverso da zero solo in una piccola porzione della retta considerata (nello spazio (x_1, \dots, x_n, t)); e cioè, su quella porzione della retta su cui giacciono i vertici dei coni caratteristici le cui basi hanno frontiere che intersecano la regione G_ε . D'altra parte, se $n = 1$ (o $n = 2$) e il punto $(x_1, 0)$ (o $(x_1, x_2, 0)$) non appartiene a G_ε , allora $u(x_1, t)$ (o $u(x_1, x_2, t)$) è eguale a zero per t abbastanza piccolo ed è, in generale, diverso da zero a cominciare dai valori di t per i quali il segmento $|x_1 - \alpha_1| \leq t$ (o il cerchio $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leq t^2$) interseca la regione G_ε .

Di conseguenza, un disturbo localizzato a $t = 0$ in un piccolo intorno del punto (x_1^0, \dots, x_n^0) , per $n = 3$ e $t > 0$, influenzerà i valori della funzione u solo in punti dello spazio (x_1, \dots, x_n) molto vicini alla sfera di raggio t con centro in (x_1^0, \dots, x_n^0) . Così un disturbo applicato a $t = 0$ nel punto (x_1^0, x_2^0, x_3^0) dà luogo ad un'onda sferica con centro in quel punto, e quest'onda ha un fronte ed un retro ben definiti. Invece se $n = 1$ o $n = 3$, il disturbo applicato a $t = 0$ in un intorno di (x_1^0, \dots, x_n^0) influenzerà, in generale, *tutti i punti all'interno della sfera di raggio t e centro (x_1^0, \dots, x_n^0)* . L'onda risultante ha un fronte ben definito, ma il retro dell'onda è indistinto. Diciamo che in questo caso l'onda è diffusa. Per $n = 3$ la diffusione non ha luogo. Si può dimostrare che le soluzioni dell'equazione (74) non diffondono per n dispari e maggiore o eguale a 3.

Disturbi applicati in una piccola regione G_ε di un corpo elastico tridimensionale o di un gas danno luogo ad onde che non lasciano traccia dietro di sé, ammesso che le vibrazioni soddisfino l'equazione (65). Nel caso di un gas $u(x_1, x_2, x_3, t)$ rappresenta, ad esempio, la deviazione dalla pressione di equilibrio dell'aria nel punto (x_1, x_2, x_3) all'istante t . Invece, disturbi applicati in una piccola regione G_ε di un continuum bidimensionale quale, ad esempio, una membrana tesa o una superficie d'acqua, danno luogo ad onde che, in teoria, lasciano una traccia permanente dietro di sé, ammesso che queste vibrazioni soddisfino l'equazione delle onde in due dimensioni. In pratica esse si smorzano molto rapidamente per effetto dell'attrito che è stato trascurato nel derivare l'equazione (70). Anche in un continuum unidimensionale il

passaggio di un'onda lascia una traccia dietro di sè.

- *Discussione della formula di d'Alembert*

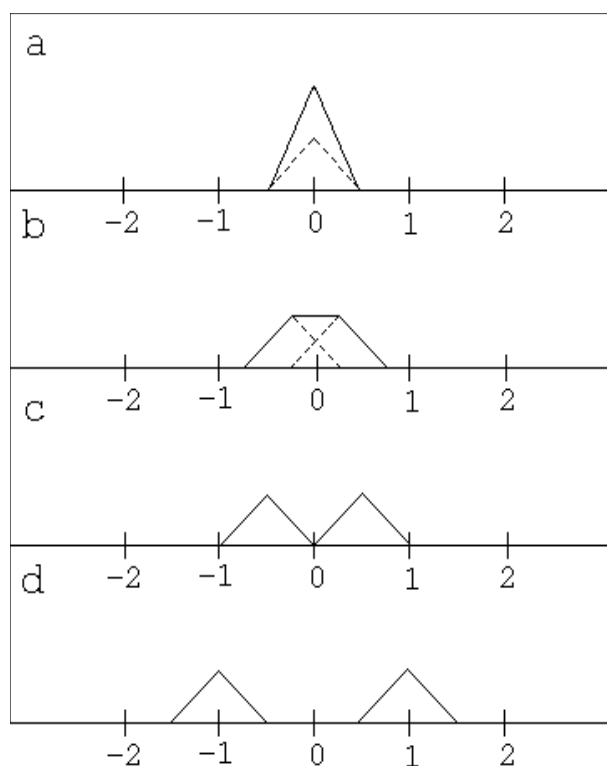
Considereremo due casi particolari che danno una chiara idea del comportamento della soluzione dell'equazione (72) nel caso generale

Iniziamo a considerare il caso in cui $\phi_1(x) \equiv 0$ e ϕ_0 è della forma rappresentata dalla grafico a) in figura (linea continua). Per brevità scriviamo x invece di x_1 . La formula di d'Alembert ha la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\phi_0(x + t) + \phi_0(x - t)]$$

Per ottenere il grafico della $u(t, x)$ considerata come funzione di x per un certo t fissato positivo conviene procedere come segue:

Tracciamo due grafici coincidenti -linea spezzata in a)- ottenuti dal grafico di $\phi_0(x)$ dimezzando le ordinate di $\phi_0(x)$. Poi uno dei due grafici coincidenti è spostato di t a destra nel verso positivo dell'asse x e l'altro di t a sinistra. Come ultimo passo tracciamo un nuovo grafico le cui ordinate, per un dato x , sono eguali alla somma delle corrispondenti ordinate dei due grafici spostati. Il grafico a) è relativo a $t = 0$, b) a $t = 1/4$, c) a $t = 1/2$ e infine d) a $t = 1$. Le linee spezzate sono ausiliarie e la linea continua rappresenta $u(t, x)$ a t fissato.



Consideriamo il caso in cui $\phi_0 \equiv 0$, e

$$\phi_1(x) = 1 \text{ per } |x| \leq \frac{1}{2},$$

$$\phi_1(x) = 0 \text{ per } |x| < \frac{1}{2}.$$

Allora la formula di d'Alembert ha la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \phi_1(\alpha) d\alpha.$$

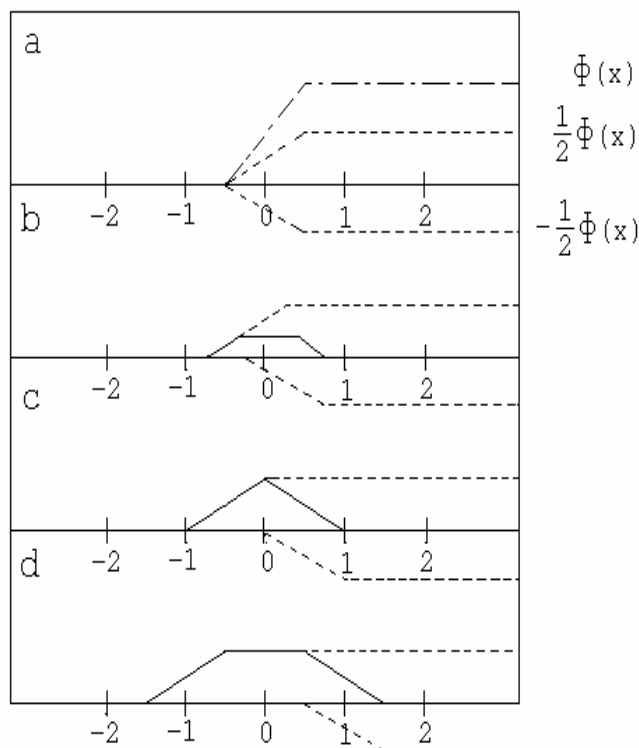
Per ciascun fissato x , $u(t, x) = 0$ fino a che l'intervallo $(-1/2, 1/2)$, dove $\phi_1(x) \neq 0$, non ha alcuna parte in comune con l'intervallo $(x-t, x+t)$. Il valore di $u(t, x)$ cambia fino a che l'intersezione dell'intervallo in espansione $(x-t, x+t)$ con $(-1/2, 1/2)$ continua a crescere. Non appena l'intervallo $(x-t, x+t)$ contiene tutto l'intervallo $(-1/2, 1/2)$, il valore di $u(t, x)$ rimane costante ed ha il valore

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \phi_1(\alpha) d\alpha.$$

Per ottenere il grafico che rappresenta la forma della corda a differenti valori di t , conviene procedere come segue. Indichiamo con $\Phi(z)$ una primitiva di $\phi(z)$. Allora

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\Phi(x+t) - \Phi(x-t)]$$

Per ottenere il grafico di $u(t, x)$ tracciamo i grafici delle funzioni $\frac{1}{2}\Phi(x)$ e $-\frac{1}{2}\Phi(x)$ e muoviamoli di t in direzioni opposte lungo l'asse x . Sommando le ordinate dei grafici spostati otteniamo quello di $u(t, x)$. Il grafico a) è relativo a $t = 0$, b) a $t = 1/4$, c) a $t = 1/2$ e infine d) a $t = 1$. In questo caso si ha diffusione poichè quando un punto si sposta dalla posizione di equilibrio resta nella nuova posizione e non torna indietro.



Le funzioni $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ considerate negli esempi precedenti sono o discontinue esse stesse ($\phi_1(x)$) o hanno derivate discontinue ($\phi_0(x)$). Perciò a queste funzioni corrispondono soluzioni generalizzate dell'equazione (72). Per ottenere la solita soluzione due volte continuamente differenziabile dell'equazione, basta cambiare un poco le funzioni $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ in modo che i loro grafici abbiano derivate seconde continue. Questo si può fare per la funzione $\phi_0(x)$ in modo tale che la sua ordinata cambi di una piccola quantità in ogni punto. Allora la corrispondente soluzione dell'equazione (72) cambia di una piccola quantità in ogni punto. $\phi_1(x)$ può essere sostituita da una funzione continua in modo tale che $\Phi(x)$ cambi di una quantità arbitrariamente piccola. Allora anche $u(t, x)$ cambierà di una piccola quantità dovunque. \square

3 Il problema di Cauchy per le equazioni di Maxwell omogenee nel vuoto

Il problema si formula nel modo seguente:

determinare le funzioni $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B}(\vec{x}, t)$ che soddisfano le equazioni omogenee di Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (75)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (76)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (77)$$

con le condizioni iniziali

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x}) \quad ; \quad \vec{B}(\vec{x}, 0) = \vec{G}(\vec{x}). \quad (78)$$

Cioè è un problema di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine con condizioni di Cauchy. Notiamo che il problema appare sovradeterminato poichè il numero delle equazioni (otto) è superiore al numero delle funzioni incognite (sei). In effetti si può dimostrare che le (75) sono conseguenza di una opportuna scelta delle condizioni iniziali e delle equazioni (76, 77).

Infatti scegliamo $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, 0) = \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = 0$.

Prendendo la divergenza dell'equazione (77) otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$$

cioè $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, t)$ è indipendente dal tempo, se quindi

$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, 0) = 0$ sarà anche $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$. Prendendo la divergenza dell'equazione (76) otteniamo $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$, se quindi $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, 0) = 0$ sarà anche $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$.

Pertanto il problema si formula nel modo seguente

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (I)$$

con le condizioni iniziali

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x}), \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad ; \quad \vec{B}(\vec{x}, 0) = \vec{G}(\vec{x}), \operatorname{div} \vec{G}(\vec{x}) = 0.$$

Dalle due equazioni differenziali del primo ordine possiamo ottenere una equazione differenziale del secondo ordine per una delle due funzioni vettoriali \vec{E} o \vec{B} . Consideriamo l'equazione per \vec{E} . Abbiamo che

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Poichè $\text{rot rot} = \text{grad div} - \nabla^2$ e $\text{div} \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$ abbiamo

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Vogliamo ora mostrare che il problema (I), da cui siamo partiti, è equivalente al seguente problema di Cauchy

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\alpha) \quad , \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\beta) \quad (II)$$

con le condizioni iniziali

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x}), \text{div} \vec{F}(\vec{x}) = 0; \quad \vec{B}(\vec{x}, 0) = \vec{G}(\vec{x}), \text{div} \vec{G}(\vec{x}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, 0) = c \text{rot} \vec{G}(\vec{x}).$$

Che $I \rightarrow II$ è ovvio. Per mostrare l'equivalenza occorre mostrare che $II \rightarrow I$. Dalle condizioni iniziali si ha $\text{div} \vec{E}(\vec{x}, 0) = 0$ ed inoltre dalla condizione $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, 0) = c \text{rot} \vec{G}(\vec{x})$ segue che

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E}(\vec{x}, 0) = c \text{div rot} \vec{G} = 0.$$

Applicando l'operatore div all'equazione (α) si ha che la funzione $\text{div} \vec{E}(\vec{x}, t)$ soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 \text{div} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \text{div} \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

con dati iniziali di Cauchy nulli. Pertanto per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde segue che

$$\text{div} \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$$

Pertanto l'equazione (α) si può riscrivere

$$\text{rot rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

che, usando l'equazione (β) , diviene

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot} \vec{B} \right) = 0$$

cioè la funzione in parentesi è indipendente dal tempo. Dalla condizione iniziale

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \text{rot} \vec{B}(\vec{x}, 0) \quad \text{ne segue che} \quad \text{rot} \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

e quindi l'equivalenza al problema (I). Notiamo che il sistema delle 6 equazioni differenziali del primo ordine è equivalente al sistema costituito dall'equazione vettoriale del secondo ordine per \vec{E} , conseguenza delle 6 equazioni del primo ordine, e da una delle due equazioni vettoriali del primo ordine¹³. Avremmo anche potuto scegliere insieme all'equazione del 2° ordine per \vec{E} l'equazione

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

La nostra scelta è motivata dal fatto che una volta determinato $\vec{E}(\vec{x}, t)$ il calcolo di $\vec{B}(\vec{x}, t)$ è immediato poichè

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}, 0) - c \int_0^t \text{rot } \vec{E}(\vec{x}, t') dt'.$$

Nel problema II ciascuna componente del campo \vec{E} soddisfa l'equazione delle onde con le condizioni di Cauchy, allora la sua soluzione è data dalla formula di Kirchhoff.

4 Campo elettromagnetico generato da cariche e correnti: emissione di radiazione

Il testo di riferimento è il CALDIROLA di cui riporteremo i brani di nostro interesse per comodità del lettore.

4.1 Potenziali elettromagnetici

♠ Nella analisi delle equazioni di Maxwell sono utili i cosiddetti *potenziali elettromagnetici* \vec{A} e V la cui introduzione deriva da due noti teoremi di calcolo vettoriale.

Se $\phi(\vec{x})$ è un generico campo scalare e $\vec{\Phi}(\vec{x})$ un generico campo vettoriale, posto

$$\vec{F} = \text{grad } \phi \tag{79}$$

$$\vec{G} = \text{rot } \vec{\Phi}, \tag{80}$$

si hanno le identità

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \tag{81}$$

¹³Osserviamo, pertanto, che l'affermazione che si trova in alcuni testi secondo la quale il sistema del 1° ordine è equivalente alle equazioni

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

è insensata: infatti tale sistema ha soluzioni che non sono soluzioni del 1° ordine

$$\operatorname{div} \vec{G} = 0. \quad (82)$$

Inversamente si dimostra che :

1) se \vec{F} è campo vettoriale soddisfacente la (81) (in una regione semplicemente connessa), esiste un campo scalare ϕ per cui è soddisfatta la (79);

2) se \vec{G} è un campo vettoriale soddisfacente la (82), esiste un campo vettoriale $\vec{\Phi}$ per cui è soddisfatta la (80).

Essendo $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ in virtù del secondo teorema esiste un vettore \vec{A} tale che

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (83)$$

Sostituendo nell'equazione di Maxwell per il rot \vec{E} si trova allora

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (84)$$

e in virtù del primo teorema deve esistere uno scalare V tale che

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V. \quad (85)$$

I campi \vec{E} e \vec{B} si possono dunque sempre esprimere nella forma

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (86)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (87)$$

Le grandezze V e \vec{A} prendono rispettivamente il nome di *potenziale scalare* e di *potenziale vettore*.

Si noti che per assegnati \vec{E} e \vec{B} i potenziali V e \vec{A} non sono determinati univocamente dalle (86,87). Vogliamo vedere il grado di questa arbitrarietà. Se indichiamo con V, \vec{A} e V', \vec{A}' due distinte soluzioni delle (86,87) per dati \vec{E} e \vec{B} , dalla (87) abbiamo

$$\operatorname{rot} (\vec{A}' - \vec{A}) = 0; \quad (88)$$

deve quindi esistere uno scalare Λ tale che

$$\vec{A}' - \vec{A} = \operatorname{grad} \Lambda. \quad (89)$$

Risolvendo la (89) rispetto ad \vec{A} e sostituendo nella (86) possiamo allora scrivere

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \left(V - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}. \quad (90)$$

A meno di una inessenziale costante additiva, V' deve perciò coincidere con $V - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ e si ha che le due possibili scelte dei potenziali devono essere legate da una relazione del tipo

$$\begin{aligned} V' &= V - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad} \Lambda. \end{aligned} \quad (91)$$

Inversamente se V, \vec{A} soddisfano le (86,87) anche le grandezze V', \vec{A}' definite dalle (91) le soddisfano qualunque sia Λ per gli stessi \vec{E}, \vec{B} .

La trasformazione (91) prende il nome di *trasformazione di gauge* (lett. trasformazione di calibrazione) ed a Λ ci si riferisce come alla *funzione di gauge*.

Osserviamo che per V e \vec{A} arbitrari le (86,87) forniscono in sostanza la più generale soluzione delle equazioni di Maxwell per la divergenza di \vec{B} e il rotore di \vec{E} . È necessario successivamente determinare V ed \vec{A} in modo che siano soddisfatte le altre due equazioni.

Supponiamo di trovarci nel vuoto in presenza solo di densità di carica ρ e di corrente \vec{j} libere.

Se teniamo conto delle identità vettoriali

$$\begin{aligned} \text{div grad} V &= \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \text{rot rot } \vec{A} &= \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (92)$$

Le (92) possono essere semplificate se si usa l'arbitrarietà nella scelta di V e \vec{A} . Dalle (91) segue infatti immediatamente

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial V'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}. \quad (93)$$

È allora chiaro che è sempre possibile scegliere V ed \vec{A} in maniera tale che sia soddisfatta l'equazione

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (94)$$

Ammissa verificata la (94) le (92) divengono

$$\begin{aligned}\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.\end{aligned}\quad (95)$$

Il problema della risoluzione delle equazioni di Maxwell è così ricondotto a quello della ricerca delle soluzioni delle (95) che soddisfano la (94). Il pregio maggiore delle (95) rispetto alle (92) è quello di essere disaccoppiate. Abbiamo cioè una equazione distinta per ciascuna delle grandezze V, A_x, A_y, A_z . Le soluzioni delle sistema di equazioni (95) sono individuate dalle condizioni iniziali

$$\begin{aligned}V(\vec{x}, t_0) &= V_0(\vec{x}) & \vec{A}(\vec{x}, t_0) &= \vec{A}_0(\vec{x}) \\ \frac{\partial V(\vec{x}, t_0)}{\partial t} &= V_1(\vec{x}) & \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t_0)}{\partial t} &= \vec{A}_1(\vec{x}).\end{aligned}\quad (96)$$

La (94) è per costruzione compatibile con le (95) e quindi si deve ridurre in una restrizione sulle possibili scelte delle grandezze (96) (cfr. esercizio alla fine del paragrafo); la (94) è cioè di nuovo una *condizione supplementare* sulle soluzioni delle (95); essa prende il nome di *condizione di Lorentz*.

Si osservi che la condizione di Lorentz non elimina completamente l'arbitrarietà nella scelta di V ed \vec{A} . Come risulta dalla (93), la trasformazione (91) non modifica la (94) se la funzione Λ è soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0. \quad (97)$$

è questo dunque il grado di arbitrarietà che resta una volta imposta la (94).

Alla restrizione introdotta nella scelta di V e \vec{A} dalla (94) si fa riferimento dicendo che questa definisce il *gauge di Lorentz*. Le trasformazioni (91) quando Λ soddisfa la (97) sono trasformazioni del gauge di Lorentz.

In assenza di cariche e correnti è possibile e compatibile una scelta dei potenziali per cui sia $V(\vec{x}) = 0$. Tale scelta prende il nome di *gauge di radiazione* ed è particolarmente conveniente per lo studio della radiazione nel vuoto.

In questo gauge \vec{A} soddisfa l'equazione delle onde omogenea mentre la (94) e le (86,87) assumono la forma

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

e

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

ESERCIZIO

a) Dimostrare che dalle (95) e dall'equazione di continuità segue l'equazione

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0. \quad (98)$$

b) Tenendo presente la (98) dimostrare che la (94) equivale alle seguenti restrizioni sulle grandezze (96)

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A}_0(\vec{x}) + \frac{1}{c} V_1(\vec{x}) &= 0 \\ \text{div} \vec{A}_1(\vec{x}) + c \nabla^2 V_0(\vec{x}) + 4\pi c \rho(\vec{x}, t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (99)$$

4.2 Emissione della radiazione elettromagnetica

Vogliamo finalmente studiare il campo elettromagnetico in presenza di sorgenti cioè nell'ipotesi che ρ e \vec{j} non siano nulle.

Le equazioni da risolvere sono le (95) con la condizione supplementare (94).

Abbiamo già discusso la soluzione della equazione delle onde non omogenea sotto opportune ipotesi sui termini di sorgente (vedi pg.50-51), con condizioni iniziali (asintotiche) per $t \rightarrow -\infty$. Le soluzioni particolari determinate dalle sorgenti sono date da

$$V_{rit}(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \quad (100)$$

$$\vec{A}_{rit}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \quad (101)$$

È immediato verificare che

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}_{rit}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial V_{rit}(\vec{x}; t)}{\partial t} = \\ = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}', t') + \frac{\partial \rho(\vec{x}', t')}{\partial t'} \right]_{t'=t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}} = 0. \end{aligned}$$

cioè che V_{rit} ed \vec{A}_{rit} soddisfano la (94).

La soluzione data dalle (100,101) prende il nome di soluzione dei *potenziali ritardati*. Essa non è una soluzione particolare qualsiasi ma ha un significato fisico perspicuo che appare evidente se si confrontano queste soluzioni con i potenziali che descrivono i campi elettrici e magnetici statici

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}') \\ \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}') \end{aligned} \quad (102)$$

Per ρ dipendente dal tempo essa differisce dal caso statico per il fatto che nell'integrale a secondo membro il valore di ρ in un dato punto \vec{x}' è sostituito dal valore che la stessa quantità ha in \vec{x}' in un istante che precede quello considerato del tempo necessario perchè un segnale che si propaghi con velocità uguale a c si porti da \vec{x}' a \vec{x} . Nello stesso senso in cui diciamo che le (102) esprimono il campo elettrostatico e magnetostatico prodotti da distribuzioni di carica e correnti statiche, possiamo perciò riferirci alle espressioni dei *potenziali ritardati* come a quelle che esprimono il campo elettromagnetico generato da distribuzioni di carica e correnti variabili. La loro particolare forma ci dice poi che le azioni elettromagnetiche non si propagano con velocità

infinita ma con una velocità che è uguale a quella delle *onde elettromagnetiche libere*, cioè delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni di Maxwell omogenee nel vuoto studiate nel §3.

Come già detto trovata la soluzione particolare (100,101) la soluzione generale delle (95) può essere scritta come

$$V(\vec{x}, t) = V_0(\vec{x}, t) + V_{rit}(\vec{x}, t) ; \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0(\vec{x}, t) + \vec{A}_{rit}(\vec{x}, t),$$

dove $V_0(\vec{x}, t)$ e $\vec{A}_0(\vec{x}, t)$ indicano una generica soluzione delle equazioni di Maxwell soddisfacente la (94). In una situazione specifica quindi accanto ai potenziali ritardati saranno in generale presenti i termini $V_0(\vec{x}, t)$ e $\vec{A}_0(\vec{x}, t)$. Questi ultimi per la discussione precedente vanno interpretati come i potenziali associati alle onde elettromagnetiche provenienti dall'esterno o, se si vuole, ad un campo creato da cariche e correnti lontane, al di fuori della regione dello spazio presa in considerazione.

Ritornando ai potenziali ritardati supponiamo che ρ e \vec{j} siano diversi da zero solo in una regione limitata dello spazio che indicheremo con τ . All'esterno di τ , V_{rit} ed \vec{A}_{rit} soddisfano le equazioni per il campo libero e descrivono le onde elettromagnetiche emesse dal sistema di cariche racchiuso in τ . Vogliamo studiare le caratteristiche di tali onde e l'energia che attraverso esse il sistema irradia nello spazio circostante.

Scegliamo l'origine O del sistema di coordinate all'interno di τ e consideriamo il campo prodotto ad una distanza $r = |\vec{x}|$ da O , grande rispetto alle dimensioni lineari di τ , nella direzione definita dal versore $\vec{n} = \vec{x}/r$. Posto $r' = |\vec{x}'|$, abbiamo

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'| &= (r'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + r^2)^{1/2} = r \left(1 - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} = \\ &= r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + O\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Si può quindi scrivere

$$\begin{aligned} V_{rit}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{r} \int d^3\vec{x}' \rho \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \vec{A}_{rit}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{rc} \int d^3\vec{x}' \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \end{aligned} \quad (103)$$

e, sviluppando ρ e \vec{j} in un intorno del tempo $t - r/c$,

$$\begin{aligned} V_{rit}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{r} \left[\int d^3\vec{x}' \rho \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) (\vec{x}' \cdot \vec{n}) + \dots \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (104)$$

$$\vec{A}_{rit}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{c} \int d^3 \vec{x}' \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2} \int d^3 \vec{x}' \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) (\vec{x}' \cdot \vec{n}) + \dots \right] + O \left(\frac{1}{r^2} \right).$$

Tenendo conto delle identità

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' x'_h \rho(\vec{x}', t) &= \int d^3 \vec{x}' x'_h \frac{\partial \rho(\vec{x}', t)}{\partial t} = \\ &= - \int d^3 \vec{x}' x'_h \frac{\partial j_k(\vec{x}', t)}{\partial x_k} = \int d^3 \vec{x}' j_h(\vec{x}', t) \\ \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' x'_h x'_k \rho(\vec{x}', t) &= - \int d^3 \vec{x}' x'_h x'_k \frac{\partial j_l(\vec{x}', t)}{\partial x_l} = \\ &= \int d^3 \vec{x}' [x'_h j_k(\vec{x}', t) + x'_k j_h(\vec{x}', t)] \\ &\dots \end{aligned}$$

che seguono dall'equazione di continuità si ha inoltre

$$\begin{aligned} \int d^3 \vec{x}' j_h \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) &= \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' x'_h \rho \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) \\ \int d^3 \vec{x}' \frac{\partial}{\partial t} j_h \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) x'_k &= \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' j_h \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) x'_k = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' (j_h x'_k + j_k x'_h) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' (j_h x'_k - j_k x'_h) = \\ &= \frac{1}{6} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3 \vec{x}' \rho \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) (3x'_h x'_k - \delta_{hk} r'^2) + \\ &+ \frac{1}{6} \delta_{hk} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3 \vec{x}' r'^2 \rho \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \\ &+ c \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x}' \left[j_h \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) x'_k - j_k \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) x'_h \right] \\ &\dots \end{aligned}$$

Sostituendo queste ultime relazioni nelle (104) e omettendo l'indice "rit" si ottiene infine

$$\begin{aligned} V(\vec{x}, t) &= \frac{1}{r} \left[e + \frac{1}{c} \dot{d}_k n_k + \frac{1}{6c^2} \ddot{q}_{hk} n_h n_k + \frac{1}{6c^2} \ddot{f} + \dots \right]_{t-\frac{r}{c}} + O \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ A_h(\vec{x}, t) &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{c} \dot{d}_h + \frac{1}{6c^2} \ddot{q}_{hk} n_k + \frac{1}{c} (\dot{\vec{m}} \times \vec{n})_h + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c^2} \ddot{f} n_h + \dots \right]_{t-\frac{r}{c}} + O \left(\frac{1}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (105)$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
 e &= \int d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}', t) \\
 d_h(t) &= \int d^3 \vec{x}' x'_h \rho(\vec{x}', t) \\
 q_{hk}(t) &= \int d^3 \vec{x}' (3x'_h x'_k - \delta_{hk} r'^2) \rho(\vec{x}', t) \\
 m_h(t) &= \frac{1}{2c} \int d^3 \vec{x}' [\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}', t)]_h \\
 f(t) &= \int d^3 \vec{x}' r'^2 \rho(\vec{x}', t) \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \tag{106}$$

La quantità e è evidentemente indipendente dal tempo e rappresenta la carica elettrica totale che compare in τ . Il termine e/r nelle (105) è puramente *elettrostatico* e descrive a grandi distanze il campo creato dalle cariche presenti in τ se queste sono a riposo. Tutti gli altri termini presenti nelle (105) sono legati al moto delle cariche, sono cioè di tipo *elettrodinamico*. I vettori $d_h(t)$, $m_h(t)$ ed il tensore $q_{hk}(t)$ si dicono rispettivamente *momento di dipolo elettrico*, *momento di dipolo magnetico*, *momento di quadrupolo elettrico* e i termini che si originano da tali quantità, si dicono *termini di dipolo elettrico*, di *dipolo magnetico*, di *quadrupolo elettrico*. I termini in $f(t)$ invece si possono eliminare con una *trasformazione di gauge* prendendo

$$\Lambda = \frac{1}{6c} \frac{1}{r} \dot{f} \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

non danno perciò contributo ai campi \vec{E} e \vec{B} e non hanno significato fisico. Proseguendo lo sviluppo (105) si trovano successivamente termini detti di *quadrupolo magnetico*, di *ottupolo elettrico*, ecc. Lo sviluppo in generale è detto sviluppo in *termini di multipolo*.

Dalle (105) si ha per \vec{E} e \vec{B}

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \vec{x}} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
 \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\vec{A} \cdot \vec{n}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = \\
 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)
 \end{aligned}$$

e quindi esplicitamente

$$\vec{B} = \frac{1}{rc^2} \left[\ddot{\vec{d}} + \frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}} + \ddot{\vec{m}} \times \vec{n} + \dots \right]_{t-\frac{r}{c}} \times \vec{n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{107}$$

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (108)$$

dove si è posto $Q_h = q_{hk}n_k$. Si osservi che, a meno di termini dell'ordine di $1/r^2$, \vec{E} e \vec{B} risultano entrambi ortogonali ad \vec{n} ed ortogonali tra loro come nel caso delle onde piane.

Se σ_τ è una superficie sferica di centro nell'origine e raggio r che contiene τ , l'energia complessiva irradiata dal sistema di cariche nell'unità di tempo è data da

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\sigma_\tau} d\sigma \vec{S}^{em} \cdot \vec{n}. \quad (109)$$

Dalle (107,108) si ha

$$\vec{S}^{em} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left\{ [\ddot{\vec{d}} + \dots]_{t-\frac{r}{c}} \times \vec{n} \right\}^2 \vec{n} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (110)$$

Al limite dei grandi r i termini dell'ordine di $1/r^3$ in \vec{S}^{em} non danno contributo al secondo membro della (110). Con un calcolo un pò laborioso ma elementare si ottiene allora

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{d}}^2 + \frac{1}{180c^5} \sum_{hk} \dot{q}_{hk}^2 + \frac{2}{3c^2} \ddot{\vec{m}}^2 + \dots \quad (111)$$

Si noti che il termine elettrostatico e/r nella (105), da un contributo dell'ordine di $1/r^2$ a \vec{E} e dell'ordine $1/r^3$ a \vec{S}^{em} e non contribuisce, come ovvio, alla potenza irradiata. ♠

NOTA

Per ottenere le espressioni di \vec{E} e \vec{B} riportate sopra occorre osservare che per le (105) possiamo scrivere

$$A_h(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} [F_h(\tau)]_{\tau=t-\frac{r}{c}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$V(\vec{x}, t) = \frac{e}{r} + \frac{1}{r} \sum_h [F_h(\tau)]_{\tau=t-\frac{r}{c}} n_h + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Poichè le derivate spaziali di $1/r$ sono $O(1/r^2)$, a meno di termini $O(1/r^2)$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \nabla \times \vec{F} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{1}{rc} \nabla r \times \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} =$$

$$= -\frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} \times \vec{n} \quad ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}.$$

Analogamente nel calcolo del ∇V trascuriamo i termini che si ottengono derivando $1/r$ perchè $O(1/r^2)$ e quindi

$$\begin{aligned} -\nabla V &= -\frac{1}{r} \nabla \sum_h [F_h]_{\tau=t-\frac{r}{c}} = \frac{1}{rc} \sum_h \left(\frac{\partial F_h}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} n_h \nabla r = \\ &= \frac{1}{c} \sum_h \left(\frac{\partial A_h}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} n_h \nabla r = \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} \cdot \vec{n} \right] \vec{n}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} + \frac{1}{c} \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} \cdot \vec{n} \right] \vec{n} = \\ &= \frac{1}{c} \left(\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right)_{\tau=t-\frac{r}{c}} \times \vec{n} \right) \times \vec{n} = \vec{B} \times \vec{n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Poichè $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ si ha

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{B}^2 \vec{n} - (\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{n}) = \frac{c}{4\pi} \vec{B}^2 \vec{n}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \int \left[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \dot{\vec{Q}} \times \vec{n} + (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right]_{\tau=t-\frac{r}{c}}^2 r^2 d\Omega = \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \int \left\{ (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 + \frac{1}{36c^2} (\dot{\vec{Q}} \times \vec{n})^2 + [(\ddot{\vec{m}} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \ddot{\vec{m}}]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6c^2} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \cdot (\dot{\vec{Q}} \times \vec{n}) + 2(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \cdot ((\ddot{\vec{m}} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \ddot{\vec{m}}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{6c^2} (\dot{\vec{Q}} \times \vec{n}) \cdot ((\ddot{\vec{m}} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \ddot{\vec{m}}) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (112)$$

Osserviamo che l'integrale su Ω del prodotto di un numero dispari di componenti di \vec{n} è nullo. Infatti eseguendo il cambiamento di variabili $\vec{n} = -\vec{n}'$ si ha che

$$\int \underbrace{n_i n_j \dots n_r}_{2l+1 \text{ termini}} d\Omega = - \int n'_i n'_j \dots n'_r d\Omega' = - \int n_i n_j \dots n_r d\Omega$$

dove nell'ultimo integrale abbiamo cambiato nome alle variabili mute \vec{n}' .

Ricordiamo che $Q_h = q_{hk}n_k$ e quindi il quarto ed il quinto termine nell'integrale (112) sono combinazioni lineari di prodotti di un numero dispari di componenti di \vec{n} e quindi sono nulli.

Per il sesto termine osserviamo che

$$(\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n}) \cdot \vec{n}(\ddot{\vec{m}} \cdot \vec{n}) = 0$$

e quindi resta da calcolare

$$\int \ddot{\vec{m}} \cdot (\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n}) d\Omega$$

ossia ¹⁴

$$\begin{aligned} \ddot{m}_i \int \varepsilon_{ihl} \dot{q}_{hk} n_k n_l &= \\ = \ddot{m}_i \varepsilon_{ihl} \dot{q}_{hk} \int n_k n_l d\Omega &= \ddot{m}_i \varepsilon_{ihl} \dot{q}_{hk} \delta_{kl} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \ddot{m}_i \varepsilon_{ihk} \dot{q}_{hk} = 0 \end{aligned}$$

poichè $\dot{q}_{hk} = \dot{q}_{kh}$ e quindi $\varepsilon_{ihk} \dot{q}_{hk} = 0$.

Per il calcolo del primo termine nell'integrale (112), scegliendo $\ddot{\vec{d}}$ come asse polare, abbiamo

$$\frac{1}{4\pi c^3} \int (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 d\Omega = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3} \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2.$$

Per il calcolo del terzo termine nell'integrale (112) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi c^3} \int [(\ddot{\vec{m}} \cdot \vec{n})\vec{n} - \ddot{\vec{m}}]^2 d\Omega &= \frac{\ddot{m}^2}{4\pi c^3} \left(\int d\Omega - \int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \right) = \\ &= \frac{\ddot{m}^2}{4\pi c^3} \left(4\pi - \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{2}{3c^3} \ddot{m}^2 \end{aligned}$$

avendo scelto la direzione del vettore $\ddot{\vec{m}}$ come asse polare.

Per il calcolo del secondo termine nell'integrale (112) osserviamo che

$$(\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n})_i = \varepsilon_{ijl} \dot{q}_{jk} n_k n_l$$

e quindi

$$\begin{aligned} (\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n})^2 &= \varepsilon_{ijl} \dot{q}_{jk} n_k n_l \varepsilon_{imp} \dot{q}_{mr} n_r n_p = \\ &= (\delta_{jm} \delta_{lp} - \delta_{jp} \delta_{lm}) \dot{q}_{jk} n_k n_l \dot{q}_{mr} n_r n_p = \end{aligned}$$

¹⁴Si ricordi che stiamo usando la convenzione di sottointendere la somma sugli indici ripetuti.

$$\dot{q}_{jk}\dot{q}_{jr}n_kn_r - \dot{q}_{jk}\dot{q}_{lr}n_jn_kn_ln_r. \quad (113)$$

Poichè $\int n_kn_r d\Omega = \delta_{kr} \frac{4\pi}{3}$ abbiamo che

$$\dot{q}_{jk}\dot{q}_{jr} \int n_kn_r d\Omega = \frac{4\pi}{3} \sum_{j,k} \dot{q}_{jk}^2. \quad (114)$$

Consideriamo ora $\int n_jn_kn_ln_r d\Omega$. Poichè ciascun indice varia da 1 a 3, due tra i quattro indici devono essere eguali tra loro. Se solo due indici sono uguali tra loro mentre gli altri due sono diversi, l'integrale è nullo. Infatti se per esempio $j = k$ mentre $l \neq r$, eseguendo il cambiamento di variabili $n_j = n'_j$, $n_l = n'_l$, $n_r = -n'_r$ si ha

$$\int n_j^2n_ln_r d\Omega = - \int n_j^2n'_ln'_r d\Omega = - \int n_j^2n_ln_r d\Omega$$

Pertanto sono diverse da zero solo gli integrali in cui i quattro indici sono a due a due eguali tra loro. Se tutti gli indici sono eguali tra loro

$$\int n_1^4 d\Omega = \int n_2^4 d\Omega = \int n_3^4 d\Omega = \int \cos^4 \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{5} \quad (115)$$

I tre integrali sono eguali tra loro per l'invarianza della misura $d\Omega$ per rotazione.

Se i valori delle due coppie di indici sono diversi tra loro si ha $\forall i, j$

$$\begin{aligned} \int n_i^2n_j^2 d\Omega &= \int n_1^2n_3^2 d\Omega = \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \pi \int (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{15} \end{aligned} \quad (116)$$

Pertanto dalla (115) e dalla (116) abbiamo

$$\begin{aligned} \int n_jn_kn_ln_r d\Omega &= \frac{4\pi}{5} \delta_{jk}\delta_{lr}\delta_{jl} + \\ &+ \frac{4\pi}{15} [\delta_{jk}\delta_{lr}(1 - \delta_{jl}) + \delta_{jl}\delta_{kr}(1 - \delta_{jk}) + \delta_{jr}\delta_{kl}(1 - \delta_{jk})] = \\ &= \frac{4\pi}{15} [\delta_{jk}\delta_{lr} + \delta_{jl}\delta_{kr} + \delta_{jr}\delta_{kl}] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\dot{q}_{jk}\dot{q}_{lr} \int n_jn_kn_ln_r d\Omega = \\ &= \frac{4\pi}{15} \left[\sum_j \dot{q}_{jj} \sum_l \dot{q}_{ll} + \sum_{j,k} (\dot{q}_{jk}^2 + \dot{q}_{jk}\dot{q}_{kj}) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{8\pi}{15} \sum_{j,k} \dot{q}_{jk}^2 \quad (117)$$

poichè dalla definizione segue $\sum_j q_{jj} = \sum_l q_{ll} = 0$ e $q_{jk} = q_{kj}$.

Pertanto il secondo termine nell'integrale (112) risulta per la (113), (114) e (117)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{36c^5} \int (\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n})^2 d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{36c^5} \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{8\pi}{15} \right) \sum_{j,k} \dot{q}_{jk}^2 = \\ &= \frac{1}{36c^5} \frac{3}{15} \sum_{j,k} \dot{q}_{jk}^2 = \frac{1}{180c^5} \sum_{j,k} \dot{q}_{jk}^2. \end{aligned}$$

♠ Vogliamo ora analizzare la radiazione emessa dal nostro sistema in componenti monocromatiche, farne cioè l'*analisi spettrale*.

A questo scopo cominciamo col scrivere ad esempio

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty d\omega [\vec{A}(\omega, \vec{x}) e^{-i\omega t} + \vec{A}^*(\omega, \vec{x}) e^{i\omega t}] \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty d\omega [\vec{j}(\omega, \vec{x}) e^{-i\omega t} + \vec{j}^*(\omega, \vec{x}) e^{i\omega t}]. \end{aligned}$$

Omettendo i termini dell'ordine di $1/r^2$ abbiamo allora per le (103)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\omega, \vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (118) \\ &= \frac{1}{c r} \int d^3 \vec{x}' \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c} \right) = \\ &= \frac{1}{r c} e^{i\frac{\omega}{c} r} \int d^3 \vec{x}' e^{-i\frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot \vec{x}'} \vec{j}(\omega, \vec{x}'). \end{aligned}$$

La (118) si presta a varie interessanti considerazioni. In primo luogo risulta chiaro da tale equazione che nell'analisi di Fourier del campo emesso da una certa sorgente compaiono le stesse frequenze che compaiono nell'analisi di Fourier della sorgente. In secondo luogo si può osservare che, posto $k = \frac{\omega}{c}$, la (118) può essere riscritta

$$\vec{A}(\omega, \vec{x}) e^{-i\omega t} = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r c} \int d^3 \vec{x}' e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{x}'} \vec{j}(\omega, \vec{x}'), \quad (119)$$

quindi le singole componenti monocromatiche si presentano come onde sferiche la cui ampiezza dipende dalla direzione di emissione in modo legato alle caratteristiche della sorgente.

Infine, usando lo sviluppo

$$e^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{x}'} = 1 - i\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{x}' + \dots,$$

$$\vec{A}(\omega, \vec{x}')e^{-i\omega t} = \frac{1}{rc} \left[\int d^3\vec{x}'' \vec{j}(\omega, \vec{x}'') e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} - \right. \quad (120)$$

$$\left. - i\frac{\omega}{c} \int d^3\vec{x}'' \vec{j}(\omega, \vec{x}'') \vec{n}\cdot\vec{x}'' e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} + \dots \right].$$

Lo sviluppo (120) dà le componenti di Fourier dei vari termini di *dipolo elettrico*, *dipolo magnetico*, *quadrupolo elettrico*, ecc. che compaiono nella (120). In particolare esso mette in evidenza la natura dell'approssimazione che si esegue nel troncamento delle serie (104) e (105) ad un determinato termine. Poichè $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, con λ lunghezza d'onda della radiazione è evidente che sarà lecito troncamento delle suddette serie al primo termine (*approssimazione di dipolo*), cioè rimpiazzare nella (119) $e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{x}'}$ con 1, se λ è grande rispetto alle dimensioni lineari di τ . Se a è un numero che espone l'ordine di grandezza di tali dimensioni, d'altra parte, è chiaro che il secondo termine della (120), e quindi della (104), fornisce una correzione che è dell'ordine di a/λ rispetto al primo, il terzo una correzione dell'ordine $(a/\lambda)^2$ e così via.

Supponiamo infine che il nostro sistema si riduca ad una singola particella carica. Detto $\vec{z}(t)$ il vettore posizione di tale particella abbiamo, considerato il limite delle (106) per una carica puntiforme,

$$\begin{aligned} \vec{d}(t) &= e\vec{z}(t) \\ q_{hk}(t) &= e[3z_h(t)z_k(t) - \delta_{hk}|\vec{z}(t)|^2] \\ \vec{m} &= -\frac{e}{2c}\vec{z}(t) \times \dot{\vec{z}}(t) \\ &\dots \end{aligned} \quad (121)$$

Sostituendo tali espressioni nella (107) e nella (111) risulta allora chiaro che una particella carica irraggia se la sua accelerazione non è nulla. In particolare in approssimazione di dipolo otteniamo

$$\vec{B} = \frac{e}{c^2} \frac{1}{r} \ddot{\vec{z}} \times \vec{n} \quad \vec{E} = \vec{B} \times \vec{n} \quad (122)$$

e

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{z}}^2. \quad (123)$$

La (123) è detta *formula di Hertz*. ♠

5 Rappresentazione della soluzione della equazione delle onde omogenea mediante trasformata di Fourier

Ci proponiamo di ottenere una rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy

$$\nabla^2 u(\vec{x}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) \quad (124)$$

$$u(\vec{x}, 0) = \varphi_0(\vec{x}); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \varphi_1(\vec{x})$$

che, come vedremo in seguito, risulta utile per studiare la propagazione della soluzione.

Sappiamo che il problema, sotto opportune ipotesi di regolarità su $\varphi_0(\vec{x})$ e $\varphi_1(\vec{x})$, è ben posto.

Il metodo consiste nel considerare la trasformata di Fourier nella variabile spaziale dell'equazione e cioè

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \nabla^2 u(\vec{x}, t) d^3x = \frac{1}{v^2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) d^3x = 0.$$

Per garantire che questa operazione, e quelle che in seguito useremo, abbiano senso supporremo che

- 1) La soluzione $u(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}$ (funzioni infinitamente derivabili ed a decrescenza rapida all'infinito) nella variabile $\vec{x}, \forall t$ ¹⁵
- 2) Si abbia

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) \right| < f(\vec{x}) \text{ per ogni intervallo finito } (0, T)$$

$$\text{con } \int f(\vec{x}) d^3x < \infty$$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) \right| < g(\vec{x}) \text{ per ogni intervallo finito } (0, T)$$

$$\text{con } \int g(\vec{x}) d^3x < \infty$$

¹⁵Si potrebbero usare condizioni meno restrittive che sarebbe però laborioso esporre. L'ipotesi che $u(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}$ è la più semplice per garantire l'esistenza della trasformata e dell'antitrasformata di una qualunque derivata parziale rispetto alle \vec{x} della $u(\vec{x}, t)$.

Si potrebbe mostrare, utilizzando le formule di Kirchhof, quali ipotesi di regolarità delle $\varphi_0(\vec{x})$ e $\varphi_1(\vec{x})$ garantiscono che la $u(\vec{x}, t)$ soddisfi le 1) e 2). Noi otterremo la rappresentazione supponendo che valgano le 1) e 2). Sarà poi necessario mostrare che la rappresentazione soddisfa l'equazione sotto opportune ipotesi su $\varphi_0(\vec{x})$ e $\varphi_1(\vec{x})$. Per la 1) abbiamo che

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \nabla^2 u(\vec{x}, t) d^3x = -k^2 \tilde{u}(\vec{k}, t)$$

$$\left(\tilde{u}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{x}, t) d^3x \right).$$

Poichè l'integrale $\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) d^3x$ è esteso ad una regione non limitata, le condizioni 2) sono richieste (essendo $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t)$ continua) per garantire lo scambio della $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ con l'integrale.

Abbiamo pertanto

$$-k^2 \tilde{u}(\vec{k}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) = 0.$$

Cioè un'equazione differenziale ordinaria nella variabile t , dipendente dai parametri k_x, k_y, k_z il cui integrale generale è

$$\tilde{u}(\vec{k}, t) = A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \quad ; \quad \omega = \sqrt{k^2 v^2}.$$

Applicando la trasformata di Fourier alle condizioni iniziali abbiamo

$$\tilde{u}(\vec{k}, 0) = \tilde{\varphi}_0(\vec{k})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) d^3x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{x}, 0) d^3x =$$

$$= \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\vec{k}, t) \right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(\vec{k})$$

e quindi

$$\tilde{\varphi}_0(\vec{k}) = A(\vec{k}) + B(\vec{k})$$

$$\tilde{\varphi}_1(\vec{k}) = i\omega(-A(\vec{k}) + B(\vec{k}))$$

da cui

$$A(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_0(\vec{k}) + \frac{i}{\omega} \tilde{\varphi}_1(\vec{k}) \right) \quad (125)$$

$$B(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_0(\vec{k}) - \frac{i}{\omega} \tilde{\varphi}_1(\vec{k}) \right)$$

Antitrasformando otteniamo

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[\int A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} d^3k + \int B(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} d^3k \right]. \quad (126)$$

Mostriamo ora che se:

a) $\varphi_0(\vec{x})$ e $\varphi_1(\vec{x}) \in \mathcal{S}$

b) Il punto $\vec{k} = 0$ non appartiene al supporto di $\tilde{\varphi}_0(\vec{k})$ e di $\tilde{\varphi}_1(\vec{k})$

la funzione definita dall'espressione a destra della (126) con $A(\vec{k})$ e $B(\vec{k})$ definite dalle (125), $\omega = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, soddisfa le condizioni iniziali e l'equazione (124).

Infatti per la a) $\tilde{\varphi}_0(\vec{k})$ e $\tilde{\varphi}_1(\vec{k}) \in \mathcal{S}$, inoltre per la b) $\vec{k} = 0$ non appartiene al supporto di $\tilde{\varphi}_1(\vec{k})$ e quindi $A(\vec{k})$ e $B(\vec{k})$, definite dalle (125), appartengono ad \mathcal{S} , e $\vec{k} = 0$ non appartiene nemmeno al supporto di $\tilde{\varphi}_0(\vec{k})$ e quindi

$$A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \in \mathcal{S}, \forall t. \quad (127)$$

Ne segue che

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int (A(\vec{k}) + B(\vec{k}))e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \tilde{\varphi}_0(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = \varphi_0(\vec{x}).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |i\omega[-A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}]| &< \omega (|A(\vec{k})| + |B(\vec{k})|) \\ \int \omega (|A(\vec{k})| + |B(\vec{k})|) d^3k &< \infty \quad \text{e quindi} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \Big|_{t=0} &= \\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\partial}{\partial t} (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \Big|_{t=0} &= \\ \int i\omega(-A(\vec{k}) + B(\vec{k}))e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k &= \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Poichè $\omega^2 = k^2v^2$ si ha che

$$\int \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = 0.$$

Per la (127)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int k^2 (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k &= \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \nabla^2 \int (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k. \end{aligned}$$

$$\text{Inoltre } \left| \omega^2 (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right| < \omega^2 (|A(\vec{k})| + |B(\vec{k})|)$$

$$\text{con } \int \omega^2 (|A(\vec{k})| + |B(\vec{k})|) d^3k < \infty$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \int \omega^2 (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = \\ & - \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = \\ & - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k. \end{aligned}$$

Pertanto l'espressione (126) soddisfa l'equazione (124) ed è l'unica soluzione della (124), poichè $\varphi_0(\vec{x})$ e $\varphi_1(\vec{x})$ soddisfano (ad abundantiam) le condizioni perchè il problema sia ben posto.

Abbiamo mostrato che il problema di Cauchy per le equazioni di Maxwell omogenee nel vuoto è equivalente al problema

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (128)$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (129)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x}) \quad ; \quad \text{div} \vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad (130)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, 0) = \vec{G}(\vec{x}) \quad ; \quad \text{div} \vec{G}(\vec{x}) = 0 \quad (131)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, t) = c \text{rot } \vec{G}(\vec{x}) \quad (132)$$

Se le funzioni $\vec{F}(\vec{x})$ e $\vec{G}(\vec{x})$ soddisfano le proprietà a) e b) precedentemente menzionate, si mostra, usando lo stesso procedimento esposto prima, che la funzione definita dal secondo membro

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int (\vec{A}(\vec{k})e^{-i\omega t} + \vec{B}(\vec{k})e^{i\omega t}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k$$

con $\vec{A}(\vec{k})$ e $\vec{B}(\vec{k})$ soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{k}) + \vec{B}(\vec{k}) &= \vec{F}(\vec{k}) \\ \omega(-\vec{A}(\vec{k}) + \vec{B}(\vec{k})) &= c\vec{k} \times \vec{G}(\vec{k}), \end{aligned}$$

soddisfa le condizioni iniziali (130) e (132) e soddisfa l'equazione (128).

Inoltre per (129), e la condizione (131) si ha ¹⁶

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{G}(\vec{x}) - c \int_0^t \text{rot } \vec{E}(\vec{x}, t') dt'.$$

¹⁶Ricordiamo che $\omega = \sqrt{c^2 k^2}$

Notiamo che, essendo $\vec{E}(\vec{x}, t)$ a valori reali,

$$\begin{aligned} & \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k + \int \vec{B}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} d^3 k = \\ & = \int \vec{A}^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} d^3 k + \int \vec{B}^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} d^3 k = \\ & = \int \vec{A}^*(-\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} d^3 k + \int \vec{B}^*(-\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k \end{aligned}$$

e questa eguaglianza può essere vera $\forall \vec{x}$ e $\forall t$ solo se

$$\vec{B}(\vec{k}) = \vec{A}^*(-\vec{k}).$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k + \\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{A}^*(-\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} d^3 k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{A}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k + \text{complesso coniugato.} \end{aligned}$$

6 Soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee nei mezzi materiali omogenei (ed isotropi) con assegnate condizioni iniziali

Se il mezzo non è conduttore e non ferromagnetico il problema si formula nel modo seguente:

determinare una soluzione delle equazioni

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (133)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (134)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}, t) = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu \vec{H}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') \vec{E}(\vec{x}, t') dt' \quad (135)$$

con le condizioni iniziali :

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \vec{F}(\vec{x}) \quad , \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{G}(\vec{x}). \quad (136)$$

Osserviamo che a causa della relazione (135) il sistema di equazioni è un sistema di equazioni integrodifferenziali. Poichè le equazioni sono del primo ordine nelle derivate delle funzioni incognite $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ (e di conseguenza \vec{H}) devono appartenere a C^1 nelle variabili \vec{x} e t . Tuttavia per gli sviluppi successivi considereremo la soluzione nella classe

$\alpha.1)$ $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B} \in C^2$ nelle variabili \vec{x} e t

$\alpha.2)$ $\forall \vec{x}_0$ e per $I(\vec{x}_0)$ intorno di \vec{x}_0

$$\sup_{\vec{x} \in I(\vec{x}_0)} \left| \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(\vec{x}, t) \right| < f_j(t) \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') f_j(t') dt' < \infty$$

Per la $\alpha.1$ dalla (133) abbiamo $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$ e quindi se $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, 0) = 0$ si ha $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = 0, \forall t$ e dalla (134) abbiamo $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}, t) = 0$ e quindi se $\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}, 0) = 0$ si ha $\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}, t) = 0, \forall t$.

Pertanto possiamo riformulare il problema nel modo seguente, sostituendo anche $\vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{x}, t)$,

$$I \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (137) \\ \text{rot } \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (138) \\ \vec{D}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') \vec{E}(\vec{x}, t') dt' \quad (139) \\ \text{con le condizioni iniziali} \\ \vec{D}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x}), \text{ div } \vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad (140) \\ \vec{B}(\vec{x}, 0) = \vec{G}(\vec{x}), \text{ div } \vec{G}(\vec{x}) = 0 \end{array} \right.$$

Applichiamo alla (139) l'operatore div. Per la $\alpha.2$ possiamo scambiare le derivate rispetto alle x_j con l'integrale sul tempo e quindi abbiamo

$$\text{div } \vec{D}(\vec{x}, t) = 0 = \text{div } \vec{E}(\vec{x}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') \text{div } \vec{E}(\vec{x}, t') dt' \quad (141)$$

Pertanto la funzione $\text{div } \vec{E}(\vec{x}, t)$ soddisfa l'equazione integrale (141) la cui unica soluzione è $\text{div } \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \forall t$. Applichiamo alla equazione (137) l'operatore rot ed all'equazione (138) l'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$. Poichè $\text{div } \vec{E}(\vec{x}, t) = 0$ abbiamo che

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}(\vec{x}, t)$$

Pertanto ogni soluzione del problema I (nella classe α), se esiste (non abbiamo dimostrato nè l'unicità nè l'esistenza della soluzione del problema I) è anche soluzione del problema II

$$II \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) \quad (142) \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (143) \\ \vec{D}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') \vec{E}(\vec{x}, t') dt' \quad (144) \\ \text{con le condizioni iniziali} \\ \vec{D}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x}), \vec{B}(\vec{x}, 0) = \vec{G}(\vec{x}) \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \frac{c}{\mu} \text{rot } \vec{G}(\vec{x}) \quad (145) \\ \text{div } \vec{F}(\vec{x}) = 0, \text{ div } \vec{G}(\vec{x}) = 0 \quad (146) \end{array} \right.$$

Sostituendo la (144) nella (142) abbiamo

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) + 4\pi \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') \vec{E}(\vec{x}, t') dt' \quad (147)$$

Poichè dalla definizione di \mathcal{K} si ha $\mathcal{K}(0) = 0$, e ricordando che l'estremo $-\infty$ indica un istante iniziale t_0 prima del quale $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e' identicamente nullo si ha

$$\lim_{t' \rightarrow -\infty} \mathcal{K}(t - t') \vec{E}(\vec{x}, t') = 0 \quad \forall \vec{x}$$

da cui otteniamo ¹⁷

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t - t') \vec{E}(\vec{x}, t') dt' &= \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} \right)_{t=t'} \vec{E}(\vec{x}, t) + \\ &+ \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial t'^2} (t - t') \vec{E}(\vec{x}, t') dt' = \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t - t') \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}(\vec{x}, t') dt'. \end{aligned}$$

Pertanto la (147) diventa

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) + 4\pi \frac{\mu}{c^2} \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t - t') \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}(\vec{x}, t') dt' \quad (148)$$

La (148) è notevolmente più complicata dell'equazione delle onde che si aveva nel vuoto. In quel caso, avendo dimostrato l'unicità e ottenuta la soluzione con la formula di Kirchhof del problema di Cauchy, abbiamo mostrato che si può ottenere anche una rappresentazione della soluzione mediante la trasformata di Fourier nelle variabili spaziali, determinata dalle trasformate di Fourier delle condizioni iniziali. In questo caso, poichè si tratta ancora di un problema con condizioni iniziali (anche se, per maggiore complicazione, le condizioni sono assegnate per la funzione $\vec{D}(\vec{x}, t)$ invece che per la funzione $\vec{E}(\vec{x}, t)$) abbiamo l'unica alternativa di cercare di discutere l'unicità e l'esistenza della soluzione facendo uso della trasformata di Fourier nelle variabili spaziali.

Tuttavia, poichè tale trasformata di Fourier è espressa da un integrale in R^3 di $\vec{E}(\vec{x}, t)$ è necessario che $\vec{E}(\vec{x}, t)$ sia definita $\forall \vec{x} \in R^3$. Ovviamente un mezzo materiale occupa solo una regione limitata di R^3 ; tuttavia si potrebbe sperare che la soluzione ottenuta nel caso di un mezzo materiale esteso a tutto R^3 possa anche risultare essere una buona approssimazione del problema nel caso di un mezzo materiale che occupa una regione limitata di R^3 . In effetti una tale schematizzazione presenta delle conseguenze assurde. Infatti in $\mathcal{K}(t - t')$ figurano termini del tipo $e^{-\gamma t}$ e quindi, come vedremo, la soluzione della (148), oltre a propagarsi nello spazio al crescere di t , si smorza esponenzialmente, e viceversa per $t \rightarrow -\infty$ cresce esponenzialmente. Se d'altra parte, come avviene nel caso reale, si considera un mezzo che occupa una regione limitata V , si presenta un'altra difficoltà. Infatti in tal caso $\vec{E}(\vec{x}, t)$ soddisfa l'equazione (148) per $\vec{x} \in V$ e l'equazione delle onde per $\vec{x} \notin V$. con

¹⁷Si osservi che $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t'}$, mentre $\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial t'^2}$.

opportune condizioni sulla superficie di bordo di V , ed in tal caso la trasformata di Fourier non è di alcuna utilità. Infatti la trasformata di Fourier è utile per ottenere la soluzione dell'equazione delle onde $\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ con condizioni iniziali, perchè essendo $\varphi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 \varphi(\vec{k}, \vec{x}) = -k^2 \varphi(\vec{k}, \vec{x}) \quad \text{in } R^3$$

se $\tilde{u}(\vec{k}, t)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) = -k^2 v^2 \tilde{u}(\vec{k}, t)$$

allora $f(\vec{k}, \vec{x}, t) = \tilde{u}(\vec{k}, x) \varphi(\vec{k}, x)$ soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 f(\vec{k}, \vec{x}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\vec{k}, \vec{x}, t).$$

Nel caso in cui $\vec{E}(\vec{x}, t)$ soddisfa diverse equazioni nelle diverse regioni V e $R^3 - V$ occorre cercare soluzioni $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$ di opportune equazioni nelle regioni, che risultano ovviamente diverse da $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, e calcolare, come vedremo in seguito, la trasformata rispetto a tali funzioni $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$.

Se quindi si vuole considerare il problema della soluzione della (148) con condizioni iniziali nel mezzo materiale, senza dover tener conto di quello che avviene al di fuori della regione V occupata dal mezzo materiale, occorre che le condizioni iniziali siano nulle al di fuori di una regione V_0 ¹⁸, contenuta in V e tale che la minima distanza dei punti del bordo di V_0 dal bordo di V sia sufficientemente grande in modo da assicurarsi che la soluzione per $t > 0$ non si propaghi fino al bordo nell'intervallo di tempo T in cui si desidera considerare la soluzione. (Ovviamente la validità di queste considerazioni, intuitivamente ragionevoli, derivano dal senno di poi, dove il poi è la conoscenza di quel che avviene quando si studia la propagazione in due mezzi diversi, vuoto o mezzo materiale, che noi studieremo nel seguito).

Supponiamo pertanto che le condizioni iniziali abbiano un supporto V^0 compatto (il supporto di una funzione è il complementare del più grande insieme aperto in cui la funzione è nulla) e cercheremo la soluzione nella classe di funzioni

- $\beta)$ $\vec{E}(\vec{x}, t), \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, t), \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{x}, t)$ hanno un supporto che appartiene ad un compatto di R^3 , $\forall t$ appartenente ad un intervallo $(0, T)$ (dalla definizione di supporto segue che anche le derivate parziali rispetto a x_i hanno lo stesso supporto).

¹⁸ V e V_0 siano a connessione lineare semplice, cioè patate senza buchi

Possiamo pertanto usare la trasformata di Fourier perchè, anche se formalmente l'integrale è esteso ad R^3 , la funzione $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e le sue derivate sono diverse da zero nel compatto di R^3 (patata senza buchi). Se si considerassero condizioni iniziali appartenenti ad \mathcal{S} il risultato sarebbe solo approssimativamente valido, a condizione che le condizioni iniziali siano sufficientemente piccole al di fuori della regione occupata dal mezzo materiale, e sufficientemente piccoli i valori della soluzione sulla frontiera del materiale nell'intervallo $(0, T)$, onde evitare consistenti effetti dovuti alle riflessioni sul bordo del materiale. Applicando la trasformata di Fourier all'equazione (148) otteniamo, poichè la condizione β assicura lo scambio delle derivate rispetto al tempo con l'integrale su R^3 ¹⁹

$$-k^2 \vec{E}(\vec{k}, t) = \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{k}, t) + \frac{4\pi\mu}{c^2} \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-t') \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}(\vec{k}, t') dt' \quad (149)$$

Consideriamo soluzioni dell'equazione (149) della forma

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t}.$$

Ricordando che

$$\chi(t-t') = \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(t-t') \Theta(t-t')$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} (\vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t'}) dt' = \\ & = -\omega^2 \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') e^{-i\omega(t-t')} dt' = \\ & = -\omega^2 \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t} \tilde{\chi}(\omega). \end{aligned}$$

Pertanto $\vec{E}(\vec{k}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t}$ è soluzione della (149) solo se ω è soluzione dell'equazione

$$k^2 = \frac{\mu\omega^2}{c^2} (1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega)) \quad \text{con} \quad \tilde{\chi}(\omega) = \frac{e^2}{m} N \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_i} \quad (150)$$

e $\gamma_i > 0$.

Poichè k^2 è reale le soluzioni ω della (150) sono complesse. Inoltre se ω è soluzione della (150) anche $-\omega^*$ è soluzione della (150). Infatti per k^2 reale

$$\omega^2 (1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega)) = [\omega^2 (1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega))]^* =$$

¹⁹Poichè

$$\int_{R^3} \int_{-\infty}^t \dot{\imath} d^3x d^3t' |\mathcal{K}(t-t')| \left| \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}(\vec{x}, t') \right| < \infty$$

per il teorema di Fubini-Tonelli si può scambiare l'integrale su d^3x con l'integrale su dt' .

$$\begin{aligned}
&= \omega^{*2} \left(1 + \frac{4\pi e^2}{m} N \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^{*2} - i\omega^* \gamma_i} \right) = \\
&= (-\omega^*)^2 \left(1 + \frac{4\pi e^2}{m} N \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - (-\omega^*)^2 - i(-\omega^*) \gamma_i} \right).
\end{aligned}$$

Se $\tilde{E}(\vec{k}, t) \neq 0$ solo per valori di k^2 per i quali l'equazione (150) ha solo le soluzioni ω e $-\omega^*$ la generale soluzione della (149) è

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(\vec{k}, t) &= \vec{A}(\vec{k}) e^{i\omega_1 t} + \vec{B}(\vec{k}) e^{i\omega_2 t} & (151) \\
\omega_1 &= -\omega_R + i\omega_I \\
\omega_2 &= \omega_R + i\omega_I \quad \omega_R > 0
\end{aligned}$$

e si può dimostrare che $\omega_I > 0$.

Se la soluzione della (149) è del tipo (151) allora, come vedremo, $\vec{A}(\vec{k})$ e $\vec{B}(\vec{k})$ sono determinate in modo univoco dalle condizioni iniziali. Pertanto l'unicità della soluzione è garantita per soluzioni che, oltre ad appartenere alla classe α e β , appartengono anche alla classe

γ) $\vec{E}(\vec{k}, t) \neq 0$ solo per valori di k^2 per i quali l'equazione (150) ha solo le soluzioni ω e $-\omega^*$.

Una corrispondente richiesta sulle trasformate di Fourier delle condizioni iniziali permetterà di determinare $\vec{A}(\vec{k})$ e $\vec{B}(\vec{k})$. Dalla definizione di $\tilde{\chi}(\omega)$ si vede che k^2 ha la suddetta proprietà solo se $\omega_R(k^2)$ è tale che $\omega_i < \omega_R(k^2) < \omega_{i+1}, \forall i$ e

$$|\omega_i - \omega_R(k^2)| \gg \omega_R(k^2) \gamma_i \quad |\omega_{i+1} - \omega_R(k^2)| \gg \omega_R(k^2) \gamma_{i+1}.$$

Quando $|\omega_i - \omega_R| \simeq \omega_R \gamma_i$ per qualche i , $\varepsilon(\omega_R) = 1 + 4\pi \tilde{\chi}(\omega_R)$ e quindi $v^2(\omega_R) = \mu \varepsilon(\omega_R)$ è una funzione rapidamente variabile di ω_R (fenomeno della dispersione anomala) e lo studio della propagazione per tali valori di ω_R risulta molto complicato (velocità di fase maggiore della velocità della luce nel vuoto). Definendo

$$\tilde{D}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{D}(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x$$

$$\text{se } \tilde{E}(\vec{k}, t) = \tilde{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t} \quad \text{sarà} \quad \tilde{D}(\vec{k}, t) = \varepsilon(\omega) \tilde{E}_0(\vec{k}) e^{i\omega t}.$$

Pertanto in corrispondenza della soluzione generale (151) si ha

$$\tilde{D}(\vec{k}, t) = \varepsilon(\omega_1) \vec{A}(\vec{k}) e^{i\omega_1 t} + \varepsilon(\omega_2) \vec{B}(\vec{k}) e^{i\omega_2 t} \quad (152)$$

e pertanto

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{F}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x = \vec{D}(\vec{k}, 0) = \varepsilon(\omega_1) \vec{A}(\vec{k}) + \varepsilon(\omega_2) \vec{B}(\vec{k}) \quad (153)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{c}{\mu} \int \text{rot } \vec{G}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x &= \frac{c}{\mu} \vec{k} \times \vec{G}(\vec{k}) = \\ &= \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{x}, 0) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x = \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D}(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x \right)_{t=0} &= i(\omega_1 \varepsilon(\omega_1) \vec{A}(\vec{k}) + \omega_2 \varepsilon(\omega_2) \vec{B}(\vec{k})) \end{aligned} \quad (154)$$

Dalle (153) e 154) si determinano $\vec{A}(\vec{k})$ e $\vec{B}(\vec{k})$. Osserviamo che, tenuto conto della soluzione generale, invece della condizione iniziale $\vec{D}(\vec{x}, 0) = \vec{F}(\vec{x})$; $\text{div} \vec{F} = 0$ si può equivalentemente sostituire nel problema II la condizione iniziale $\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{F}_1(\vec{x})$; $\text{div} \vec{F}_1 = 0$ poichè in questo caso avremmo

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{F}_1(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x = \vec{F}_1(\vec{k}) = \vec{A}(\vec{k}) + \vec{B}(\vec{k}) \quad (155)$$

e quindi $\vec{A}(\vec{k})$ e $\vec{B}(\vec{k})$ si determinano dalle equazioni (155) e 154). Osserviamo che affinché l'espressione

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega_1 t)} d^3k + \int \vec{B}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega_2 t)} d^3k \right]$$

abbia senso è sufficiente che ²⁰

$$\int |A_i(\vec{k})| d^3k < \infty \quad \int |B_i(\vec{k})| d^3k < \infty.$$

²⁰Per stabilire a quale classe di funzione debbano appartenere le funzioni che specificano i dati iniziali bisogna richiedere che $\vec{E}(\vec{x}, t)$ soddisfi l'equazione (148), poichè in essa compare il termine

$$\nabla^2 \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t)} d^3k$$

e occorre che

$$\int k^2 |A_i(\vec{k})| d^3k < \infty.$$

Poichè

$$\vec{A} = \frac{\vec{F} - i \frac{c}{\mu} \vec{k} \times \vec{G}}{\varepsilon(\omega_1)(\omega_2 - \omega_1)}$$

dalla condizione

$$|\vec{A}(\vec{k})| < \frac{C}{|k|^{5+\varepsilon}}$$

segue che $\vec{F}(\vec{x})$ deve avere derivata sesta continua rispetto a x_i e $\vec{G}(\vec{x})$ derivata settima continua.

7 Metodo della fase stazionaria

Consideriamo l'integrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{ixF(\xi)} d\xi$$

con $\varphi(\xi)$ a supporto compatto. Per grandi valori di $|x|$ la funzione $e^{ixF(\xi)}$ ha rapide oscillazioni i cui contributi all'integrale si cancellano tra loro: La cancellazione è meno accentuata nell'intorno di un punto in cui $F(\xi)$ è lentamente variabile, cioè nell'intorno di un punto ξ_0 in cui $F'(\xi_0) = 0$, che prende il nome di punto di fase stazionaria. Se quindi un punto di fase stazionaria appartiene al supporto di $\varphi(\xi)$, il contributo significativo all'integrale $I(x)$, per grandi $|x|$, è dovuto agli ξ nell'intorno di ξ_0 , mentre se ξ_0 non appartiene al supporto di $\varphi(\xi)$ $I(x)$ va a zero rapidamente per grandi $|x|$.

Mostreremo anzitutto che $I(x)$ si annulla rapidamente per grandi $|x|$ se nessun punto di fase stazionaria appartiene al supporto di $\varphi(\xi)$, otterremo poi uno sviluppo asintotico di $I(x)$ in $|x|^{-1}$ nel caso in cui un punto di fase stazionaria appartiene al supporto di $\varphi(\xi)$.

Ricordiamo la definizione di sviluppo asintotico. Si dice che una funzione $f(x)$ ha uno sviluppo asintotico per $x \rightarrow \infty$, e si scrive

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{x^j} + R_{n+1}(x),$$

se $\forall n$

$$x^n \left(f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{x^j} \right) = a_n \epsilon_n(x)$$

con $\epsilon_n(x)$ che tende a zero (uniformemente rispetto a n), per $x \rightarrow \infty$, il che è equivalente ad affermare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{x^j} \right) = a_n \quad \forall n.$$

Notiamo che dalla affermazione che $f(x)$ ha uno sviluppo asintotico (per grandi x) non segue che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{x^j}$ converge nell'intorno di $1/x$.

Teorema I Sia K un sottoinsieme compatto di R . Supponiamo che $F(\xi)$ sia una funzione a valori reali definita in un intorno \mathcal{O} di K e tale che $F \in C^{l+1}(\mathcal{O})$ con $F'(\xi)$ che non si annulla mai in K . Allora se $\varphi \in C^l(K^{int})$, K^{int} compatto costituito da punti interni a K , si ha

$$\left| \int e^{ix_0 F(\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| < \frac{C}{|x_0|^l} \sum_{i=0}^l \sup_{x \in K^{int}} \left| \frac{d^i \varphi}{d\xi^i} \right| \quad \left(\frac{d^0 \varphi}{d\xi^0} \equiv \varphi \right).$$

Poichè $F'(x)$ non si annulla mai in K , $|F'(\xi)|$ è una funzione continua in un insieme compatto e che quindi assume il suominimo maggiore di zero in K , e pertanto esiste un $a > 0$ tale che $|F'(\xi)| > a \quad \forall \xi \in K$. Inoltre da $F'(\xi) \neq 0$ segue, per il teorema delle funzioni implicite che $\forall \xi_0 \in K$ esiste un intorno V_{ξ_0} tale che l'equazione $F(\xi) = y (y \in \text{Cd } F(\xi))$ per $\xi \in K$ ha una soluzione $\xi = g(y)$ con

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}}.$$

Poichè K è compatto esiste un ricoprimento finito di K con gli intorni V_{ξ_0} e quindi $g(F(\xi)) = \xi, \forall \xi \in K$.

Allora

$$\begin{aligned} \int \varphi(\xi) e^{ixF(\xi)} d\xi &= \int \varphi(\xi(y)) e^{ixy} \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} dy = \\ &= \int \left[\left(\frac{1}{ix} \frac{d}{dy} \right)^l e^{ixy} \right] \varphi(g(y)) \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} dy = \\ &= \frac{1}{x^l} \int e^{ixy} \left(i \frac{d}{dy} \right)^l \left[\varphi(g(y)) \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} \right] dy. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} &= \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} \frac{d\xi}{dy} = \\ &= - \left(\frac{d^2 F}{d\xi^2} \right)_{\xi=g(y)} \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}^3} \end{aligned}$$

ed analogamente per le derivate fino all'ordine l . Poichè

$$\left| \frac{dF}{d\xi} \right| \geq a > 0 \quad \text{tutte le derivate}$$

$$\frac{d^j}{dy^j} \left(\frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} \right) \quad \text{per } 0 \leq j \leq l \text{ possono essere maggiorate}$$

in modulo da una costante $\forall y \in \text{Cd } F(\xi), \xi \in K$ e pertanto

$$\sup_{y \in \text{Cd } F(\xi)} \left| \frac{d^l}{dy^l} \left(\varphi(g(y)) \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)_{\xi=g(y)}} \right) \right| \leq B \sum_{i \leq l} \sup_{\xi \in K^{int}} \left| \frac{d^i \varphi(\xi)}{d\xi^i} \right|$$

Ponendo $\alpha = \int_K d\xi$ ed $\alpha B = C$ si ha

$$\left| \int e^{ixF(\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| < \frac{C}{|x|^l} \sum_{i=0}^l \sup_{\xi \in K^{int}} \left| \frac{d^i \varphi}{d\xi^i} \right|$$

Teorema II Metodo della fase stazionaria

Sia $\varphi \in C_0^\infty(R)$ e sia $F \in C_0^\infty(R)$ una funzione reale ²¹, e l'equazione $F'(\xi) = 0$ abbia soluzione unica ξ_0 sul supporto della funzione φ , dove $F''(\xi) \neq 0$. Allora l'integrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{ixF(\xi)} d\xi \quad (156)$$

ha la seguente sviluppo asintotica in potenze negative di x :

$$I(x) = e^{ixF(\xi_0)} \sum_{j=0}^n a_j(\varphi, F) x^{-j-\frac{1}{2}} + R_{n+1}(x)$$

dove $R_{n+1}(x) = O(x^{-n-\frac{3}{2}})$.

Daremo qui la derivazione di questa formula e della stima del resto R_{n+1} . Nell'integrale facciamo la sostituzione di variabile

$$[F(\xi) - F(\xi_0)] = t^2 \operatorname{sgn}[F''(\xi)]$$

e siano $\omega = |x|$, $\sigma = \operatorname{sgn}[xF''(\xi_0)]$. Si ha

$$I(x) = e^{ixF(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi(t) dt, \quad (157)$$

dove $\psi(t) = \varphi(\xi(t)) d\xi/dt$, $\psi \in C_0^\infty(R)$. Trasformiamo la (157) al modo seguente:

$$\begin{aligned} e^{-ixF(\xi_0)} I(x) &= \psi(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} [\psi(t) - \psi(0)] dt = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\sigma\pi/4} \psi(0) - \frac{1}{2i\omega\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_1(t) dt, \end{aligned}$$

dove

$$\psi_1(t) = \frac{d}{dt} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}$$

e si è integrato per parti. ²²

È facile vedere che fuori dal supporto della funzione $\psi(t)$ vale la seguente eguaglianza:

$$\psi_1(t) = \frac{\psi(0)}{t^2}$$

²¹ C_0 sta ad indicare a supporto compatto

²²Tenendo conto che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iu^2} du = \sqrt{\pi} \exp(\pm i\pi/4)$

Trasformando l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_1(t) dt$ allo stesso modo dell'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi(t) dt$ si ha

$$e^{-ixF(\xi_0)} I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\sigma\pi/4} \left(\psi(0) + \frac{i}{2\omega\sigma} \psi_1(0) \right) + \left[\frac{i}{2\omega\sigma} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_2(t) dt,$$

dove

$$\psi_2(t) = \frac{d}{dt} \frac{\psi_1(t) - \psi_1(0)}{t}.$$

Iterando questo procedimento otteniamo

$$e^{-ixF(\xi_0)} I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\sigma\pi/4} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i}{2\omega\sigma} \right)^j \psi_j(0) + \left(\frac{i}{2\omega\sigma} \right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_{n+1}(t) dt, \quad (158)$$

dove

$$\psi_{j+1}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\psi_j(t) - \psi_j(0)}{t}, \quad j = 1, 2, \dots, \psi_0 = \psi.$$

Per provare la (158) dobbiamo verificare che per ogni intero j

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \frac{\psi_j(t) - \psi_j(0)}{t} = 0. \quad (159)$$

Usando la formula esplicita per $\psi_1(t)$, per t grande è facile stabilire per induzione che per $t \notin \text{supp} \psi$ abbiamo $\psi_j(t) = t^{-2} P(t^{-1})$, dove P è un polinomio di ordine j . Abbiamo allora derivato la (156).

Otteniamo allora la seguente sviluppo :

$$\sqrt{x} e^{-ixF(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixF(\xi)} \varphi(\xi) d\xi = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \text{sgn} F''(\xi_0) \times \sum_{j=0}^n \left(\frac{i}{2x \text{sgn} F''(\xi_0)} \right)^j \psi_j(0) + r_{n+1}(x), \quad (160)$$

$$r_{n+1}(x) = \sqrt{x} \left(\frac{i \text{sgn} F''(\xi_0)}{2x} \right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2 \text{sgn} F''(\xi_0)} \psi_{n+1}(t) dt, \quad (161)$$

nella quale se x è negativo allora

$$\sqrt{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|x|} e^{i\pi/2} \text{sgn} F''(\xi_0).$$

Nell'enunciato del teorema II si fa l'ipotesi che φ ed F appartengono a $C_0^\infty(\mathbb{R})$ perchè si vuole calcolare lo sviluppo asintotico $\forall n$. Se si vuole calcolare lo sviluppo asintotico fino all'ordine n_0 basta supporre che le funzioni appartengano a $C_0^{n_0+5}$.

Notiamo che essendo $F''(\xi) \neq 0$ nel supporto di $\varphi(\xi)$ si ha

$$\operatorname{sgn}F''(\xi) = \operatorname{sgn}F''(\xi_0)$$

Inoltre per la formula di Taylor

$$F(\xi) = F(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2} F''(\xi_0 + \eta(\xi))$$

dove $\eta(\xi)$ è un punto interno al segmento che congiunge il punto ξ con il punto ξ_0 . Si dimostra che se $F(\xi) \in C^l$

$$H(\xi) = F''(\xi_0 + \eta(\xi)) \in C^{l-2}.$$

Pertanto

$$t^2 = (F(\xi) - F(\xi_0)) \operatorname{sgn}F''(\xi_0) = (\xi - \xi_0)^2 \frac{H(\xi)}{2} \operatorname{sgn}F''(\xi_0)$$

e quindi

$$t = \pm(\xi - \xi_0) G^{1/2}(\xi) \quad , \quad G(\xi) = \frac{H(\xi)}{2} \operatorname{sgn}F''(\xi_0) > 0$$

da cui

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm \frac{1}{G^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{G'}{G^{1/2}} (\xi - \xi_0)} = \pm \left(\frac{2G^{1/2}(\xi)}{2G(\xi) + (\xi - \xi_0)G'(\xi)} \right)_{\xi=\xi(t)}$$

Indicando con L la precedente funzione abbiamo

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\frac{dL(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=\xi(t)} \frac{d\xi}{dt}$$

e quindi $\frac{d\xi}{dt} \in C^{l-4}$ e

$$\psi(t) = \varphi(\xi(t)) \frac{d\xi}{dt} \in C^{l-4}$$

Pertanto se vogliamo calcolare lo sviluppo asintotico fino all'ordine n_0 , e quindi dimostrare che $|x|^{1/2} R_{n_0+1}$ è dell'ordine

$1/|x|^{n_0+1}$ basta supporre che le funzioni $\varphi(\xi)$ e $F(\xi)$ appartengono a $C_0^{n_0+5}$.

I precedenti teoremi I e II si possono estendere al caso di n variabili

$$I(x) = \int e^{ixF(\vec{\xi})} \varphi(\vec{\xi}) d^n \xi.$$

Per il teorema I si ha che a destra della diseguaglianza compare il $\sup_{x \in K^{int}}$ delle derivate parziali.

Per il teorema II si ha per il primo termine dello sviluppo asintotico, nell'ipotesi che le equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i}(\vec{\xi}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

abbiano una unica soluzione $\vec{\xi}_0$ sul supporto di $\varphi(\vec{\xi})$ e che il determinante $\left| \frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j} \right| \neq 0$ sul supporto di $\varphi(\vec{\xi})$,

$$I(x) = e^{ixF(\vec{\xi}_0)} \left(\frac{\pi}{|x|} \right)^{\frac{n}{2}} \varphi(\vec{\xi}_0) u(\vec{\xi}_0)$$

dove $u(\vec{\xi}_0)$ è una funzione che dipende dal cambiamento di variabili in R^n .

Vediamo ora come si applica il metodo della fase stazionaria nel caso della soluzione $\vec{E}(\vec{x}, t)$ delle equazioni di Maxwell nei mezzi materiali

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_1 t)} d^3 k + \int \vec{B}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_2 t)} d^3 k \right\}$$

Poichè nei mezzi non densi $e^{-\omega t}$ è molto vicino ad 1 per tempi t impiegati dalla radiazione per propagarsi su distanze dell'ordine dei metri, ed in ogni caso essendo $e^{-\omega t}$ reale la sua presenza non ha influenza sulle considerazioni seguenti, porremo $e^{-\omega t} = 1$ e quindi $\omega_{1,2} = \mp \omega_R = \mp \omega$.⁽²³⁾ Abbiamo pertanto

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k + \text{c.c.}$$

Per valutare l'ordine di grandezza delle quantità che compaiono nell'espressione precedente supponiamo che per $\vec{k} \in$ supporto di $\vec{A}(\vec{k})$, $\lambda = 2\pi/k$ sia nella zona del visibile, quindi $\lambda \simeq 10^{-5} \text{cm}$ e $k \simeq 10^5 \text{cm}^{-1}$. Usando come unità $l = 10^5 \text{cm}$, k sarà dell'ordine di 1 se misurato in unità l^{-1} . D'altra parte siamo interessati a valori macroscopici delle x_i , cioè dell'ordine del cm o maggiori. Pertanto

$$x_i [\text{cm}] = x_i \lambda_0 l \quad \text{con} \quad \lambda_0 = \frac{cm}{l} \sim 10^5.$$

²³Notiamo che $\omega_R \simeq$ soluzione dell'equazione

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \right)$$

nell'ipotesi

$$|\omega_i^2 - \omega_R^2| \gg \omega_R \gamma_i \quad ; \quad |\omega_{i+1}^2 - \omega_R^2| \gg \omega_R \gamma_{i+1}.$$

Dalla realtà di \vec{E} ed essendo ω funzione di k^2 si ha

$$\vec{B}(\vec{k}) = \vec{A}^*(-\vec{k})$$

Pertanto usando unità l abbiamo che

$$E_j(\vec{x}, t) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \Re \left\{ \int |\vec{A}(\vec{k})| e^{i\lambda_0 \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{\omega t}{\lambda_0} + \frac{\varphi_j(\vec{k})}{\lambda_0} \right)} d^3k \right\}$$

dove \vec{x} e \vec{k} sono ambedue dell'ordine dell'unità (eventualmente \vec{x} di ordine di grandezza anche maggiore). Ponendo quindi

$$F_j(\vec{k}) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{\omega t}{\lambda_0} + \frac{\varphi_j(\vec{k})}{\lambda_0}$$

abbiamo

$$E_j(\vec{x}, t) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \Re \left\{ \int |\vec{A}(\vec{k})| e^{i\lambda_0 F_j(\vec{k})} d^3k \right\}$$

cioè un integrale del tipo di quelli considerati nel metodo della fase stazionaria, dove il parametro in cui va considerato lo sviluppo asintotico è $\lambda_0 \sim 10^5$. Per ogni fissato t ed \vec{x} il punto di fase stazionario è definito dalle equazioni

$$\frac{\partial}{\partial k_i} \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{\omega t}{\lambda_0} + \frac{\varphi_j(\vec{k})}{\lambda_0} \right) = 0.$$

Pertanto se il punto $\vec{k}(\vec{x}, t)$ soluzione delle equazioni

$$x_i - \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t + \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \varphi_j}{\partial k_i} = 0$$

appartiene al supporto di $|A_j(\vec{k})| \forall j$ risulta

$$E_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_0^{3/2}} |A_j(\vec{k}(\vec{x}, t))| \cos(\lambda_0 F_j(\vec{k}(\vec{x}, t))) u_j(\vec{k}(\vec{x}, t))$$

dove, come abbiamo detto $u_j(\vec{k}(\vec{x}, t))$ è una funzione dovuta al cambiamento di variabili analogo, ma più complicato, a quello usato in una dimensione. Comunque $E_j(\vec{x}, t)$ risulta proporzionale a $\lambda_0^{-3/2}$ per il valore di $|A_j(\vec{k})|$ per il coseno del fattore di fase nel punto di fase stazionaria.

L'equazione che fornisce il punto di fase stazionaria può anche essere riscritta nella forma

$$x_i - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t + \frac{\partial \varphi_j}{\partial k_i} = 0$$

se si misura k_i in cm^{-1} .

Cominciamo col considerare il caso in cui $|A_j(\vec{k})| = |A_j(k)|$, $\varphi_j(\vec{k}) = \varphi_j(k)$ con $|A_j(k)| \neq 0$ solo in un intorno Δk di $k = \kappa$ con $\Delta k/\kappa \ll 1$ e supponiamo che le $|A_j(k)|$ abbiano un solo massimo per $k = \kappa$. Per ogni

fissato t , $E_j(\vec{x}, t)$ avrà pertanto un massimo per un \vec{x} tale che $k(\vec{x}, t) = \kappa$ (occorrerebbe controllare anche $u_j(k(\vec{x}, t))$ ma se $\Delta k/\kappa \ll 1$, u_j risulta lentamente variabile per \vec{k} appartenente al supporto di $|A_j(k)|$).

La presenza del coseno del fattore di fase è irrilevante.

$$E_j(\vec{x}, t) \propto |A_j(\vec{k}(\vec{x}, t))| \cos(\lambda_0 F_j(\vec{k}(\vec{x}, t)))$$

e per un assegnato t

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i} &\propto \frac{\partial |A_j(\vec{k}(\vec{x}, t))|}{\partial x_i} \cos(\lambda_0 F_j(\vec{k}(\vec{x}, t))) \\ &- |A_j(\vec{k}(\vec{x}, t))| \lambda_0 \sin(\lambda_0 F_j(\vec{k}(\vec{x}, t))) \sum_l \frac{\partial F_j}{\partial k_l} \frac{\partial k_l}{\partial x_i} \end{aligned}$$

per la stazionarietà del fattore di fase $\frac{\partial F_j}{\partial k_l} = 0$ quindi l'ultimo termine è nullo. Ne segue che i punti di estremo di E_j sono quelli di $|A_j|$ oppure quelli in cui $\cos(\lambda_0 F_j)$ si annulla, ma in questo caso anche E_j è nullo. Per lo studio della localizzazione di E_j è sufficiente prendere in considerazione la sola ampiezza $|A_j|$

Notiamo che ω dipende solo da k^2 e quindi

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial k_i} = \frac{d\omega}{dk} \frac{k_i}{k}$$

pertanto il valore di \vec{x} per cui $k(\vec{x}, t) = \kappa$ si ottiene dall'equazione

$$x_i = \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\kappa} t - \left(\frac{d\varphi_j}{dk} \right)_{k=\kappa} \right] \frac{\kappa_i}{\kappa}.$$

Poichè $|A_j(k)|$ dipende solo dal modulo di k , $E_j(\vec{x}, t)$ avrà valore massimo sui punti di una superficie sferica di raggio

$$|\vec{x}| = \left| \frac{d\omega}{dk} t - \frac{d\varphi_j}{dk} \right|$$

e in particolare per $t = 0$ sulla superficie di raggio $\left| \frac{d\varphi_j}{dk} \right|$.

Supponiamo ora che $|A_j(\vec{k})|$ sia diverso da zero per k appartenente ad un intorno Δk di κ con $\Delta k/\kappa \ll 1$ e per le direzioni del vettore \vec{k} costante in un cono circolare di ampiezza ψ (angolo delle generatrici con l'asse del cono) $\psi \ll 1$ con asse individuato dagli angoli θ_0 e ϕ_0 (rispetto ad un sistema di coordinate sferiche) e supponiamo inoltre che $|A_j(k)|$ abbia un unico massimo per $k = \kappa$ e $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$. Per ogni fissato t il massimo di $E_j(x, t)$ si ottiene per \vec{x} dato dall'equazione

$$x_i = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\kappa} t \left(\frac{k_i}{k} \right)_{k=\kappa, \theta=\theta_0, \phi=\phi_0} - \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial k_i} \right)_{k=\kappa, \theta=\theta_0, \phi=\phi_0}$$

in particolare per $t = 0$

$$x_i = - \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial k_i} \right)_{k=\kappa, \theta=\theta_0, \phi=\phi_0} .$$

Pertanto il valore di \vec{x} per il quale $E_j(\vec{x}, t)$ è massimo si sposta di moto rettilineo e uniforme con velocità

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\kappa} \frac{\kappa_i}{\kappa}$$

essendo $\vec{\kappa}$ vettore di modulo κ e direzione individuata dagli angoli θ_0, ϕ_0 . Per ogni t fissato possiamo definire una localizzazione della regione in cui $E_j(\vec{x}, t)$ è sensibilmente diverso da zero associando la regione al punto in cui $E_j(\vec{x}, t)$ è massimo (supponiamo per semplicità che il massimo $E_j(\vec{x}, t)$ è assunto sempre nello stesso punto \vec{x} per tutti i j , il che è assicurato se $\varphi_j(\vec{k})$ è la stessa funzione per ogni j ed è approssimativamente verificato se t è sufficientemente grande e se $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial k_i} \right)_{k_i=\kappa_i}$ non differiscono di molto al variare di j).

In questo senso possiamo affermare che la regione in cui $E_j(\vec{x}, t)$ è sensibilmente diverso da zero si sposta al variare di t di moto rettilineo uniforme con velocità

$$\vec{v}_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\kappa} \frac{\vec{\kappa}}{\kappa}$$

che prende il nome di velocità di gruppo (o del gruppo d'onde rappresentato da $\int \vec{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3k + \text{c.c.}$). Notiamo che per due osservatori in moto relativo con S' che si sposta con la velocità \vec{v}_r rispetto ad S si ha che $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}_r t$. Se quindi per l'osservatore S il massimo di $E_j(\vec{x}, t)$ si ha per

$$\vec{x} = \vec{v}_g t - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right)_{k_i=\kappa_i}$$

per l'osservatore S' il punto di massimo si ha per

$$\vec{x}' = (\vec{v}_g - \vec{v}_r) t - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right)_{k_i=\kappa_i}$$

e quindi per S' , $\vec{v}_g' = \vec{v}_g - \vec{v}_r$, cioè la velocità di gruppo si trasforma come una velocità. Osserviamo che nel vuoto $\omega = ck$ e quindi

$$\vec{v}_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\kappa} \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = c \frac{\vec{\kappa}}{\kappa}$$

cioè il modulo della velocità di gruppo è eguale alla velocità di fase e non, come erroneamente sostenuto in molti testi: “nel vuoto la velocità di gruppo è eguale alla velocità di fase”.

In effetti la velocità di fase è un numero che ha le dimensioni della velocità, ma non è una velocità perchè per osservatori S ed S' con S' in moto rettilineo uniforme con velocità \vec{v}_r la velocità di fase non si trasforma come una velocità. Infatti

$$v_f = \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

dove s è l'ascissa che individua il luogo dei punti di egual fase che è ortogonale a \vec{k} . Poichè $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}_r t$ si ha che

$$ks = \vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k} \cdot \vec{x}' + \vec{k} \cdot \vec{v}_r t = ks' + \vec{k} \cdot \vec{v}_r t$$

e quindi (essendo s' l'ascissa del luogo dei punti di egual fase ortogonale a \vec{k} in S')

$$v'_f = \frac{ds'}{dt} = \frac{ds}{dt} - \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{v}_r = v_f - \vec{n} \cdot \vec{v}_r$$

dove \vec{n} è il versore di \vec{k} .

8 Equazioni omogenee di Maxwell nei mezzi in cui le proprietà elettriche e magnetiche dipendono dal punto. Approssimazione dell'iconale.

Consideriamo la trasformata di Fourier, rispetto al tempo, delle equazioni di Maxwell omogenee

$$\nabla \cdot (\tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega) \vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega)) = 0 \quad (162)$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mu}(\vec{x}, \omega) \vec{\tilde{H}}(\vec{x}, \omega)) = 0 \quad (163)$$

$$\nabla \times \vec{\tilde{H}}(\vec{x}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega) \vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega) \quad (164)$$

$$\nabla \times \vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \tilde{\mu}(\vec{x}, \omega) \vec{\tilde{H}}(\vec{x}, \omega) \quad (165)$$

Dalla terza e quarta equazione otteniamo

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \nabla \times \vec{\tilde{E}} \right) = i \frac{\omega}{c} \nabla \times \vec{\tilde{H}} = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon} \vec{\tilde{E}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Poichè } \nabla \times \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \nabla \times \vec{\tilde{E}} \right) &= \frac{1}{\tilde{\mu}} \nabla \times (\nabla \times \vec{\tilde{E}}) + \nabla \frac{1}{\tilde{\mu}} \times (\nabla \times \vec{\tilde{E}}) = \\ &= \frac{1}{\tilde{\mu}} \nabla (\nabla \cdot \vec{\tilde{E}}) - \frac{\nabla^2 \vec{\tilde{E}}}{\tilde{\mu}} - \frac{1}{\tilde{\mu}^2} \nabla \tilde{\mu} \times (\nabla \times \vec{\tilde{E}}) \end{aligned}$$

e dalla prima otteniamo

$$\tilde{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{\tilde{E}} + \nabla \tilde{\varepsilon} \cdot \vec{\tilde{E}} = 0 \text{ ossia } \nabla \cdot \vec{\tilde{E}} = - \frac{\tilde{\vec{E}} \cdot \nabla \tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} = - \vec{\tilde{E}} \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega) + \nabla (\vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega) \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega)) + \\ + \nabla \ln \tilde{\mu}(\vec{x}, \omega) \times (\nabla \times \vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega)) + \\ + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega) \tilde{\mu}(\vec{x}, \omega) \vec{\tilde{E}}(\vec{x}, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (166)$$

Il problema della soluzione dell'equazione(166) in generale presenta notevoli difficoltà. Tuttavia sotto opportune ipotesi è possibile ottenere una soluzione approssimata. A tale scopo è opportuno definire anzitutto l'intervallo di frequenze della soluzione a cui siamo interessati, per esempio, nel campo del

visibile. Supponiamo che per frequenze di tale ordine di grandezza si abbia, per ogni i , che

$$\frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega)} \left| \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega)}{\partial x_i} \right| \frac{1}{k_0} \ll 1, \quad \frac{1}{\tilde{\mu}(\vec{x}, \omega)} \left| \frac{\partial \tilde{\mu}(\vec{x}, \omega)}{\partial x_i} \right| \frac{1}{k_0} \ll 1, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (167)$$

ossia, poichè $\lambda \equiv 2\pi/k_0$, supponiamo che le variazioni relative di $\tilde{\varepsilon}$ e di $\tilde{\mu}$ su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda nel vuoto siano molto minori di uno. Poichè $n = \sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}$ lo stesso vale per l'indice di rifrazione.

Osserviamo che, nel caso in cui l'indice di rifrazione è indipendente dal punto, l'equazione(166) diventa

$$\nabla^2 \tilde{E}(\vec{x}, \omega) + n^2(\omega) k_0^2 \tilde{E}(\vec{x}, \omega) = 0$$

che ha soluzioni della forma

$$\tilde{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{A}(\vec{k}_0) e^{in\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}; \quad |\vec{k}_0|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Poichè nel nostro caso n varia col punto, ma con una variazione relativa piccola su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda nel vuoto, siamo indotti a ritenere che possano esistere soluzioni approssimate della (166) della forma

$$\tilde{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{A}(\vec{x}, \omega) e^{ik_0 \mathbf{S}(\vec{x})} \quad (168)$$

con $\mathbf{S}(\vec{x})$ a valori reali e $\vec{A}(\vec{x}, \omega)$ vettore a valori complessi che soddisfa ,per ogni i, j, k , le condizioni

$$\frac{1}{|\vec{A}|} \left| \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_k} \right| \frac{1}{k_0^2} \ll \frac{1}{|\vec{A}|} \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right| \frac{1}{k_0} \ll 1 \quad (169)$$

cioè che la variazione relativa di A_i su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda nel vuoto sia molto minore di uno e che la variazione seconda sia molto minore della variazione prima sulla stessa distanza.

È ovvio che la possibilità di ottenere soluzioni della forma (168) con le condizioni (169) dipende sia dalle condizioni (167) che da opportune condizioni iniziali su $\vec{E}(\vec{x}, t)$ che discuteremo in seguito.

Per semplicità di esposizione cominciamo col discutere una approssimazione più drastica che consiste nel trascurare nella (166) il termine

$$\nabla(\tilde{E}(\vec{x}, \omega) \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon}(\vec{x}, \omega)) + \nabla \ln \tilde{\mu}(\vec{x}, \omega) \times (\nabla \times \tilde{E}(\vec{x}, \omega))$$

riservando ad una nota seguente la trattazione dell'equazione (166). In tale approssimazione l'equazione da considerare è

$$\nabla^2 \tilde{E}(\vec{x}, \omega) + n^2(\vec{x}, \omega) k_0^2 \tilde{E}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (170)$$

cioè le equazioni per le componenti di \vec{E} sono disaccoppiate e sono identiche per ciascuna componente. Per questa ragione questa approssimazione è designata come *approssimazione dell'ottica scalare*.

Ponendo nella (170) $\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{A}(\vec{x}, \omega)e^{ik_0\mathbf{S}(\vec{x})}$ poichè

$$\nabla^2 \left(\vec{A}(\vec{x}, \omega)e^{ik_0\mathbf{S}(\vec{x})} \right) = e^{ik_0\mathbf{S}(\vec{x})} \left[\nabla^2 \vec{A} + 2ik_0(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla)\vec{A} - k_0^2(\nabla\mathbf{S})^2 \vec{A} + ik_0\vec{A}\nabla^2\mathbf{S} \right] \quad (171)$$

otteniamo che la (170) diventa, dividendo per k_0^2 ,

$$(n^2 - (\nabla\mathbf{S})^2)\vec{A} + \frac{i}{k_0} \left[\vec{A}\nabla^2\mathbf{S} + 2(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla)\vec{A} \right] - \frac{1}{k_0^2}\nabla^2\vec{A} = 0$$

Per le (169) possiamo trascurare gli ultimi due termini rispetto a $n^2 \frac{A_i}{|A|}$ per tutti gli i , e poichè l'equazione deve valere per ogni componente A_i abbiamo che

$$n^2 - (\nabla\mathbf{S})^2 + \frac{i}{k_0}\nabla^2\mathbf{S} = 0$$

Poichè \mathbf{S} deve essere reale allora

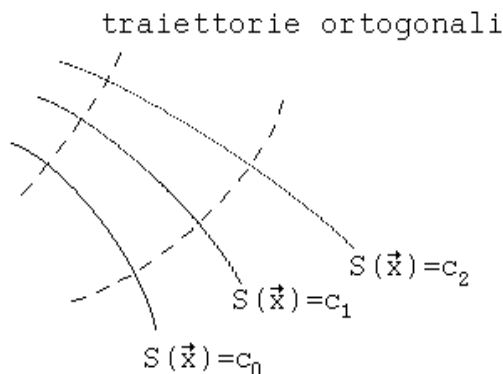
$$(\nabla\mathbf{S})^2 = n^2(\vec{x}, \omega).$$

Ciò non implica che $\nabla^2\mathbf{S} = 0$ ma solo che $\frac{1}{k_0}\nabla^2\mathbf{S}$ deve essere dello stesso ordine dei termini in $\frac{1}{k_0}$ che abbiamo trascurato. Pertanto abbiamo, trascurando i termini in $\frac{1}{k_0^2}$,

$$(\nabla\mathbf{S})^2 = n^2(\vec{x}, \omega) \quad (172)$$

$$(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla)A_i = -\frac{1}{2}A_i\nabla^2\mathbf{S} \quad (173)$$

La (??) prende il nome di equazione dell'iconale. Discuteremo in seguito le soluzioni della (??). Per il momento osserviamo che se $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega)$ è una soluzione della (??) la relazione $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega) = c$, al variare di c definisce una famiglia di superfici.



Per ogni punto \vec{x}_0 appartenente alla superficie $\mathbf{S}(\vec{x}) = c_0$ possiamo definire una curva passante per il punto \vec{x}_0 e che in ogni suo punto \vec{x} ha tangente ortogonale alla superficie $\mathbf{S}(\vec{x}) = c$ passante per quel punto²⁴, e pertanto il versore della tangente alla curva è

$$\vec{s} = \frac{\nabla \mathbf{S}}{|\nabla \mathbf{S}|} = \frac{\nabla \mathbf{S}}{n(\vec{x})}.$$

Ne segue che

$$\frac{\nabla \mathbf{S}(\vec{x})}{n(\vec{x})} \cdot \nabla$$

è la derivata nella direzione della tangente a tale curva passante per il punto \vec{x} , che indicheremo con $\frac{\partial}{\partial s}$. Quindi la (172) si scrive nella forma

$$\frac{\partial A_i}{\partial s} = -\frac{1}{2} \frac{A_i}{n} \nabla^2 \mathbf{S} \quad (174)$$

equazione che descrive la variazione di A_i lungo una traiettoria ortogonale. Integrando la (174) lungo la traiettoria ortogonale

$$A_i(\vec{x}(s_2)) = A_i(\vec{x}(s_1)) e^{-\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \mathbf{S}(\vec{x}(s))}{n(\vec{x}(s))} ds} \quad (175)$$

con $\vec{x}(s_1)$ ed $\vec{x}(s_2)$ punti della stessa traiettoria. Ponendo

$$A_i(\vec{x}) = |A_i(\vec{x})| e^{i\varphi_i(\vec{x})} \text{ abbiamo}$$

$$|A_i(\vec{x}(s_2))| e^{i\varphi_i(\vec{x}(s_2))} = |A_i(\vec{x}(s_1))| e^{i\varphi_i(\vec{x}(s_1))} e^{-\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \mathbf{S}(\vec{x}(s))}{n(\vec{x}(s))} ds}$$

e quindi $\varphi_i(\vec{x}(s_2)) = \varphi_i(\vec{x}(s_1))$ poichè $e^{-\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \mathbf{S}}{n} ds}$ è reale. Pertanto φ_i indipendente da \vec{x} è soluzione delle precedenti equazioni.

Poichè le equazioni (172) sono lineari, le soluzioni sono definite a meno di una costante moltiplicativa reale o complessa. Pertanto possiamo concludere che, nell'approssimazione dell'iconale, le soluzioni della (170) sono proporzionali a

$$E_i(\vec{x}, \omega) = A_i(\vec{x}, \omega) e^{ik_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \omega)}$$

con $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega)$ ed $A_i(\vec{x}, \omega)$ reali, che soddisfano rispettivamente la (??) e la (175). Notiamo inoltre che, per la (175) $A_i(\vec{x}, \omega)$ varia solo lungo una traiettoria ortogonale.

Consideriamo ora l'equazione (166). Poichè

$$\nabla(\vec{A} e^{ik_0 \mathbf{S}} \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon}) = e^{ik_0 \mathbf{S}} [ik_0(\vec{A} \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon}) \nabla \mathbf{S} + \nabla(\vec{A} \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon})] \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \nabla \ln \tilde{\mu} \times (\nabla \times \vec{A} e^{ik_0 \mathbf{S}}) &= e^{ik_0 \mathbf{S}} [ik_0 \nabla \ln \tilde{\mu} \times (\nabla \mathbf{S} \times \vec{A}) + \\ &+ \nabla \ln \tilde{\mu} \times (\nabla \times \vec{A})] = \end{aligned} \quad (177)$$

²⁴Tali curve prendono il nome di traiettorie ortogonali alla famiglia di superfici $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega) = c$.

$$= e^{ik_0\mathbf{S}}[ik_0(\vec{A} \cdot \nabla \ln \tilde{\mu})\nabla\mathbf{S} - ik_0(\nabla \ln \tilde{\mu} \cdot \nabla\mathbf{S})\vec{A} + \nabla \ln \tilde{\mu} \times (\nabla \times \vec{A})]$$

Sostituendo la (171), la (??) e la (176) nella (166) e dividendo per k_0^2 ,abbiamo

$$(n^2 - (\nabla\mathbf{S})^2)\vec{A} + \frac{i}{k_0} [(\nabla^2\mathbf{S} - \nabla\mathbf{S} \cdot \nabla \ln \tilde{\mu})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla \ln n^2)\nabla\mathbf{S} \\ + 2(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla)\vec{A}] - \frac{1}{k_0^2} [(\nabla \times \vec{A}) \times \nabla \ln \tilde{\mu} + \nabla^2\vec{A} - \nabla(\vec{A} \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon})] = 0$$

tenendo conto delle (167) e delle (169) abbiamo, trascurando i termini in $1/k_0^2$

$$(\nabla\mathbf{S})^2 = n^2(\vec{x}, \omega) \quad (178)$$

$$(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla)\vec{A} - \frac{\vec{A}}{2}(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla) \ln \tilde{\mu} = -\frac{\vec{A}}{2}\nabla^2\mathbf{S} - \frac{1}{2}(\vec{A} \cdot \nabla \ln n^2)\nabla\mathbf{S} \quad (179)$$

L'equazione (??) è identica all'equazione che si otteneva per la funzione iconale \mathbf{S} nell'ottica scalare.

Ponendo come prima

$$\frac{1}{n}(\nabla\mathbf{S} \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial s}$$

la (178) si riscrive

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial s} - \frac{\vec{A}}{2} \frac{\partial}{\partial s} \ln \tilde{\mu} = -\frac{\vec{A}}{2} \frac{\nabla^2\mathbf{S}}{n} - \frac{1}{2}(\vec{A} \cdot \nabla \ln n^2) \frac{\nabla\mathbf{S}}{n} \quad (180)$$

Moltiplicando questa equazione scalarmente per \vec{A}^* , e moltiplicando l'equazione per $\frac{\partial\vec{A}^*}{\partial s}$ scalarmente per \vec{A} e sommando otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial s}(\vec{A} \cdot \vec{A}^*) - (\vec{A} \cdot \vec{A}^*) \frac{\partial}{\partial s} \ln \tilde{\mu} = -(\vec{A} \cdot \vec{A}^*) \frac{\nabla^2\mathbf{S}}{n} + \frac{1}{2n} [(\vec{A} \cdot \nabla \ln n)\nabla\mathbf{S} \cdot \vec{A}^* \\ + (\vec{A}^* \cdot \nabla \ln n)\nabla\mathbf{S} \cdot \vec{A}] \quad (181)$$

Se nella prima equazione di Maxwell sostituiamo $\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{A}(\vec{x}, \omega)e^{ik_0\mathbf{S}(\vec{x}, \omega)}$

$$\text{otteniamo } \vec{A} \cdot \nabla\mathbf{S} = \frac{i}{k_0}(\vec{A} \cdot \nabla \ln \tilde{\varepsilon} + \nabla \cdot \vec{A})$$

e quindi trascurando i termini $\frac{1}{k_0}$ abbiamo

$$\vec{A} \cdot \nabla\mathbf{S} = 0.$$

Pertanto la (181) diventa, dividendo per $\vec{A} \cdot \vec{A}^*$,

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{\vec{A} \cdot \vec{A}^*}{\mu} = -\frac{\nabla^2\mathbf{S}}{n} \quad (182)$$

ed integrando lungo la traiettoria ortogonale abbiamo

$$\frac{(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)(\vec{x}(s_2))}{\tilde{\mu}(\vec{x}(s_2))} = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)(\vec{x}(s_1))}{\tilde{\mu}(\vec{x}(s_1))} e^{-\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \mathbf{S}(\vec{x}(s))}{n(\vec{x}(s))} ds} \quad (183)$$

osserviamo che dalla (175) dell'ottica scalare abbiamo

$$(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)(\vec{x}(s_2)) = (\vec{A} \cdot \vec{A}^*)(\vec{x}(s_1)) e^{-\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \mathbf{S}(\vec{x}(s))}{n(\vec{x}(s))} ds}$$

Pertanto nei casi piú frequenti in cui $\tilde{\mu} = 1$ (o eventualmente $\tilde{\mu}$ indipendente dal punto) la variazione lungo la traiettoria di $|\vec{A}|^2$ che si ottiene dall'ottica scalare è identica alla (183) che discende dall'equazione (166).

Esaminiamo ora la variazione lungo la traiettoria ortogonale del versore

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\vec{A}(\vec{x})}{(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)^{1/2}}$$

Poichè

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} &= \frac{1}{(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)^{1/2}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial s} - \frac{\vec{A}}{2(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)^{3/2}} \frac{\partial (\vec{A} \cdot \vec{A}^*)}{\partial s} = \\ &= \frac{1}{(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)^{1/2}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial s} - \frac{\vec{v}}{2(\vec{A} \cdot \vec{A}^*)} \frac{\partial (\vec{A} \cdot \vec{A}^*)}{\partial s} \end{aligned}$$

usando la (180) e la (181) abbiamo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = -(\vec{v} \cdot \nabla \ln n) \vec{s}, \quad \vec{s} = \frac{\nabla \mathbf{S}}{n} \quad (184)$$

Nel caso dell'ottica scalare abbiamo invece, per la (175)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = 0$$

In conclusione nell'approssimazione dell'ottica scalare si ottengono per \mathbf{S} e per $|\vec{A}|^2$ (almeno nel caso di $\tilde{\mu}$ indipendente dal punto) le stesse equazioni che si ottengono dall'equazione completa (166), ma non si ottiene la corretta equazione per il versore \vec{v} , che nell'ottica scalare risulta costante.

Notiamo che se nella (184) poniamo $v_i = |v_i| e^{i\varphi_i}$ abbiamo che

$$|v_i| \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = s_i \sum_j (\nabla \ln n)_j |v_j| \sin(\varphi_i - \varphi_j) \quad (185)$$

Pertanto φ_i , che è anche la fase di A_i , risulta costante solo se $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$

Esaminiamo ora le proprietà delle soluzioni dell'equazione

$$(\nabla \mathbf{S})^2 = n^2(\vec{x}, \omega).$$

che vogliamo rappresentare come la famiglia di superfici

$$\mathbf{S}(\vec{x}, \omega) = c$$

che si ottiene al variare di c . Sia Σ_0 la superficie corrispondente al valore c_0 della costante; consideriamo la superficie

$$\mathbf{S}(\vec{x}', \omega) = c + \Delta c.$$

Per Δc sufficientemente piccolo, usando la formula di Taylor $\forall \vec{x}$ appartenente a Σ_0 , abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\vec{x}', \omega) &= \mathbf{S}(\vec{x}, \omega) + (\nabla \mathbf{S})_{\vec{x}} \cdot (\vec{x}' - \vec{x}) = c + \Delta c \\ \text{ossia } (\nabla \mathbf{S})_{\vec{x}} \cdot (\vec{x}' - \vec{x}) &= \Delta c. \end{aligned}$$

Scegliendo per ogni $\vec{x} \in \Sigma_0$, $\vec{x}' - \vec{x}$ nella direzione della normale alla superficie Σ_0 in \vec{x} abbiamo

$$|\nabla \mathbf{S}| \Delta s = \Delta c \quad \text{con } \Delta s = \pm |\vec{x}' - \vec{x}|$$

a seconda del segno di Δc , e quindi

$$\Delta s = \frac{\Delta c}{|\nabla \mathbf{S}|_{\vec{x}}} = \frac{\Delta c}{n(\vec{x}, \omega)}.$$

Pertanto la distanza tra coppie di punti sulle due superfici, appartenenti alla normale alla superficie Σ_0 , è inversamente proporzionale al valore di $n(\vec{x}, \omega)$.

Queste considerazioni mostrano che è possibile costruire una soluzione $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega)$, tale che la superficie $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega) = c_0$ coincida con una arbitraria superficie regolare Σ_0 .

Infatti riportando su ciascuna normale alla superficie Σ_0 , orientata in maniera arbitraria, due segmenti $|\Delta c|/n(\vec{x}, \omega)$ e $-|\Delta c|/n(\vec{x}, \omega)$, otteniamo due superfici Σ' e Σ'' . Operando iterativamente a partire dalle superfici Σ' e Σ'' otteniamo una famiglia di superfici che ha le proprietà della famiglia definita dalle equazioni $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega) = c$ con $|\nabla \mathbf{S}|^2 = n^2(\vec{x}, \omega)$, e quindi per ogni superficie regolare Σ_0 esiste una soluzione dell'equazione $|\nabla \mathbf{S}|^2 = n^2(\vec{x}, \omega)$ tale che la superficie $\mathbf{S}(\vec{x}, \omega) = c_0$ coincide con la superficie Σ_0 (ricordiamo che $n(\vec{x}, \omega) \geq 1$).

Si definisce integrale completo di una equazione differenziale a derivate parziali del 1° ordine in N variabili una funzione $F(x_1 \dots x_N, \alpha_1 \dots \alpha_N)$ delle x e di N costanti α_i tale che

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \alpha_j} \right| \neq 0$$

per valori delle α_i in una regione dello spazio delle α_i , e che per ogni n-pla di valori delle α soddisfa l'equazione differenziale. Nel caso dell'equazione dell'iconale la funzione \mathbf{S} non compare nell'equazione e quindi se \mathbf{S} è soluzione anche $\mathbf{S} + c$ è soluzione, ossia una delle costanti è additiva.

Pertanto l'integrale completo dipende in maniera essenziale da due costanti, oltre che dal parametro ω , con la condizione che la matrice

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x_i \partial \alpha_j} \right| \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) \text{ abbia caratteristica 2.} \quad (186)$$

Sia quindi $\mathbf{S}(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, k_0)$ un integrale completo ($k_0 = \omega/c$). Scelto un punto \vec{x}_0 , nella regione a cui siamo interessati, esiste una superficie della famiglia $\mathbf{S} = \text{cost.}$ per assegnati valori di α_1, α_2, k_0 , che passa per il punto \vec{x}_0 e cioè la superficie

$$\mathbf{S}(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, k_0) = \mathbf{S}(\vec{x}_0, \alpha_1, \alpha_2, k_0) \quad (187)$$

Osserviamo che

$$p_i = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i}(\vec{x}_0, \alpha_1, \alpha_2, k_0)}{|\nabla \mathbf{S}|_{\vec{x}_0}} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i}(\vec{x}_0, \alpha_1, \alpha_2, k_0)}{n(\vec{x}_0, k_0)}$$

sono i coseni direttori della normale alla superficie (187) nel punto \vec{x}_0 (il segno \pm dipende dall'orientazione della normale).

Per la (186) è possibile, per ogni scelta di p_1, p_2, p_3 determinare α_1 ed α_2 in funzione di due di essi, per esempio p_1 e p_2 . Se il valore di p_3 , che è determinato a meno del segno da p_1 e p_2 , non è quello prescelto, basta considerare invece dell'integrale $\mathbf{S}(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2, k_0)$ la funzione $\mathbf{S}(x_1, x_2, -x_3, \alpha_1, \alpha_2, k_0)$ che è ovviamente anche integrale completo dell'equazione dell'iconale.

Possiamo pertanto esprimere α_1 ed α_2 in funzione degli angoli θ e φ della normale orientata alla superficie (187) nel punto \vec{x}_0 e quindi scriviamo l'integrale completo nella forma

$$\mathbf{S}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0)$$

caratterizzato dalla proprietà che la superficie (187) ha nel punto \vec{x}_0 la normale orientata con angoli θ, φ in un sistema di coordinate sferiche.

Poichè l'equazione (166) è lineare una somma di soluzioni della forma

$$\tilde{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{A}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0) e^{ik_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0)}$$

è ancora soluzione. Consideriamo la soluzione

$$\tilde{E}(\vec{x}, \omega) = \int \vec{A}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0) e^{ik_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0)} d\Omega \quad (188)$$

dove l'integrale sugli angoli è su un piccolo cono nell'intorno della direzione fissata dagli angoli θ_0, φ_0 . Cioè la soluzione (188) è una sovrapposizione di soluzioni ciascuna delle quali è caratterizzata dalla proprietà che la superficie $\mathbf{S}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0) = c$ passante per il punto \vec{x}_0 ha la normale con angoli θ, φ in un piccolo cono nell'intorno della direzione con angoli θ_0, φ_0 .

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, -\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \text{c.c.}\end{aligned}$$

poichè, per la realtà di $\vec{E}(\vec{x}, t)$, si ha che $\tilde{\vec{E}}(\vec{x}, -\omega) = \tilde{\vec{E}}^*(\vec{x}, \omega)$. Pertanto abbiamo

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \int \vec{A}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0) e^{ik_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \theta, \varphi, k_0)} d\Omega + \text{c.c.}$$

e supponiamo che l'integrale su ω sia esteso ad un intervallo $\Delta\omega$ nell'intorno di ω_0 con $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Definendo un vettore \vec{k}_0 di modulo k_0 e direzione con angoli θ, φ abbiamo che

$$d\omega d\Omega = \frac{c}{k_0^2} d^3 k_0 \text{ e ponendo } \vec{A}' = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \frac{\vec{A}}{k_0^2}, \text{ pertanto}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int \vec{A}'(\vec{x}, \vec{k}_0) e^{i(k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) - \omega t)} d^3 k_0 + \text{c.c.} \quad (189)$$

Indichiamo con κ un vettore di modulo ω_0/c e direzione definita dagli angoli θ_0, φ_0 . L'integrale (189) è quindi esteso ai \vec{k}_0 che hanno direzioni in un piccolo cono intorno alla direzione del vettore κ , e modulo appartenente ad un intervallo $\Delta k_0 \ll \kappa$.

L'espressione (189) ha una forma analoga al pacchetto d'onda che abbiamo utilizzato per descrivere, nei mezzi omogenei, un campo localizzato in una regione dello spazio e che si propagava in una definita direzione. La localizzazione della regione era in quel caso definita con il metodo della fase stazionaria, che useremo anche per la (189).²⁵ Tuttavia per l'equazione (166), a differenza dell'ottica scalare, le fasi φ_i di A_i variano lungo ogni traiettoria ortogonale alla famiglia di superfici $\mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) = c$, secondo l'espressione (185), il che dà luogo a notevoli difficoltà nell'applicazione del metodo della fase stazionaria. Per semplicità ci limiteremo a considerare il caso $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ che, come abbiamo visto, comporta $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ e quindi φ indipendente da \vec{x} . Notiamo che l'approssimazione dell'iconale, che dà luogo alla (189), è adeguata se l'ampiezza $|\vec{A}'(\vec{x}, \vec{k}_0)|$ è una funzione lentamente variabile di \vec{x} per

²⁵Si osservi che κ , cioè ω_0/c , è il parametro "grande" che consente di arrestare al prim'ordine lo sviluppo asintotico, con considerazioni analoghe a quelle svolte prima per individuare λ_0 . (N.d.R.)

\vec{k}_0 appartenente all'intorno di κ su cui si integra. Si noti che ciò non è certamente vero nella regione al limite della zona d'ombra creata da un ostacolo dove, come è noto, per il fenomeno della diffrazione l'ampiezza del campo varia rapidamente su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda.

Indichiamo con

$$W(\vec{x}, t) = k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) - \omega t$$

la fase, dipendente \vec{x} e t di ciascuna componente monocromatica della (189).

Vogliamo vedere come variano nel tempo le superfici di fase costante $W(\vec{x}, t) = C$.

Al tempo t la superficie

$$W(\vec{x}, t) = k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) - \omega t = C$$

coincide con la superficie

$$k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) = C + \omega t.$$

Al tempo $t + dt$ la superficie

$$W(\vec{x}', t + dt) = k_0 \mathbf{S}(\vec{x}', \vec{k}_0) - \omega(t + dt) = C$$

coincide con la superficie

$$k_0 \mathbf{S}(\vec{x}', \vec{k}_0) = C + \omega(t + dt).$$

Cioè al variare del tempo le superfici $W(\vec{x}, t) = C$ vanno a coincidere con le superfici della famiglia

$$\mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) = \text{costante}.$$

Usando la formula di Taylor per dt sufficientemente piccolo abbiamo

$$k_0 (\nabla \mathbf{S})_{\vec{x}} \cdot (\vec{x}' - \vec{x}) = \omega dt;$$

Scegliendo $\vec{x}' - \vec{x}$ nella direzione della normale alla superficie $k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0) = C + \omega t$ abbiamo

$$k_0 |\nabla \mathbf{S}| ds = \omega dt$$

e quindi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{k_0 |\nabla \mathbf{S}|} = \frac{c}{n(\vec{x}, \omega)}$$

è la velocità di fase (s ascissa curvilinea lungo la traiettoria ortogonale)

Applicando alla (189) il metodo della fase stazionaria abbiamo che, per ogni fissato t , il punto di fase stazionaria soddisfa alle equazioni

$$\left[\frac{\partial(k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \vec{k}_0))}{\partial k_{0i}} - \frac{\partial \omega}{\partial k_{0i}} t + \frac{\partial \varphi}{\partial k_{0i}} \right]_{\vec{k}_0 = \vec{k}} = 0.$$

Per determinare la soluzione di tali equazioni conviene passare dalle variabili k_{0x}, k_{0y}, k_{0z} alle variabili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = k_0$.

Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial k_{0i}}(k_0 \mathbf{S} - \omega t + \varphi) = \sum_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(k_0 \mathbf{S} - \omega t + \varphi) \frac{\partial \alpha_j}{\partial k_{0i}}$$

e che avendo la (186) caratteristica 2, è diverso da zero lo Jacobiano

$$\left| \frac{\partial \alpha_j}{\partial k_{0i}} \right| = \left| \frac{\partial \alpha_j}{\partial(k_0, \theta, \varphi)} \right| \left| \frac{\partial(k_0, \theta, \varphi)}{\partial(k_{0x}, k_{0y}, k_{0z})} \right|.$$

Pertanto

$$\frac{\partial}{\partial k_{0i}}(k_0 \mathbf{S} - \omega t + \varphi) = 0 \text{ se e solo se } \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(k_0 \mathbf{S} - \omega t + \varphi) = 0. \quad (190)$$

Poichè ω non dipende da α_1 ed α_2 le (190) diventano

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, \kappa)) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \quad (191)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, \kappa)) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \quad (192)$$

$$\frac{\partial}{\partial k_0}(k_0 \mathbf{S}(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, k_0)) \Big|_{k_0=\kappa} + \frac{\partial \omega}{\partial k_0} \Big|_{k_0=\kappa} = -\frac{\partial \varphi}{\partial k_0} \Big|_{k_0=\kappa}. \quad (193)$$

Per la condizione (186) le due superfici (??) e (??) si intersecano lungo una curva regolare che è il luogo dei punti di fase stazionaria, ossia la traiettoria descritta dal punto di fase stazionaria.²⁶ L'equazione (191) ne definisce la legge oraria, cioè esprime l'ascissa curvilinea del punto di fase stazionaria lungo la traiettoria in funzione di t .

²⁶Ricordiamo che la soluzione (188) è specificata assegnando un particolare punto \vec{x}_0 . Affinchè questa traiettoria passi per tale punto occorre scegliere opportunamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2).$$

Per determinare la traiettoria osserviamo che dall'equazione dell'iconale

$$(\nabla k_0 \mathbf{S})^2 = k_0^2 n^2(\vec{x}, k_0) \quad (194)$$

abbiamo, derivando rispetto ad α_i , $i = 1, 2$:

$$2 \sum_j \frac{\partial^2 k_0 \mathbf{S}}{\partial \alpha_i \partial x_j} \frac{\partial k_0 \mathbf{S}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{ossia} \quad \nabla \left(\frac{\partial k_0 \mathbf{S}}{\partial \alpha_i} \right) \cdot \nabla(k_0 \mathbf{S}) = 0.$$

Pertanto la normale alla superficie (??) in ogni punto è perpendicolare alla normale alla superficie $\mathbf{S}(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, \kappa) = \text{cost.}$ passante per quel punto; lo stesso avviene per la superficie (??). Ne segue che in ogni punto della curva regolare intersezione delle superfici (??) e (??), la normale alla superficie $\mathbf{S} = \text{cost.}$ deve appartenere ai due piani tangenti delle superfici suddette, e quindi alla loro intersezione. La tangente in ogni punto della curva intersezione, appartiene all'intersezione dei due piani tangenti nel punto considerato, e quindi deve coincidere con la normale alla superficie $\mathbf{S} = \text{cost.}$ passante per quel punto. In altri termini la curva intersezione, luogo dei punti di fase stazionaria, è una traiettoria ortogonale alle superfici $\mathbf{S}(\vec{x}, \vec{\kappa}) = \text{cost.}$ dalla (191) otteniamo, per $\vec{x} = \vec{x}_0$, il valore del tempo t_0 a cui corrisponde questo punto di fase stazionaria.

Per determinare il modulo della velocità con cui il punto di fase stazionaria percorre la traiettoria consideriamo il differenziale rispetto a \vec{x} e t della (191):

$$\sum_i \left[\frac{\partial^2 k_0 \mathbf{S}}{\partial x_i \partial k_0} \right]_{k_0=\kappa} dx_i - \left[\frac{\partial \omega}{\partial k_0} \right]_{k_0=\kappa} dt = 0$$

e quindi, ricordando che ω è funzione solo k_0 :

$$\sum_i \left[\frac{\partial^2 k_0 \mathbf{S}}{\partial x_i \partial k_0} \right]_{k_0=\kappa} \frac{dx_i}{dt} = \left[\frac{d\omega}{dk_0} \right]_{k_0=\kappa} \quad (195)$$

$$\text{Poichè } \frac{d\vec{x}}{dt} = u \frac{\nabla \mathbf{S}}{|\nabla \mathbf{S}|} = u \frac{\nabla \mathbf{S}}{n}$$

dove $u = \frac{ds}{dt}$ è la derivata rispetto al tempo dell'ascissa curvilinea lungo la traiettoria, abbiamo, sostituendo nella (195)

$$\sum_i \left[\frac{\partial^2 k_0 \mathbf{S}}{\partial x_i \partial k_0} \frac{\partial k_0 \mathbf{S}}{\partial x_i} \frac{u}{nk_0} \right]_{k_0=\kappa} = \left[\frac{d\omega}{dk_0} \right]_{k_0=\kappa}. \quad (196)$$

Derivando l'equazione dell'iconale (194) rispetto a k_0 otteniamo

$$2 \sum_i \left[\frac{\partial^2 k_0 \mathbf{S}}{\partial x_i \partial k_0} \frac{\partial k_0 \mathbf{S}}{\partial x_i} \right]_{k_0=\kappa} = \left[\frac{\partial n^2 k_0^2}{\partial k_0} \right]_{k_0=\kappa} = \left[2k_0 \frac{\partial k}{\partial k_0} \right]_{k_0=\kappa}, \quad (197)$$

dove si è posto $k = nk_0$.

Sostituendo quest'ultima equazione nella precedente abbiamo

$$\left[k \frac{\partial k}{\partial k_0} \frac{u}{k} \right]_{k_0=\kappa} = \left[\frac{d\omega}{dk_0} \right]_{k_0=\kappa}.$$

Ricavando k_0 in funzione di k dall'equazione $k = k_0 n(\vec{x}, k_0)$ abbiamo che, per \vec{x} fissato,

$$\frac{1}{\frac{\partial k}{\partial k_0}} = \frac{1}{\frac{dk}{dk_0}} = \frac{dk_0}{dk}$$

e quindi

$$u = \left[\frac{d\omega}{dk_0} \frac{dk_0}{dk} \right]_{k_0=\kappa} = \left[\frac{d\omega}{dk} \right]_{k=n\kappa}$$

cioè il modulo della velocità del punto di fase stazionaria è uguale al modulo della velocità di gruppo; la velocità di gruppo è:

$$\vec{v}_g = \left[\frac{d\omega}{dk} \right]_{k=n\kappa} \frac{\nabla \mathbf{S}}{n(\vec{x}, \kappa)}.$$

9 Onde sonore

Lo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche in presenza di una superficie di separazione tra due mezzi materiali presenta delle complicazioni dovute al carattere vettoriale delle equazioni. Per illustrare il fenomeno preferiamo trattare il caso delle onde sonore, per le quali vale una equazione scalare.

Un fluido è un sistema continuo. Nella descrizione euleriana $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $P(\vec{x}, t)$, $\rho(\vec{x}, t)$ sono rispettivamente velocità, pressione e densità nel punto di coordinate \vec{x} al tempo t . Ricordiamo che le coordinate euleriane di un punto materiale sono le coordinate della posizione occupata all'istante t da un punto etichettato con le coordinate lagrangiane \vec{X} , coordinate della posizione del punto materiale all'istante $t = 0$. Pertanto $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ descrivono il moto del punto materiale etichettato con la posizione iniziale \vec{X} al tempo $t = 0$.

Sia $C(t)$ la regione occupata al tempo t da una parte del fluido e $C(0)$ la regione che questa parte del fluido occupava al tempo $t = 0$.

Sia $\vec{Q}(t)$ la quantità di moto della parte di fluido in $C(t)$

$$\vec{Q}(t) = \int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) d^3x.$$

La prima equazione cardinale della dinamica per un fluido perfetto, cioè privo di viscosità (con viscosità trascurabile), è

$$\frac{d}{dt} \vec{Q}(t) = \int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{f}(\vec{x}, t) d^3x - \int_{S_{C(t)}} P(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}) dS$$

dove $\vec{n}(\vec{x})$ è il versore della normale orientata verso l'esterno di $C(t)$ e $\vec{f}(\vec{x}, t)$ è la forza di "massa" cioè la forza per unità di massa.

Ricordiamo che, per il teorema del trasporto (Romano Vol.II pag.201)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{C(t)} \psi(\vec{x}, t) d^3x &= \frac{d}{dt} \int_{C(0)} \psi(\vec{x}(\vec{X}, t), t) \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| d^3X = \\ &= \int_{C(0)} \frac{d}{dt} \left(\psi \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \right) d^3X = \\ &= \int_{C(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \text{div}(\psi(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) \right) d^3x \end{aligned}$$

e per l'equazione di continuità della massa

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3x =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{C(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \rho + \psi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \psi + \psi \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) d^3x = \\
&= \int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{v} \cdot \nabla \psi(\vec{x}, t) \right) d^3x.
\end{aligned}$$

Poichè

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) d^3x &= \int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{x}, t) \right) d^3x \\
\text{e} \quad \int_{S_{C(t)}} P(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}) dS &= \int_{C(t)} \nabla P(\vec{x}, t) d^3x
\end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_{C(t)} \rho(\vec{x}, t) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) d^3x = \\
&\int_{C(t)} \left(\rho(\vec{x}, t) \vec{f}(\vec{x}, t) - \nabla P(\vec{x}, t) \right) d^3x
\end{aligned}$$

ed essendo le funzioni integrande continue

$$\rho(\vec{x}, t) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{v}(\vec{x}, t) \right) = \vec{f}(\vec{x}, t) - \nabla P(\vec{x}, t) \quad (198)$$

(Equazione di Eulero).

Per la *conservazione della massa* abbiamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \operatorname{div}(\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = 0. \quad (199)$$

È perfetto un fluido in cui sia la viscosità che la conducibilità termica sono trascurabili. Il moto del fluido perfetto è allora adiabatico, cioè l'entropia della parte di fluido che occupa una regione dello spazio rimane costante quando questa parte di fluido si sposta nello spazio. Indicando con $S(\vec{x}, t)$ l'entropia per unità di massa abbiamo

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{v} \cdot \nabla S(\vec{x}) = 0$$

Se ad un certo istante $S(\vec{x}, t)$ è costante nel fluido (e quindi anche la temperatura) così come costante è la sua composizione chimica ne segue che $\frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}, t) = 0$ e quindi

$$S = \text{costante} \quad (200)$$

In assenza di forze elettromagnetiche l'unica forza di massa è la forza di gravità, e supporremo che per i fenomeni che andremo a studiare si possa trascurare tale forza ²⁷

²⁷La forza di gravità dà luogo ai fenomeni delle onde di gravità in conseguenza della deformazione della superficie libera di un liquido in un bacino.

Notiamo che dalla (198) all'equilibrio meccanico, $\vec{v}(\vec{x}, t) = 0$ in assenza di forze di massa si ha $P(\vec{x}, t) = P_0$ con P_0 costante. Tuttavia nulla si può dire sulla $\rho(\vec{x})$, perchè, avendo supposto il fluido privo di conducibilità termica, si può avere equilibrio meccanico senza equilibrio termico, e quindi $\rho(\vec{x})$ non può essere determinata da P_0 ²⁸.

Per i fluidi reali, dotati di conducibilità termica e viscosità, si scrive l'equazione di conservazione dell'energia, e da essa si ottiene l'equilibrio termico. Supponiamo che ci sia anche equilibrio termico, allora dall'equazione di stato si ha $\rho(\vec{x}) = \rho_0 = \text{costante}$. Si designa col nome di onde sonore un movimento oscillatorio di piccola ampiezza in un fluido (noi studieremo le onde sonore in un fluido perfetto ma si può anche tenere conto della viscosità e della conducibilità termica che danno luogo ad una dissipazione dell'energia meccanica). Più precisamente le soluzioni che ci interessano soddisfano le condizioni

$$P(\vec{x}, t) = P_0 + p(\vec{x}, t) \text{ con } \left| \frac{p(\vec{x}, t)}{P_0} \right| \ll 1$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{x}, t) \text{ con } \left| \frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} \right| \ll 1, \quad |\vec{v}(\vec{x}, t)| \ll a$$

dove a è una grandezza caratteristica del fenomeno, cioè la velocità del suono nel fluido, velocità che definiremo in seguito. Questo ci induce ad auspicare che per tali soluzioni si abbia

$$\begin{aligned} \left| \frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad , \quad |\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla v_i| \ll \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ |\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \rho'(\vec{x}, t)| \ll \frac{\partial \rho'}{\partial t} \end{aligned} \tag{201}$$

e quindi nelle equazioni (198),(199) e (200) sia lecito trascurare i termini a sinistra rispetto a quelli a destra nelle disequaglianze (201). La ragione di tale auspicio è che trascurando tali termini nelle equazioni (198),(199) e

²⁸Se si tiene conto della gravità si ha $\nabla P - \vec{g} = 0$. Scegliendo l'asse z positivo verso l'alto si ha

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

P può variare solo con z e quindi anche

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial z}$$

può solo variare con z . All'equilibrio meccanico pressione, densità e quindi temperatura devono essere costanti per $z = \text{costante}$. Pertanto se la temperatura per $z = \text{costante}$ non è costante non si può avere equilibrio meccanico. Tuttavia se non si assegna $\rho(z)$, ossia $T(z)$ non è possibile determinare $P(z)$ all'equilibrio meccanico.

(200) esse diventano lineari. Per la consistenza della approssimazione dovremo poi verificare che assegnata $\rho'(\vec{x}, 0)$ (oppure $p(\vec{x}, 0)$ che è legata alla ρ' dall'equazione (200)) e $\vec{v}(\vec{x}, 0)$ con le condizioni

$$\frac{\rho'(\vec{x}, 0)}{\rho_0} \ll 1 \quad (\text{oppure } \frac{|p(\vec{x}, 0)|}{P_0} \ll 1) \quad |\vec{v}(\vec{x}, 0)| \ll a \quad (202)$$

(o altre equivalenti sui dati iniziali) le soluzioni delle equazioni linearizzate soddisfano le disequaglianze (201). Definiamo

$s(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \rho_0}{\rho_0}$ e quindi nelle ipotesi (201) $|s(\vec{x}, t)| \ll 1$. L'equazione (198) (con $\vec{f}(\vec{x}, t) = 0$) trascurando $s(\vec{x}, t)$ rispetto a 1 e $\vec{v} \cdot \nabla v_i$ rispetto a $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ diventa

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\nabla p(\vec{x}, t) \quad (203)$$

(ricordiamo che P_0 è indipendente da \vec{x} e quindi $\nabla P = \nabla p$).

Poichè la (199) si scrive

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0(1 + s)\text{div}\vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho' = 0$$

trascurando s rispetto a 1, $\vec{v} \cdot \nabla \rho'$ rispetto a $\frac{\partial \rho'}{\partial t}$, ed essendo $\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial s}{\partial t}$ otteniamo

$$\frac{\partial s}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\text{div}\vec{v}(\vec{x}, t) \quad (204)$$

Poichè per la (200) $S = \text{cost.}$ ed essendo $\rho = \rho_0 + \rho'$ con $\rho'/\rho_0 \ll 1$, abbiamo

$$P = P(\rho, S) \simeq P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost.}, \rho=\rho_0} \rho' \quad , \quad \forall \vec{x}, t$$

e quindi

$$p(\vec{x}, t) = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost.}, \rho=\rho_0} s(\vec{x}, t) \quad (205)$$

Per un gas

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \text{ossia} \quad P = P_0(1 + s)^\gamma \simeq p_0(1 + \gamma s) \quad \text{cioè}$$

$$p(\vec{x}, t) = P_0 \gamma s(\vec{x}, t) \quad (206)$$

Abbiamo quindi un sistema di 5 equazioni lineari nelle 5 funzioni incognite \vec{v}, p, ρ .

Eliminando s abbiamo il sistema (I)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p(\vec{x}, t) \quad (207)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost}, \rho=\rho_0} \text{div} \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (208)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, t) = -P_0 \gamma \text{div} \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{per un gas} \quad (209)$$

con le condizioni iniziali

$$p(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \quad , \quad \vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{g}(\vec{x})$$

e porremo $\text{rot} \vec{g}(\vec{x}) = 0$. Infatti applicando alla (??) l'operazione rot abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{v} = 0 \quad \text{cioè} \quad \text{rot} \vec{v}(\vec{x}, t) \text{ è indipendente dal tempo.}$$

Poichè le onde sonore sono oscillazioni di piccola ampiezza il valore medio di $\vec{v}(\vec{x}, t)$ nel tempo è zero e dovendo essere $\text{rot} \vec{v}(\vec{x}, t)$ indipendente dal tempo ne segue che deve essere $\text{rot} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$. Se allora $\text{rot} \vec{v}(\vec{x}, 0) = 0$ in ogni istante si ha $\text{rot} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$. D'altra parte se si desidera studiare moti in cui $\text{rot} \vec{v}(\vec{x}, t) \neq 0$ è essenziale tenere conto della viscosità che dà luogo sia alla formazione di vortici che alla loro attenuazione. Applicando l'operazione div alla (??), $\frac{\partial}{\partial t}$ all'equazione (??) ed eliminando $\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{v}$ tra le due equazioni si ottiene che ogni soluzione del problema (I) è anche soluzione del problema (II)

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\vec{x}, t) &= \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost}, \rho=\rho_0}^{-1} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{x}, t) \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

con i dati iniziali

$$p(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \quad , \quad \vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{g}(\vec{x}) \quad , \quad \text{rot} \vec{g}(\vec{x}) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, 0) = -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost}, \rho=\rho_0} \text{div} \vec{g}(\vec{x}).$$

(per un gas $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost}, \rho=\rho_0} = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0}$) Si può facilmente verificare che ogni soluzione del problema (II) è soluzione del problema (I). La grandezza $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S=\text{cost}, \rho=\rho_0}$ ha le dimensioni del quadrato di una velocità e pertanto chiameremo

$$a = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{S=\text{cost}, \rho=\rho_0}}$$

velocità di propagazione del suono nel mezzo. In effetti a è il modulo della velocità di gruppo, come sappiamo dall'applicazione della fase stazionaria alla soluzione dell'equazione delle onde nella rappresentazione con la trasformata di Fourier.

Per il gas $a = \sqrt{P_0\gamma/\rho_0}$ ed essendo dall'equazione di stato

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{\mu},$$

con μ peso molecolare, abbiamo per un gas

$$a = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{\mu}}.$$

Poichè $\gamma = C_V/C_P$ dipende poco dalla temperatura a risulta proporzionale a $T_0^{\frac{1}{2}}$ e per fissato T_0 è indipendente dalla pressione di equilibrio. Per l'equazione di stato del gas

$$\frac{P(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x}, t)} = \frac{R}{\mu} T(\vec{x}, t)$$

ed essendo

$$P(\vec{x}, t) = P_0(1 + \gamma s(\vec{x}, t)) \quad , \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0(1 + s(\vec{x}, t))$$

ponendo $T(\vec{x}, t) = T_0 + T'(\vec{x}, t)$ abbiamo

$$\frac{P_0}{\rho_0} \frac{(1 + \gamma s)}{1 + s} = \frac{R}{\mu} (T_0 + T') \quad \text{cioè} \quad T'(\vec{x}, t) = \frac{\mu}{R} \frac{P_0}{\rho_0} (\gamma - 1) s(\vec{x}, t)$$

e quindi anche $T'(\vec{x}, t)$ soddisfa l'equazione delle onde con la stessa velocità a .

Ricordiamo che il problema (II), che descrive la propagazione delle onde sonore, è stato ottenuto dall'equazioni dell'idrodinamica per un fluido perfetto, trascurando le forze di massa, assegnando le condizioni iniziali (201) e nell'ipotesi che tali condizioni assicurassero l'esistenza di una soluzione con le proprietà (202), che ci hanno permesso di linearizzare le equazioni dell'idrodinamica. Dobbiamo ora verificare che quando i dati iniziali soddisfano le disequaglianze (201), la soluzione del problema (II) soddisfa le disequaglianze (202).

Non dimostreremo, per brevità, la disequaglianza

$|p(\vec{x}, t)|/P_0 \ll 1$, che si può ottenere usando la formula di Kirchhof, che ovviamente comporta, per la (205),

$$|\rho'(\vec{x}, t)|/\rho_0 \ll 1.$$

Per ottenere agevolmente le altre disequaglianze osserviamo che, essendo $\text{rot } \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall t$, possiamo scrivere

$$\vec{v} = \nabla\Phi(\vec{x}, t)$$

e $\Phi(\vec{x}, t)$ è definito a meno della somma di una funzione $\psi(t)$. Sostituendo nella (??) otteniamo

$$\nabla \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{p}{\rho_0}(\vec{x}, t) \right) = 0$$

se scegliamo $\psi(t)$ in modo che

$$p(\vec{x}, t) = -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

sostituendo nella (??) abbiamo

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

cioè il potenziale della velocità soddisfa un'equazione delle onde identica all'equazione per $p(\vec{x}, t)$.

Rappresentiamo la soluzione $\Phi(\vec{x}, t)$ nella forma

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \int \left(A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = \\ &= \int A(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} d^3k + \int B(-\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} d^3k \quad \text{con } \omega = ak. \end{aligned}$$

Poichè Φ è reale deve essere $B(-\vec{k}) = A^*(\vec{k})$ e quindi ponendo $A(\vec{k}) = |A(\vec{k})|e^{i\varphi(\vec{k})}$ abbiamo

$$\Phi(\vec{x}, t) = 2 \int |A(\vec{k})| \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k})) d^3k.$$

Supponiamo che $|A(\vec{k})|$ sia diverso da zero in un intorno di \vec{k}_0 con $\Delta k_i/k_0 \ll 1$ e con un massimo in \vec{k}_0 .

Avremo pertanto

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}, t) &= \nabla\Phi(\vec{x}, t) = -2 \int |A(\vec{k})| k \vec{n}(\vec{k}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k})) d^3k \\ &\simeq -2\vec{n}(\vec{k}_0) \int |A(\vec{k})| k \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k})) d^3k \quad ; \quad \vec{n}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{k} \\ p(\vec{x}, t) &= -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\rho_0 2a \int |A(\vec{k})| k \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k})) d^3k \end{aligned}$$

e quindi

$$|\vec{v}(\vec{x}, t)| \simeq \frac{|p(\vec{x}, t)|}{\rho_0 a}$$

e per la (205)

$$|\vec{v}(\vec{x}, t)| \simeq |s(\vec{x}, t)a| \ll a$$

Allo stesso modo

$$\nabla v_i(\vec{x}, t) = -2\vec{n}(\vec{k}_0)n_i(\vec{k}_0) \int |A(\vec{k})|k^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k}))d^3k$$

$$|\vec{v} \cdot \nabla v_i| \simeq 2|\vec{v}||n_i(\vec{k}_0)| \left| \int |A(\vec{k})|k^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k}))d^3k \right|$$

$$\left| \frac{\partial v_i}{\partial t} \right| \simeq 2|n_i(\vec{k}_0)|a \left| \int |A(\vec{k})|k^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k}))d^3k \right|$$

$$\text{e quindi } |\vec{v} \cdot \nabla v_i| = \frac{|\vec{v}(\vec{x}, t)|}{a} \left| \frac{\partial v_i}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|.$$

$$|\vec{v} \cdot \nabla p| = 2|\vec{v}|\rho_0 a \left| \int |A(\vec{k})|k^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k}))d^3k \right|$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| = 2\rho_0 a^2 \left| \int |A(\vec{k})|k^2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi(\vec{k}))d^3k \right|$$

e quindi

$$|\vec{v} \cdot \nabla p| \simeq \frac{|\vec{v}|}{a} \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right|$$

ed essendo $\rho'(\vec{x}, t)$ proporzionale a $p(\vec{x}, t)$ la stessa disuguaglianza vale per la funzione $\rho'(\vec{x}, t)$.

Vogliamo ora studiare la propagazione delle onde sonore in un mezzo costituito da due fluidi non miscibili. Abbiamo quindi due regioni Ω_1 ed Ω_2 ²⁹ ciascuna occupata da un fluido omogeneo con densità di equilibrio ρ_1 e ρ_2 rispettivamente ed in ciascuno dei quali la velocità ha valori a_1 ed a_2 rispettivamente. Pertanto il problema (II) si formula nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{x}, t) &= a_1^2 \nabla^2 p(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \Omega_1 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{x}, t) &= a_2^2 \nabla^2 p(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \Omega_2 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\rho_1} \nabla p(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \Omega_1 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\rho_2} \nabla p(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \Omega_2 \end{aligned}$$

²⁹ Ω_1 ed Ω_2 regioni aperte a cui la frontiera S non appartiene

$$p(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_1 \text{ oppure } \Omega_2$$

$$\vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{g}(\vec{x}) \quad , \quad \text{rot } \vec{g}(\vec{x}) = 0 \quad \vec{x} \in \Omega_1 \text{ oppure } \Omega_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, 0) = -\rho_1 a_1^2 \text{div} \vec{g}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, 0) = -\rho_2 a_2^2 \text{div} \vec{g}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_2$$

a cui bisogna aggiungere le condizioni sulla superficie di separazione S .

Per ogni punto della superficie S la pressione dei due fluidi deve essere la stessa, per il principio di azione e reazione, e devono essere eguali le componenti normali ad S della velocità dei due fluidi, perchè ciascuna componente normale coincide con la velocità di spostamento della superficie di separazione nella direzione della normale ³⁰. Pertanto abbiamo

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in \Omega_1}} p(\vec{x}, t) = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in \Omega_2}} p(\vec{x}, t) \quad \forall \vec{x}_0 \in S$$

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in \Omega_1}} v_n(\vec{x}, t) = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in \Omega_2}} v_n(\vec{x}, t) \quad \forall \vec{x}_0 \in S$$

che più sinteticamente indicheremo

$$(p(\vec{x}, t))_1 = (p(\vec{x}, t))_2 \quad \vec{x} \in S, \forall t$$

$$(v_n(\vec{x}, t))_1 = (v_n(\vec{x}, t))_2 \quad \vec{x} \in S, \forall t.$$

Da quest'ultima segue per l'uniforme continuità di $\vec{v}(\vec{x}, t)$ e delle sue derivate parziali in Ω_1 ed Ω_2

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_n(\vec{x}, t))_{1,2} = \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}(\vec{x}, t) \right)_{1,2}.$$

Poichè $\forall \vec{x} \in \Omega_1, \Omega_2$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) = \frac{\nabla p(\vec{x}, t)}{\rho_{1,2}}$ si ha

$$\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial n} \right)_1 = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial n} \right)_2 \quad \forall \vec{x} \in S.$$

Inoltre, per la continuità di $p(\vec{x}, t)$ in $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ e l'uniforme continuità di $p(\vec{x}, t)$ e delle sue derivate parziali in Ω_1 ed Ω_3 deve essere

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, t) \right)_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial t}(\vec{x}, t) \right)_2 \quad \vec{x} \in S \text{ quindi}$$

³⁰Poichè S è una superficie di separazione si sposta solo nella direzione della normale in ogni suo punto

$$\rho_1 a_1^2 (\operatorname{div} \vec{g}(\vec{x}))_1 = \rho_2 a_2^2 (\operatorname{div} \vec{g}(\vec{x}))_2 \quad \vec{x} \in S$$

Ricordiamo infine che per i moti che vengono designati come onde sonore abbiamo supposto che esista un potenziale delle velocità, e per questo oltre la condizione $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$ in Ω_1 ed Ω_2 occorre che le componenti tangenziali della velocità dei due fluidi siano uguali in ogni punto della superficie di separazione, e quindi $\vec{v}(\vec{x}, t)$ continua in $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$.

Nel caso di un mezzo omogeneo abbiamo mostrato che lo studio della propagazione delle onde risulta più agevole se si usa la trasformata e antitrasformata di Fourier della soluzione. Per la trasformata di Fourier si usano le funzioni

$$\varphi_F(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

che sono soluzioni dell'equazione

$$-\nabla^2 \varphi_F(\vec{k}, \vec{x}) = k^2 \varphi_F(\vec{k}, \vec{x})$$

ed è appunto questa proprietà che rende utile la trasformata di Fourier dell'equazione delle onde, perchè infatti da essa segue che, detta $u(\vec{x}, t)$ la soluzione dell'equazione delle onde, si ha che

$$(-\widetilde{\nabla^2 u})_F(\vec{k}, t) = k^2 \tilde{u}_F(\vec{k}, t)$$

e quindi l'equazione a derivate parziali in trasformata diventa una equazione differenziale ordinaria

Allo scopo di esaminare se è possibile trovare, nel caso dei due mezzi, un procedimento analogo per trasformare l'equazione delle onde in derivate parziali in equazione differenziale ordinaria nella variabile tempo, conviene riscrivere in forma più compatta le equazioni nei due mezzi e le condizioni su S .

Definiamo un operatore $L_{\vec{x}}$, che indichiamo con $L_{\vec{x}}$ perchè opera solo sulle coordinate spaziali, nel modo seguente

$$L_{\vec{x}} = \begin{cases} -a_1 \nabla^2 & , \vec{x} \in \Omega_1 \\ -a_2 \nabla^2 & , \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (210)$$

ed il cui dominio è la classe D delle funzioni di R^3 sufficientemente regolari in $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (per semplicità possiamo scegliere funzioni $C^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$) continue in $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ e tali che $\forall f \in D$ si abbia

$$\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_1 = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_2$$

e che si annullano all'infinito in modo sufficientemente regolare (scegliamole a decrescenza rapida). La classe D è proprio quella a cui appartiene $p(\vec{x}, t)$, $\forall t$.

Pertanto le due equazioni nei due mezzi e le condizioni su S sono sinteticamente espresse dall'equazione

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{x}, t) = - (L_{\vec{x}} p)(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in R^3 \quad (211)$$

Vogliamo ora esaminare se esistono funzioni $\varphi(\alpha, \vec{x})$ (con α insieme di parametri) tali che trasformando l'equazione (211) rispetto a queste funzioni si ottengono gli stessi vantaggi ottenuti nel caso omogeneo con la trasformata di Fourier.

Se esistono tali funzioni devono anzitutto, analogamente al caso di Fourier, soddisfare l'equazione

$$L_{\vec{x}}\varphi(\alpha, \vec{x}) = \omega^2\varphi(\alpha, \vec{x}) \quad (212)$$

(poichè nel mezzo omogeneo $-a^2\nabla^2\varphi_F(\vec{k}, \vec{x}) = \omega^2\varphi_F(\vec{k}, \vec{x})$ con $\omega^2 = a^2k^2$ useremo lo stesso simbolo per il parametro che compare a secondo membro). Tra i parametri α può comparire il parametro ω che è un parametro dell'equazione (212) oppure si possono scegliere un insieme di parametri indipendenti più convenienti che determinano in maniera unica una soluzione della (212), ω^2 essendo espresso in funzione di tali parametri (nel caso della trasformata di Fourier i parametri indipendenti sono k_x, k_y, k_z e risulta $\omega^2 = a^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$). Sopprimiamo per adesso la dipendenza dai parametri che sarà indicata in seguito alla loro scelta più opportuna.

Occorre precisare che ogni $\varphi(\vec{x})$ soddisfa l'equazione (212) solo localmente (per ogni insieme connesso limitato di R^3) perchè $\varphi(\vec{x})$ soddisfa solo le proprietà locali della classe D (dominio di $L_{\vec{x}}$), infatti, come vedremo, la $\varphi(\vec{x})$ non si annulla all'infinito.

Ricordando la definizione dell'operatore $L_{\vec{x}}$ si ha che ogni soluzione (locale) della (212) deve coincidere in Ω_1 con una soluzione dell'equazione

$$-a_1^2\nabla^2 f_1(\vec{x}) = \omega^2 f_1(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_1 \quad (213)$$

ed in Ω_2 deve coincidere con una soluzione dell'equazione

$$-a_2^2\nabla^2 f_2(\vec{x}) = \omega^2 f_2(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_2 \quad (214)$$

(osserviamo che essendo Ω_1 ed Ω_2 insiemi aperti privi di punti comuni non ha senso parlare di soluzioni in $\Omega_1 \cup \Omega_2$). Inoltre $\varphi(\vec{x})$ deve soddisfare su S le due condizioni omogenee ³¹

$$[\varphi(\vec{x})]_1 = [\varphi(\vec{x})]_2, \quad \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial n} \right]_1 = \frac{1}{\rho_2} \left[\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial n} \right]_2, \quad \forall \vec{x} \in S.$$

³¹Ricordiamo che abbiamo denotato con $[\varphi(\vec{x})]_1$ il limite $\lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x} \in S, \vec{x}' \in \Omega_1} \varphi(\vec{x}')$, lo stesso per $[\partial \varphi(\vec{x}')/\partial n]_1$

Per esprimere esplicitamente tali condizioni su S è necessario usare un sistema di coordinate curvilinee ortogonali (ξ, η, ζ) , nelle quali l'equazione della superficie S diventi una delle coordinate uguale a costante. ed inoltre necessario usare una $\varphi(\vec{x})$ che nella regione Ω_1 coincida con una soluzione a variabili separate dell'equazione (213), e cioè della forma

$$f_1(\vec{x}) = \lambda_1(\xi)\mu_1(\eta)\gamma_1(\zeta)$$

o una loro combinazione lineare, e nella regione Ω_2 coincida con una soluzione a variabili separate dell'equazione (214) o con una loro combinazione lineare.

Così, per esempio, se la superficie S è un piano occorre usare coordinate cartesiane, se S è una sfera occorre usare coordinate sferiche.

9.1 Diffusione da una superficie piana

Cominciamo a discutere il caso in cui S è un piano e scegliamo $z = 0$ come equazione di S .

Le soluzioni a variabili separate dell'equazione (213) sono

$$f_1(\vec{k}_1, \vec{x}) = A_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \quad \vec{x} \in \Omega_1, k_1^2 = \frac{\omega^2}{a_1^2}$$

le soluzioni a variabili separate dell'equazione (214) sono

$$f_2(\vec{k}_2, \vec{x}) = A_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \quad \vec{x} \in \Omega_2, k_2^2 = \frac{\omega^2}{a_2^2}.$$

Una funzione che in Ω_1 coincide con una $f_1(\vec{k}_1, \vec{x})$ ed in Ω_2 coincide con una $f_2(\vec{k}_2, \vec{x})$ non è soluzione (locale) della (212). infatti avendo a disposizione solo due costanti indeterminate A_1 ed A_2 non è possibile soddisfare le due summenzionate condizioni omogenee su S . Occorre quindi considerare una funzione che in Ω_1 e in Ω_2 coincida rispettivamente con una combinazione lineare di $f_1(\vec{k}_1, \vec{x})$ in Ω_1 e con una combinazione lineare di $f_2(\vec{k}_2, \vec{x})$ in Ω_2 .

Affinchè ogni soluzione (locale) della (212) sia determinata unicamente, a meno di una costante moltiplicativa, dai valori di un numero minimo di parametri occorre considerare soluzioni $\varphi(\vec{x})$ che in una regione coincidano con una combinazione lineare di due soluzioni a variabili separate in una delle due regioni e coincidano nell'altra con una soluzione a variabili separate. Infatti, cominciando a considerare il caso in cui $\varphi(\vec{x})$ in Ω_1 coincida con una combinazione lineare di due soluzioni della (213) ed in Ω_2 con una soluzione a variabili separate della (214), soluzione che indicheremo $\varphi_1(\vec{x})$, abbiamo

$$\varphi_1(\vec{x}) = \begin{cases} A_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + B_1 e^{i\vec{k}'_1 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_1, k_1^2 = k_1'^2 = \frac{\omega^2}{a_1^2} \\ C_1 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_2, k_2^2 = \frac{\omega^2}{a_2^2} \end{cases} \quad (215)$$

Imponiamo le condizioni sulla superficie $z = 0, \forall x, y$

$$\begin{aligned} A_1 e^{i(k_{1x}x+k_{1y}y)} + B_1 e^{i(k'_{1x}x+k'_{1y}y)} &= C_1 e^{i(k_{2x}x+k_{2y}y)} \\ \frac{A_1 k_{1z} e^{i(k_{1x}x+k_{1y}y)} + B_1 k'_{1z} e^{i(k'_{1x}x+k'_{1y}y)}}{\rho_1} &= \frac{k_{2z} C_1}{\rho_2} e^{i(k_{2x}x+k_{2y}y)}. \end{aligned}$$

Poichè esse devono valere $\forall x, y$ deve essere

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x} \quad , \quad k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y}. \quad (216)$$

Ne segue

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= C_1 \\ \frac{1}{\rho_1} (k_{1z} A_1 + k'_{1z} B_1) &= \frac{k_{2z}}{\rho_2} C_1 \end{aligned} \quad (217)$$

Poichè per la (216) $k_{1x}^2 + k_{1y}^2 = k_{1x}'^2 + k_{1y}'^2$ e per la (215) $k^2 = k'^2$ si ha $k_{1z}^2 = k_{1z}'^2$ e quindi $k'_{1z} = \pm k_{1z}$. Se valesse il segno + le (217) sarebbero incompatibili (il che è ovvio perchè avremmo in Ω_1 una soluzione delle (213) a variabili separate) e quindi

$$k'_{1z} = -k_{1z} \quad (218)$$

Indichiamo con θ_1 e θ_2 gli angoli che i vettori \vec{k}_1 e \vec{k}_2 rispettivamente formano con la normale alla superficie $z = 0$, scelta positiva verso l'esterno di Ω_1 . Dalle (216) abbiamo

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

e poichè per le (215)

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (219)$$

abbiamo

$$\sin \theta_2 = \frac{a_2}{a_1} \sin \theta_1. \quad (220)$$

Pertanto dalle (216) e (218) uno dei due vettori \vec{k}_1 e \vec{k}'_1 è determinato in funzione dell'altro. Le (219) e le (220) non determinano completamente \vec{k}_2 in funzione di \vec{k}_1 (ovvero di \vec{k}'_1). Infatti dalla (220)

$$\theta_2 = \arcsin \left(\frac{a_2}{a_1} \sin \theta_1 \right) \quad \text{oppure} \quad \theta_2 = \pi - \arcsin \left(\frac{a_2}{a_1} \sin \theta_1 \right) \quad (221)$$

e corrispondentemente $k_{2z} > 0$ oppure $k_{2z} < 0$.

Scegliamo le tre componenti del vettore \vec{k}_1 (ovvero equivalentemente di \vec{k}'_1) ed il segno di k_{2z} come parametri che individuano in maniera unica, a meno di una costante moltiplicativa, ogni soluzione $\varphi_1(\vec{x})$ del tipo (215). Infatti le (217) determinano in maniera unica due delle costanti in funzione della rimanente, avendo scelto i parametri come si è fatto conviene nelle

(217) esprimere B_1 e C_1 in funzione di A_1 , coefficiente di $e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}$. Indichiamo $\varphi_{1\pm}(\vec{k}_1, \vec{x})$ le soluzioni del tipo (215) così parametrizzate. Ponendo $\beta_1 = B_1/A_1$ e $\gamma_1 = C_1/A_1$ le (217) si scrivono

$$\begin{aligned} 1 + \beta_1 &= \gamma_1 \\ \frac{k_{1z}}{\rho_1} (1 - \beta_1) &= \frac{k_{2z}}{\rho_2} \gamma_1 \end{aligned}$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\rho_2 k_{1z} - \rho_1 k_{2z}}{\rho_2 k_{1z} + \rho_1 k_{2z}} = \frac{\rho_2 \cos \theta_1 - (a_1/a_2) \rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 \cos \theta_1 + (a_1/a_2) \rho_1 \cos \theta_2} \\ \gamma_1 &= \frac{2\rho_2 \cos \theta_1}{\rho_2 \cos \theta_1 + (a_1/a_2) \rho_1 \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (222)$$

Vediamo che β_1 e γ_1 dipendono solo da $\cos \theta_1$ e dal segno di $\cos \theta_2$ (infatti $\cos \theta_2$ è determinato a meno del segno dalle (221)). Pertanto

$$\varphi_{1\pm}(\vec{k}_1, \vec{x}) = A_1 \begin{cases} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \beta_1 e^{i\vec{k}'_1 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_1 \\ \gamma_1 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (223)$$

con \vec{k}'_1 determinato dalle (216) e (218), \vec{k}_2 determinato a meno del segno di k_{2z} dalle (219),(220), β_1 e γ_1 determinate dalle (222).

Analogamente le soluzioni $\varphi_2(\vec{x})$, che in Ω_2 coincidono con una combinazione lineare di due soluzioni della (214) a variabili separate ed in Ω_1 con una soluzione a variabili separate della (213), si scrivono

$$\varphi_2(\vec{x}) = \begin{cases} A_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} + B_2 e^{i\vec{k}'_2 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_2, \quad k_2^2 = k_2'^2 = \frac{\omega^2}{a_2^2} \\ C_2 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_1, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{a_1^2} \end{cases}$$

Procedendo identicamente al caso precedente abbiamo, parametrizzando le soluzioni con le tre componenti del vettore \vec{k}_2 ed il segno di k_{1z}

$$\varphi_{2\pm}(\vec{k}_2, \vec{x}) = A_2 \begin{cases} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} + \beta_2 e^{i\vec{k}'_2 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_2 \\ \gamma_2 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} & \vec{x} \in \Omega_1 \end{cases} \quad (224)$$

dove, scegliendo il segno della normale a $z = 0$ positivo verso l'esterno di Ω_2 , tutte le quantità che determinano la $\varphi_{2\pm}$ si ottengono

l'indice 2 con l'indice 1 nelle formule delle corrispondenti quantità della $\varphi_{1\pm}$.

Abbiamo così ottenuto l'insieme di tutte le soluzioni (locali) linearmente indipendenti della (212) che coincidono in Ω_1 (rispettivamente Ω_2) con combinazioni di funzioni a variabili separate cartesiane.

Per definire le trasformate di $p(\vec{x}, t)$ rispetto alle funzioni $\varphi_{1\pm}$, $\varphi_{2\pm}$ è opportuno illustrare preventivamente una proprietà dell'operatore $L_{\vec{x}}$ pertinente a tale scopo.

Definiamo una misura $\mu(d^3x)$

$$\mu(d^3x) = \begin{cases} \frac{d^3x}{a_1^2 \rho_1} & , \vec{x} \in \Omega_1 \\ \frac{d^3x}{a_2^2 \rho_2} & , \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (225)$$

Abbiamo $\forall f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in D$:

$$\begin{aligned} \int g^*(\vec{x})(L_{\vec{x}}f)(\vec{x})\mu(d^3x) &= - \int_{\Omega_1} g^*(\vec{x})(\nabla^2 f)(\vec{x})\frac{d^3x}{\rho_1} - \\ &\quad - \int_{\Omega_2} g^*(\vec{x})(\nabla^2 f)(\vec{x})\frac{d^3x}{\rho_2} = \\ &= - \int_{\Omega_1} a_1^2(\nabla^2 g)^*(\vec{x})f(\vec{x})\mu(d^3x) - \int_{\Omega_2} a_2^2(\nabla^2 g)^*(\vec{x})f(\vec{x})\mu(d^3x) + \\ &\quad - \int_{\Omega_1} [g^*(\vec{x})(\nabla^2 f)(\vec{x}) - (\nabla^2 g)^*(\vec{x})f(\vec{x})]\frac{d^3x}{\rho_1} \\ &\quad - \int_{\Omega_2} [g^*(\vec{x})(\nabla^2 f)(\vec{x}) - (\nabla^2 g)^*(\vec{x})f(\vec{x})]\frac{d^3x}{\rho_2} = \\ &\quad \int (L_{\vec{x}}g)^*(\vec{x})f(\vec{x})\mu(d^3x) - \\ &\quad - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}[g^*(\vec{x})(\nabla f)(\vec{x}) - (\nabla g)^*(\vec{x})f(\vec{x})]\frac{d^3x}{\rho_1} - \\ &\quad - \int_{\Omega_2} \operatorname{div}[g^*(\vec{x})(\nabla f)(\vec{x}) - (\nabla g)^*(\vec{x})f(\vec{x})]\frac{d^3x}{\rho_2} \\ &= \int (L_{\vec{x}}g)^*(\vec{x})f(\vec{x})\mu(d^3x) - \\ &\quad - \int \left\{ \frac{1}{\rho_1} \left[g^*(\vec{x})\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}) - f(\vec{x})\frac{\partial g^*}{\partial n}(\vec{x}) \right]_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho_2} \left[g^*(\vec{x})\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}) - f(\vec{x})\frac{\partial g^*}{\partial n}(\vec{x}) \right]_2 \right\} dS \end{aligned}$$

l'integrale sulla superficie all'infinito è nullo poichè f e g sono a decrescenza rapida all'infinito (abbiamo scelto la normale positiva verso l'esterno della

regione Ω_1). Tenuto conto delle condizioni a cui soddisfano f e g^* su S in quanto appartenenti al dominio D di $L_{\vec{x}}$ l'integrale di superficie su S è nullo e quindi

$$\int g^*(\vec{x})(L_{\vec{x}}f)(\vec{x})\mu(d^3x) = \int (L_{\vec{x}}g)^*(\vec{x})f(\vec{x})\mu(d^3x) \quad (226)$$

Poichè la classe D è densa in $L^2(\mathbb{R}^3, \mu)$ l'operatore $L_{\vec{x}}$ definito su questo insieme denso è simmetrico.

Definiamo la trasformata di una funzione $f(\vec{x}) \in D$ (il che vale ovviamente anche per $p(\vec{x}, t)$ poichè $p(\vec{x}, t) \in D \forall t$) rispetto a una delle funzioni $\varphi_{\pm}(\vec{k}_1, \vec{x})$ o $\varphi_{\pm}(\vec{k}_2, \vec{x})$, che indicheremo per brevità col simbolo $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$, mediante

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int \varphi^*(\vec{k}, \vec{x}) f(\vec{x}) \mu(d^3x). \quad (227)$$

Ai fini dell'estensione al nostro caso dell'eguaglianza di Parseval ³²è opportuno scegliere come costanti A_1 e A_2 rispettivamente di $\varphi_{1\pm}(\vec{k}_1, \vec{x})$ e di $\varphi_{2\pm}(\vec{k}_2, \vec{x})$ il valore $1/(2\pi)^{3/2}$, ed in tal modo le funzioni sono univocamente determinate dai parametri $\vec{k}_{1\pm}, \vec{k}_{2\pm}$.

Consideriamo la trasformata di $(L_{\vec{x}}f)(\vec{x})$

$$(\widetilde{L_{\vec{x}}f})(\vec{k}) = \int \varphi^*(\vec{k}, \vec{x}) (L_{\vec{x}}f)(\vec{x}) \mu(d^3x) \quad (228)$$

$\varphi^*(\vec{k}, \vec{x})$ non appartiene a $L^2(R^3, \mu)$ ($|\varphi(\vec{k}, \vec{x})| > 0$ per $x \rightarrow \infty$) tuttavia vale ancora la proprietà

$$\int \varphi^*(\vec{k}, \vec{x}) (L_{\vec{x}}f)(\vec{x}) \mu(d^3x) = \int (L_{\vec{x}}\varphi)^*(\vec{x}) f(\vec{x}) \mu(d^3x) \quad (229)$$

perchè l'integrale di superficie all'infinito per cui differiscono le due espressioni si annulla a causa della decrescenza rapida di $f(\vec{x})$, e l'integrale sulla superficie S si annulla poichè φ appartiene localmente alla classe D e quindi soddisfa la condizione su S . Ne segue che

$$(\widetilde{L_{\vec{x}}f})_{1\pm, 2\pm}(\vec{k}_{1,2}) = \int (L_{\vec{x}}\varphi_{1\pm, 2\pm})^*(\vec{k}_{1,2}, \vec{x}) f(\vec{x}) \mu(d^3x) = \omega^2 \tilde{f}_{1\pm, 2\pm}(\vec{k}_{1,2}) \quad (230)$$

dove $\omega^2 = a_1^2 k_1^2$ per la trasformata rispetto a $\varphi_{1\pm}(\vec{k}_1, \vec{x})$ e $\omega^2 = a_2^2 k_2^2$ per la trasformata rispetto a $\varphi_{2\pm}(\vec{k}_2, \vec{x})$.

Procedendo come nel caso omogeneo applichiamo la trasformata, rispetto alle funzioni $\varphi_{1\pm}$ o $\varphi_{2\pm}$, all'equazione (211). Sotto opportune ipotesi su $p(\vec{x}, t)$ già menzionate nel caso della trasformata di Fourier, si ha che

$$\begin{aligned} \int \varphi^*(\vec{k}, \vec{x}) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{x}, t) \mu(d^3x) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \varphi^*(\vec{k}, \vec{x}) p(\vec{x}, t) \mu(d^3x) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{p}(\vec{k}, t) \end{aligned}$$

ed utilizzando la (230) abbiamo

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{p}(\vec{x}, t) = -\omega^2 \tilde{p}(\vec{x}, t) \quad (231)$$

³²La trasformata di Fourier conserva il prodotto scalare di due funzioni a quadrato sommabile

Notiamo che, affinché la trasformata dell'equazione (211) diventi un'equazione differenziale ordinaria (dipendente dai parametri \vec{k}), è necessario che l'operatore $L_{\vec{x}}$ sia un operatore simmetrico su un insieme denso $\in L^2(R^3, \mu)$ con una opportuna misura μ .

L'integrale generale delle (231) è

$$\tilde{p}(\vec{k}, t) = A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \quad \omega = \sqrt{\omega^2} \quad (232)$$

Pertanto, come nel caso delle trasformate di Fourier, potremmo determinare $A(\vec{k})$ e $B(\vec{k})$ dalle trasformate, rispetto alle funzioni $\varphi_{1\pm}$ e $\varphi_{2\pm}$, dei dati iniziali per $p(\vec{x}, 0)$ e $\partial p(\vec{x}, 0)/\partial t$ e quindi antitrasformando (come nel caso di Fourier per $p(\vec{x}, t) \in D$ esiste l'antitrasformata, che tuttavia non abbiamo ancora definito, di $\tilde{p}(\vec{k}, t)$)³³ potremmo ottenere $p(\vec{x}, t)$.

Tuttavia, invece di trattare il problema con dati iniziali assegnati ad un tempo fissato, che comporta le suddette difficoltà connesse alla presenza di trasformate rispetto alle funzioni φ_1 e φ_2 , tratteremo il problema con dati iniziali asintotici, che è più semplice sia nella formulazione che nell'interpretazione fisica, ed è inoltre il più naturale per lo studio della propagazione in due mezzi. Una definizione generale di dati iniziali asintotici richiederebbe una trattazione più ampia di quella consentita dall'economia del corso. Tuttavia daremo una definizione altrettanto precisa, ma meno generale, comunque sufficiente per i casi più frequenti.

Consideriamo l'espressione

$$p(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k})\varphi(\vec{k}, \vec{x})e^{-i\omega t}d^3k + \int B(\vec{k})\varphi(\vec{k}, \vec{x})e^{i\omega t}d^3k \quad (233)$$

dove $A(\vec{k})$ e $B(\vec{k}) \in S^\infty$ e, in particolare, possono essere a supporto compatto, e $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$ sta ad indicare $\varphi_{1\pm}$ o $\varphi_{2\pm}$. Analogamente a quanto già mostrato per la funzione $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}/(2\pi)^{3/2}$ usata nel caso omogeneo, si può facilmente verificare che

$$\nabla^2 \int A(\vec{k})\varphi(\vec{k}, \vec{x})e^{-i\omega t}d^3k = \int A(\vec{k})\nabla^2\varphi(\vec{k}, \vec{x})e^{-i\omega t}d^3k$$

e che

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int A(\vec{k})\varphi(\vec{k}, \vec{x})e^{-i\omega t}d^3k = \int A(\vec{k})\varphi(\vec{k}, \vec{x})\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{-i\omega t}d^3k$$

Pertanto

$$-a_j^2\nabla^2 p(\vec{x}, t) = \int (A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t}) (-a_j^2\nabla^2)\varphi(\vec{k}, \vec{x})d^3k$$

$$x \in \Omega_j, \quad j = 1, 2$$

³³Per l'antitrasformata ci sono delle complicazioni, dovute al fatto che abbiamo trasformato sia rispetto a φ_1 e φ_2 .

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}p(\vec{x}, t) = \int_{x \in \Omega_1 \cup \Omega_2} \left(A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \right) \omega^2 \varphi(\vec{k}, \vec{x}) d^3k \quad (234)$$

Inoltre si può verificare che

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{x}(\in\Omega_j) \rightarrow \vec{x}_0(\in S)} p(\vec{x}, t) = \\ & = \int \left(A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \right) \lim_{\vec{x}(\in\Omega_j) \rightarrow \vec{x}_0(\in S)} \varphi(\vec{k}, \vec{x}) d^3k \end{aligned} \quad (235)$$

ed analogamente per lo stesso limite di $\partial p / \partial n$.

Poichè $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$ appartiene localmente alla classe D , e quindi soddisfa alle condizioni su S , ne segue che anche $p(\vec{x}, t)$ soddisfa alle condizioni su S . Pertanto dalle (234) e (235) si ha che

$$(L_{\vec{x}} p)(\vec{x}, t) + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{x}, t) =$$

$$\int \left(A(\vec{k})e^{-i\omega t} + B(\vec{k})e^{i\omega t} \right) \left[(L_{\vec{x}} \varphi)(\vec{k}, \vec{x}) - \omega^2 \varphi(\vec{k}, \vec{x}) \right] d^3 k = 0$$

cioè l'espressione 233 soddisfa l'equazione (211).

Cominciamo a discutere il caso $\varphi(\vec{k}, \vec{x}) = \varphi_{1\pm}(\vec{k}, \vec{x})$. Si può facilmente verificare che essendo $p_{\pm}(\vec{x}, t)$ a valori reali, e $\varphi_{1\pm}^*(\vec{k}_1, \vec{x}) = \varphi_{1\pm}(-\vec{k}_1, \vec{x})$ si ha $A^*(\vec{k}_1) = B(-\vec{k}_1)$, e pertanto si può scrivere

$$p_{\pm}(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}_1) \varphi_{1\pm}(\vec{k}_1, \vec{x}) e^{-i\omega t} d^3 k_1 + \text{c.c.}$$

Assumiamo, al solito, $A(\vec{k}_1)$ a supporto in un intorno sufficientemente piccolo di $\vec{\kappa}_1$ con $\Delta k_{1i} \ll \kappa_1$ e con un unico massimo proprio in $\vec{\kappa}_1$; ed esaminiamo, con il metodo della fase stazionaria, la localizzazione di $p(\vec{x}, t)$.

Ricordando le (223) si ha per $\vec{x} \in \Omega_1$

$$p(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(\vec{k}_1) \left(e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t)} + \beta_1 e^{i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) d^3 k_1 + \text{c.c.}$$

Denotando con $\varphi(\vec{k}_1)$ la fase di $A(\vec{k}_1)$, e ricordando che $\omega = a_1 k_1$, abbiamo che il primo degli integrali è massimo nel punto \vec{x}_1 , corrispondente al valore $\vec{\kappa}_1$ del punto di fase stazionaria, dato dalla

$$\vec{x}_1 = \left[\frac{d\omega}{dk_1} \right]_{\kappa_1} \frac{\vec{\kappa}_1}{\kappa_1} t - \nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}_1} = a_1 \frac{\vec{\kappa}_1}{\kappa_1} t - \nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}_1}$$

mentre il secondo integrale è massimo nel punto

$$\vec{x}'_1 = a_1 \frac{\vec{\kappa}'_1}{\kappa_1} t - \nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}'_1}$$

dove $\kappa'_{1t} = \kappa_{1t}$, $\kappa'_{1z} = -\kappa_{1z}$ e t indica la componente parallela al piano $z = 0$.

Se invece $\vec{x} \in \Omega_2$ dalla (223) abbiamo

$$p(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(\vec{k}_1) \gamma_1 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} + \omega t)} d^3 k_1 + \text{c.c.}$$

Questo integrale è massimo nel punto

$$\vec{x}_2 = a_2 \frac{\vec{\kappa}_2}{\kappa_2} t - \nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}_2}$$

dove \vec{k}_2 e κ_2 sono determinati da \vec{k}_1 e κ_1 tramite le (219) e (220) a meno del segno della loro componente z , che resta fissato dalla scelta della soluzione locale $\varphi_{1+}(\vec{k}, \vec{x})$ o $\varphi_{1-}(\vec{k}, \vec{x})$.

Introduciamo i tre tempi caratteristici:

$$T_1 = \left| \frac{\nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}_1}}{a_1} \right| ; T_1' = \left| \frac{\nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}_1'}}{a_1} \right| ; T_2 = \left| \frac{\nabla_{\vec{k}_1} \varphi(\vec{k}_1) \Big|_{\vec{\kappa}_2}}{a_2} \right|$$

e sia T il maggiore di essi. Osserviamo che se $\kappa_{1z} > 0$ esiste un tempo $t \ll -T$ tale che: $\vec{x}_1(t)$ certamente appartiene alla regione Ω_1 la quale è il semispazio $z < 0$, mentre x_1' non esiste perchè il contributo del secondo integrale è nullo (in Ω_1 la fase non è stazionaria). Nella regione Ω_2 il punto $\vec{x}_2(t)$ non esiste per lo stesso motivo se scegliamo la soluzione locale φ_{1+} che fissa $\kappa_{2z} > 0$, e invece individua un massimo della pressione se scegliamo φ_{1-} ($\kappa_{2z} < 0$). La scelta di φ_{1+} e di un tempo t sufficientemente remoto assegna come dato iniziale asintotico un pacchetto d'onde incidente nella direzione κ_1 sulla superficie $z = 0$, e fissa il segno di k_{2z} eliminandone l'ambiguità.

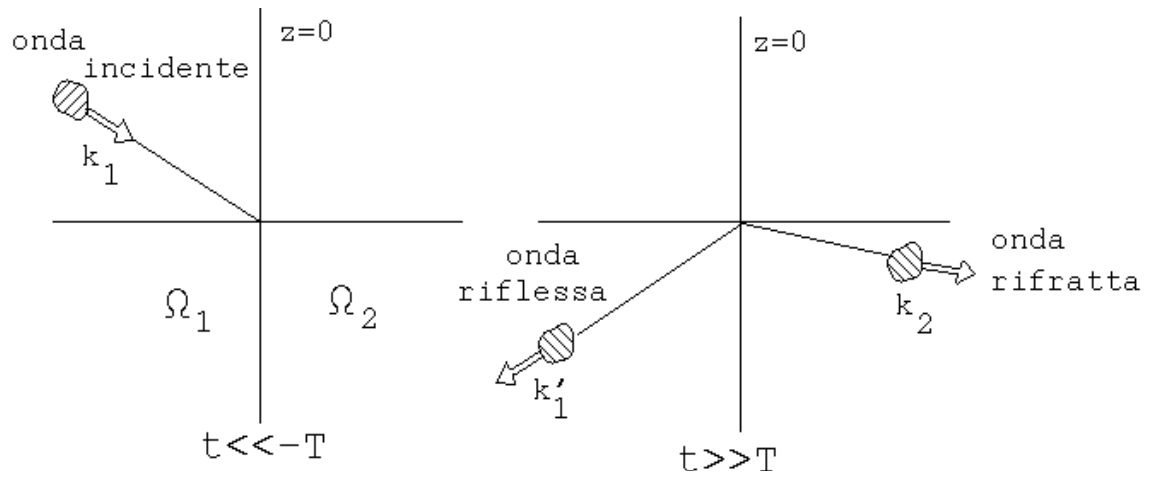
In tal modo, a tempi $t \gg T$, il punto $\vec{x}_1(t)$ non è più definito, e invece $x_1'(t)$ descrive un pacchetto d'onde che si allontana dalla superficie $z = 0$ nella regione Ω_1 , e rappresenta il gruppo d'onde riflesso nella direzione individuata da $\vec{\kappa}_1'$, mentre $\vec{x}_2(t)$ descrive un secondo pacchetto d'onde che si allontana da $z = 0$ in Ω_2 , e rappresenta il gruppo d'onde rifratto, ovvero trasmesso, nella direzione κ_2 .

Per tempi t compresi tra $-T$ e T tutti e tre gli integrali possono dare contributi non nulli in corrispondenza delle rispettive fasi stazionarie, né si possono trascurare i coseni di tali fasi e le loro interferenze. Questa situazione complicata descrive l'interazione del gruppo d'onde con la superficie di separazione dei due mezzi, quando il pacchetto incidente non è ancora scomparso e quelli riflesso e rifratto non sono ancora completamente formati.

Osserviamo che l'uso della soluzione locale φ_{2+} consente di formulare dati iniziali asintotici nella regione Ω_2 .³⁴

Ribadiamo che la scelta delle φ è determinata dalle condizioni iniziali asintotiche, e non, come erroneamente si sostiene in quasi tutti i libri di Fisica Teorica, dal *comportamento nel futuro* (incredibile, ma vero!).

³⁴Notiamo infine che la scelta di φ_{1-} assegna come dato iniziale asintotico a tempi remoti due pacchetti d'onda in Ω_1 e Ω_2 incidenti su $z = 0$ da parti opposte nelle direzioni $\vec{\kappa}_1$ e $\vec{\kappa}_2$. Per tempi $t \gg T$ vi sono due pacchetti che si allontanano da $z = 0$ nelle direzioni $-\vec{\kappa}_1$ e $-\vec{\kappa}_2$. Questa particolare soluzione è parametrizzata dal solo vettore $\vec{\kappa}_1$ la cui scelta fissa tutti gli altri. Per φ_{2-} vale un discorso analogo. Ovviamente $\vec{\kappa}_1$ e $\vec{\kappa}_2$ possono essere scelti in modo indipendente, e per sovrapposizione i due pacchetti incidenti danno luogo a due pacchetti riflessi e a due rifratti.



9.2 Diffusione da una sfera

Consideriamo ora il caso in cui la superficie di separazione sia una sfera. Indichiamo con Ω_e ed Ω_i le regioni aperte esterna ed interna alla sfera ed usiamo coordinate sferiche con origine nel centro della sfera di equazione $r = r_0$. Ogni soluzione della (212) deve coincidere in Ω_e con una soluzione dell'equazione di Helmholtz

$$-\nabla^2 f_e(\vec{x}) = k^2 f_e(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_e, k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \quad (236)$$

e coincidere in Ω_i con una soluzione dell'equazione

$$-\nabla^2 f_i(\vec{x}) = k^2 f_i(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_i, k^2 = \frac{\omega^2}{a_i^2} \quad (237)$$

ed inoltre deve soddisfare le condizioni già menzionate sulla sfera $r = r_0$.

Prima di cominciare a discutere la scelta delle funzioni $\varphi(\vec{x})$ esaminamo alcune definizioni e proprietà dell'equazione di

Helmholtz

$$-\nabla^2 u(r, \theta, \phi) = k^2 u(r, \theta, \phi) \quad (238)$$

utili a tal scopo.

Tra le soluzioni dell'equazione di Helmholtz per $r > r_0$ ³⁵ consideriamo quelle che hanno uno dei seguenti definiti comportamenti all'infinito, denotate con il simbolo u_+ e u_- rispettivamente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_+(r, \theta, \phi) = 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u_+}{\partial r} - i k u_+ \right) = 0 \quad (239)$$

oppure

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_-(r, \theta, \phi) = 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u_-}{\partial r} + i k u_- \right) = 0 \quad (240)$$

dove i limiti sono intesi uniformemente rispetto a θ e ϕ .

Le (239) e le (240) vengono denominate condizioni di radiazione di Sommerfeld (alle volte con tale denominazione vengono designate solo le (239)). Per esempio $\frac{e^{ikr}}{r}$, come si può facilmente verificare scrivendo il laplaciano in coordinate sferiche, è soluzione della (238) $\forall r \neq 0$ e soddisfa le (239) mentre $\frac{e^{-ikr}}{r}$ è soluzione della (238) $\forall r \neq 0$ e soddisfa le condizioni (240).

Mostriamo che se u_+ o u_- è una soluzione dell'equazione (238) nella regione aperta $V = R^3 - \overline{B}$ (dove \overline{B} è una regione limitata e chiusa di R^3) ed

³⁵Mostreremo che se $u(r, \theta, \phi)$ è soluzione della (238) in R^3 e soddisfa la (239) o la (240) allora è identicamente nulla.

è continua insieme con le sue derivate prime in $\bar{V} = V \cup \mathcal{FV}$ (\mathcal{FV} frontiera di V) allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{FV}} \left(\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial u_{\pm}(\vec{x}')}{\partial n} - u_{\pm}(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) dS = \quad (241) \\ = \begin{cases} u_{\pm}(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in V \\ 0 & \vec{x} \in R^3 - \bar{V} \end{cases} \end{aligned}$$

dove i segni \pm si corrispondono.

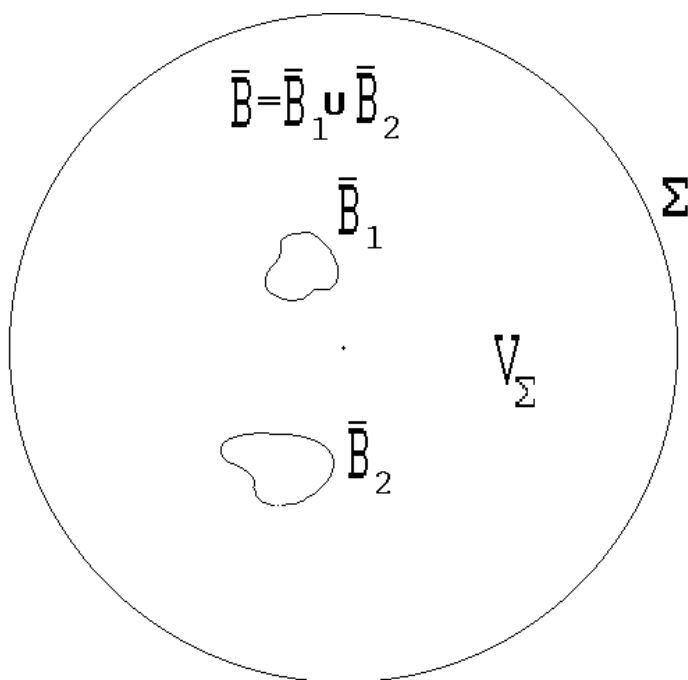
Applicando la III identità di Green nella regione V_{Σ} contenuta in una sfera di raggio R_{Σ} con centro nell'origine per le funzioni

$$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \text{ e } u_{+}(\vec{x})$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{FV}} \left(\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial u_{+}(\vec{x}')}{\partial n} - u_{+}(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) dS + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial u_{+}(\vec{x}')}{\partial r'} - u_{+}(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) dS = \\ = \begin{cases} u_{+}(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in V_{\Sigma} \\ 0 & \vec{x} \in R^3 - (V_{\Sigma} \cup \mathcal{FV}) \end{cases} \end{aligned}$$

L'espressione a primo membro è zero poichè per $\vec{x} \in R^3 - (V_{\Sigma} \cup \mathcal{FV})$ vale la II identità di Green.



Poichè

$$\frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \left(ik - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{r' - r \cos \gamma}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$|\vec{x}-\vec{x}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}$$

γ angolo tra le direzioni di \vec{x} e di \vec{x}' , l'integrale su Σ si può riscrivere

$$R_\Sigma^2 \int \left[\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left(\frac{\partial u_+}{\partial r'}(\vec{x}') - ik u_+(\vec{x}') \right) \right]_{|\vec{x}'|=R_\Sigma} d\Omega_+ \quad (242)$$

$$+ R_\Sigma^2 \int \left[\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} u_+(\vec{x}') \right]_{|\vec{x}'|=R_\Sigma} d\Omega_-$$

$$- R_\Sigma^2 \int \left[\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - ik \right) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} u_+(\vec{x}') \left(1 - \frac{r' - r \cos \gamma}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \right]_{|\vec{x}'|=R_\Sigma} d\Omega$$

I primi due termini vanno a zero per $R_\Sigma \rightarrow \infty$ per la condizione di radiazione (239) e il terzo va a zero poichè

$$\lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} R_\Sigma^2 \int \left\{ \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \left[(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. - (r' - r \cos \gamma) \right] u_+(\vec{x}') \right\}_{|\vec{x}'|=R_\Sigma} d\Omega =$$

$$\lim_{R_\Sigma \rightarrow \infty} R_\Sigma \int \left[\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \frac{r^2}{2} (1 - \cos^2 \gamma) u_+(\vec{x}') \right]_{|\vec{x}'|=R_\Sigma} d\Omega = 0.$$

Pertanto vale la (241) per la $u_+(\vec{x})$ e in modo analogo si mostra che essa vale anche per la $u_-(\vec{x})$.

Dalla (241) possiamo ottenere il comportamento di $u_\pm(\vec{x})$ per grandi valori di $r = |\vec{x}|$. Infatti per grandi r

$$|\vec{x}-\vec{x}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}} = r - r' \cos \gamma + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

e quindi la (241) diventa

$$u_\pm(r, \theta, \phi) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int_\Sigma \left[e^{\pm ikr' \cos \gamma} \frac{\partial u_\pm(\vec{x}')}{\partial n} + \right. \quad (243)$$

$$\left. - u_\pm(\vec{x}') \frac{\partial e^{\pm ikr' \cos \gamma}}{\partial n} \right] dS + O\left(\frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\pm ikr}}{r} f(\theta, \phi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Se $u_{\pm}(\vec{x})$ è soluzione della (238) $\forall \vec{x} \in R^3$ usando la III identità di Green nella regione interna ad una sfera Σ di raggio R_{Σ} e centro nell'origine abbiamo

$$u_{\pm}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{\partial u_{\pm}(\vec{x}')}{\partial r'} - u_{\pm}(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right] dS.$$

Poichè questa relazione vale per ogni Σ , calcolando il limite del secondo membro per $R_{\Sigma} \rightarrow \infty$ otteniamo, come per la (242), zero, e quindi $u_{\pm}(\vec{x}) = 0$ identicamente.

Esaminiamo alcune proprietà delle soluzioni a variabili separate dell'equazione di Helmholtz in coordinate sferiche. La (238) si scrive esplicitamente

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = k^2 u(r, \theta, \phi) \quad (244)$$

Cominciamo col considerare le soluzioni in cui r è separato da θ e ϕ , indicate come

$$v(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi).$$

Sostituendo nella (244) abbiamo che Y ed R devono soddisfare rispettivamente le equazioni

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\lambda}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\lambda}}{\partial \phi^2} = \lambda Y_{\lambda}(\theta, \phi) \quad (245)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_{\lambda}}{dr} \right) + k^2 r^2 R_{\lambda} = \lambda R_{\lambda}(r) \quad (246)$$

in cui abbiamo esplicitato la dipendenza dal parametro λ che è la costante di separazione. A sua volta la (245) si può risolvere per separazione di variabili. Poichè ϕ è definito mod 2π deve essere

$$Y_{\lambda}(\theta, 0) = Y_{\lambda}(\theta, 2\pi) ; \quad \frac{\partial Y_{\lambda}(\theta, 0)}{\partial \phi} = \frac{\partial Y_{\lambda}(\theta, 2\pi)}{\partial \phi}.$$

Inoltre poichè l'equazione (245) è singolare per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ le sue soluzioni sono definite solo nell'intervallo aperto $]0, \pi[$. Imponendo la condizione che $Y(\theta, \phi)$ abbia limite finito in 0^+ e π^- , e pertanto che essa sia continua in $[0, \pi]$, si ha, tenuto conto anche delle condizioni sulla dipendenza da ϕ , che l'equazione (245) ha soluzione solo per $\lambda = l(l+1)$ con l intero positivo o nullo. In corrispondenza dell'autovalore $\lambda = l(l+1)$ esistono $2l+1$ soluzioni linearmente indipendenti. Le autofunzioni sono ortonormalizzate in $L^2(S^2, d\Omega)$ dove S^2 è la sfera di raggio unità parametrizzata da θ e ϕ e

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, e sono indicate col simbolo $Y_l^m(\theta, \phi)$ con m intero tale che $-l \leq m \leq l$:

$$\int Y_l^{m'*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Le $Y_l^m(\theta, \phi)$ costituiscono una base in $L^2(S^2, d\Omega)$. Se $f(r, \theta, \phi)$ è definita per ogni r , e per ogni fissato r appartiene a $L^2(S^2, d\Omega)$, allora

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{f}_{lm}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (247)$$

$$\tilde{f}_{lm}(r) = \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) f(r, \theta, \phi) d\Omega$$

dove la serie a secondo membro per ogni fissato r è assolutamente ed uniformemente convergente.

L'equazione (246) per $\lambda = l(l+1)$ si scrive

$$\frac{d^2 R_l(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_l(r) = 0, \quad (248)$$

e, ponendo $kr = x$, diventa

$$\frac{d^2 R_l(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR_l(x)}{dx} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) R_l(x) = 0. \quad (249)$$

Ponendo in quest'ultima equazione $y_l = \sqrt{x} R_l(x)$ si ha l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2 y_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_\nu(x) = 0 \quad (250)$$

per $\nu = l + 1/2$.

L'equazione di Bessel (250) ha una singolarità fuchsiana per $x = 0$ con indici caratteristici $\alpha = \pm\nu$. Per ν non intero le soluzioni corrispondenti ad $\alpha = \nu$ e ad $\alpha = -\nu$ sono linearmente indipendenti. Questo è il nostro caso le soluzioni linearmente, che si indicano con $J_{l+1/2}$ e $J_{-l-1/2}$ sono espresse dalle serie

$$J_{l+1/2}(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^{l+1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+l+3/2)} \quad (251)$$

$$J_{-l-1/2}(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^{-l-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-l-1/2)} \quad (x \neq 0)$$

in cui compare la funzione Γ di Eulero. Le $J_{l+1/2}$ si chiamano funzioni di Bessel (di prima specie). Si chiamano funzioni di Bessel di seconda specie o funzioni di Neumann le funzioni:

$$N_{l+1/2}(x) = (-1)^l J_{-l-1/2}(x) \quad (x \neq 0) \quad (252)$$

$$\text{e per } \nu \text{ qualsiasi } N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}.$$

L'equazione di Bessel ha inoltre una singolarità non fuchsiana all'infinito.

Le funzioni di Hankel di prima e seconda specie, indicate con i simboli $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel caratterizzate dal loro comportamento asintotico (alla Poincaré) all'infinito

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \left(1 + \frac{a}{x} + \dots \right) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \left(1 + \frac{a'}{x} + \dots \right) \end{aligned} \quad (253)$$

per ogni ν .

Esse si esprimono in funzione di J_ν e N_ν mediante le relazioni

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x) \quad (254)$$

che sono analoghe alle formule di Eulero

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x.$$

Notiamo che $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ non sono definite per $x = 0$ e il loro limite per $x \rightarrow 0$ è infinito perchè tale è il limite di $N_\nu(x)$. Nel caso $\nu = l + 1/2$ le corrispondenti soluzioni dell'equazione (248) si indicano con i simboli

$$h_l^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(1,2)}(x) \quad (255)$$

che hanno il comportamento asintotico

$$\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} e^{i(x - \frac{\pi}{2}(l+1))} \left(1 + \frac{a}{x} + \dots \right) \\ h_l^{(2)}(x) &= \frac{1}{x} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}(l+1))} \left(1 + \frac{a'}{x} + \dots \right) \end{aligned} \quad (256)$$

Analogamente si definisce

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad (257)$$

Ogni soluzione dell'equazione (244) per ogni r oppure per $r > 0$ (bisogna distinguere i due casi poichè la (244) è singolare per $r = 0$) è definita su S^2 (bisogna precisare perchè $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono punti singolari della (244)) per ogni fissato $r \in C^2(S^2)$ e quindi per la (247) è rappresentabile come

serie assolutamente ed uniformemente convergente nelle funzioni $Y_l^m(\theta, \phi)$. Esaminiamo i coefficienti di questo sviluppo. Indichiamo con

$$L_{\theta, \phi} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (\cdot)$$

l'operatore a secondo membro definito sulle funzioni $\in C^2(S^2)$, essendo S^2 parametrizzata da θ, ϕ . Qualunque siano f e g appartenenti a $C^2(S^2)$ si ha che ³⁶

$$\begin{aligned} \int f^*(\theta, \phi)(L_{\theta, \phi} g)(\theta, \phi) d\Omega &= \int (L_{\theta, \phi} f)^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi) d\Omega + \\ &- \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_1}^{\pi - \varepsilon_2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \left[f^*(\theta, \phi) \frac{\partial g}{\partial \phi}(\theta, \phi) - g(\theta, \phi) \frac{\partial f^*}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right]_0^{2\pi} + \\ &\int_0^{2\pi} d\phi \left[f^*(\theta, \phi) \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \phi) - g(\theta, \phi) \sin \theta \frac{\partial f^*}{\partial \theta}(\theta, \phi) \right]_0^\pi \end{aligned}$$

il limite dell'integrale su θ tra ε_1 e $\pi - \varepsilon_2$ è nullo perchè le funzioni e loro derivate sono periodiche di periodo 2π , la funzione integranda dell'ultimo integrale su ϕ è nulla perchè le funzioni che vi compaiono sono continue in $[0, \pi]$ per ogni ϕ e $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

Pertanto l'operatore $L_{\theta, \phi}$ è simmetrico.

Moltiplichiamo l'equazione (244) per $Y_l^{m*}(\theta, \phi)$ e, integrando su Ω abbiamo

$$\begin{aligned} &- \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \phi) \right) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{r^2} \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) (L_{\theta, \phi} u)(r, \theta, \phi) d\Omega = k^2 \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) u(r, \theta, \phi) d\Omega. \end{aligned}$$

Nel primo termine possiamo scambiare l'operazione

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \cdot \right)$$

con l'integrale perchè $u(r, \theta, \phi) \in C^2(r)$ per ogni r oppure $r > 0$ e l'integrale è esteso alla regione limitata $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Il secondo integrale, per la simmetria dell'operatore $L_{\theta, \phi}$, è eguale a

$$\int (L_{\theta, \phi} Y_l^{m*})(\theta, \phi) u(r, \theta, \phi) d\Omega = l(l+1) \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) u(r, \theta, \phi) d\Omega =$$

³⁶Notiamo che

$$\int_0^\pi f^*(\theta, \phi) \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi f^*(\theta, \phi) \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(\theta, \phi) \frac{d\theta}{\sin \theta}$$

esiste perchè si può dimostrare che affinchè f^* e $\partial^2 g / \partial \phi^2$ siano continue nell'intorno del punto $\theta = 0$ sulla sfera devono avere limite zero per $\theta = 0$ e vanno a zero in modo da assicurare l'esistenza dell'integrale. Lo stesso vale per il limite $\theta = \pi$.

$$= l(l+1)\tilde{u}_{lm}(r).$$

Pertanto abbiamo che i coefficienti di Fourier $\tilde{u}_{lm}(r)$ di $u(r, \theta, \phi)$ nella serie in $Y_l^m(\theta, \phi)$ soddisfano l'equazione

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \tilde{u}_{lm}(r) \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{u}_{lm}(r) = k^2 \tilde{u}_{lm}(r)$$

cioè l'equazione (248).

Se $u(r, \theta, \phi)$ è soluzione dell'equazione (244) per ogni r , $\tilde{u}_{lm}(r)$ è soluzione della (248) per ogni r . Poichè ogni soluzione per ogni r della (248) deve essere proporzionale a $j_l(kr)$ abbiamo che

$$\tilde{u}_{lm}(r) = b_{lm} j_l(kr)$$

e ogni soluzione della (244) per ogni r può essere rappresentata dalla serie, assolutamente ed uniformemente convergente per un assegnato r

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (258)$$

Se $u(r, \theta, \phi)$ è soluzione dell'equazione (244) solo per $r > 0$ anche $\tilde{u}_{lm}(r)$ è soluzione della (248) solo per $r > 0$. In questo caso l'integrale generale è una combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti che sceglieremo essere $h_l^{(1)}(kr)$ e $h_l^{(2)}(kr)$. Pertanto

$$\tilde{u}_{lm}(r) = a'_{lm} h_l^{(1)}(kr) + a''_{lm} h_l^{(2)}(kr) \quad (r > 0)$$

e ogni soluzione della (244) per $r > 0$ può essere rappresentata dalla serie

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a'_{lm} h_l^{(1)}(kr) + a''_{lm} h_l^{(2)}(kr)) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (r > 0) \quad (259)$$

assolutamente ed uniformemente convergente per ogni fissato r .

Consideriamo ora la rappresentazione in serie di funzioni sferiche Y_l^m di una soluzione dell'equazione di Helmholtz per $r > 0$ che soddisfi la condizione di radiazione (239). Ogni $u_+(r, \theta, \phi)$ è rappresentabile come serie

$$u_+(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}^{(+)} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (260)$$

$$A_{lm}^{(+)} = \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) u_+(r, \theta, \phi) d\Omega.$$

Definiamo $u_{lm}(r, \theta, \phi) = h_l^{(1)}(kr) Y_l^{m*}(\theta, \phi)$ e applichiamo la II formula di Green alle funzioni u_{lm} e u_+ nella corona sferica compresa tra le due sfere

Σ_R e Σ_r con centro nell'origine e di raggi R e r con $R > r > 0$. Poichè sia u_+ che u_{lm} soddisfano la (244) abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int (u_+ \nabla^2 u_{lm} - u_{lm} \nabla^2 u_+) d^3x = \\ &= \int_{\Sigma_R \cup \Sigma_r} \left(u_+ \frac{\partial u_{lm}}{\partial n} - u_{lm} \frac{\partial u_+}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

con la normale positiva verso l'esterno della corona sferica. Pertanto

$$\int_{\Sigma_r} \left(u_+ \frac{\partial u_{lm}}{\partial n} - u_{lm} \frac{\partial u_+}{\partial n} \right) dS = \int_{\Sigma_R} \left(u_+ \frac{\partial u_{lm}}{\partial n} - u_{lm} \frac{\partial u_+}{\partial n} \right) dS$$

aggiungendo e sottraendo iku_+u_{lm} nell'integrale su Σ_R esso può essere scritto

$$\int_{\Sigma_R} u_+ \left(-iku_{lm} + \frac{\partial u_{lm}}{\partial n} \right) dS - \int_{\Sigma_R} u_{lm} \left(-iku_+ + \frac{\partial u_+}{\partial n} \right) dS$$

e ciascuno dei due integrali va a zero per $R \rightarrow \infty$ perchè sia u_+ sia u_{lm} soddisfano le condizioni di radiazione (239). Pertanto

$$\int_{\Sigma_r} \left(u_+ \frac{\partial u_{lm}}{\partial n} - u_{lm} \frac{\partial u_+}{\partial n} \right) dS = 0$$

ossia per la (260)

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 \frac{dh_l^{(1)}}{dr}(kr) \int u_+(r, \theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) d\Omega + \\ &\quad - r^2 h_l^{(1)}(kr) \frac{d}{dr} \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) u_+(r, \theta, \phi) d\Omega = \\ &= r^2 \left(\frac{dh_l^{(1)}}{dr}(kr) A_{lm}^{(+)}(r) - h_l^{(1)}(kr) \frac{d}{dr} A_{lm}^{(+)}(r) \right) \end{aligned}$$

Pertanto $A_{lm}^{(+)}(r)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{1}{A_{lm}^{(+)}(r)} \frac{d}{dr} A_{lm}^{(+)}(r) = \frac{1}{h_l^{(1)}(kr)} \frac{d}{dr} h_l^{(1)}(kr)$$

la cui soluzione è

$$A_{lm}^{(+)}(r) = a_{lm}^{(+)} h_l^{(1)}(kr).$$

Perciò la $u_+(r, \theta, \phi)$ soddisfa la (244) per $r > 0$ e le condizioni di radiazione (239) può essere rappresentata dalla serie

$$u_+(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^{(+)} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (r > 0) \quad (261)$$

assolutamente ed uniformemente convergente per ogni fissato r . Analogamente si mostra che la soluzione dell'equazione di Helmholtz $u_-(r, \theta, \phi)$ che soddisfa le condizioni di radiazioni (240) può essere rappresentata dalla serie

$$u_-(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^{(-)} h_l^{(2)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (r > 0) \quad (262)$$

Quindi $u_+(r, \theta, \phi)$ e $u_-(r, \theta, \phi)$ hanno la proprietà (243) e hanno le rappresentazioni (261) e (261) rispettivamente.

Siamo ora in grado di discutere il problema della soluzione dell'equazione (211) con dati asintotici iniziali:

$|p(\vec{x}, t)|$ è, ad ogni istante $t \leq 0$, apprezzabilmente diversa da zero solo in una regione $V_t \in \Omega_{est}$ lontana dall'origine; per t crescenti V_t si avvicina al centro della sfera secondo una direzione individuata dagli angoli θ_0, ϕ_0 .

Per soddisfare le condizioni iniziali asintotiche è conveniente scegliere soluzioni $\varphi(\vec{x})$ della (212) nella regione esterna della forma

$$f_{e\pm}(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + g_{\pm}(\vec{k}, \vec{x}) \quad (\vec{x} \in \Omega_{est}) \quad (263)$$

Le motivazioni di questa scelta, come verificheremo tra breve, sono le seguenti

- 1) Il termine $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ è conveniente per soddisfare le condizioni asintotiche iniziali.
- 2) L'aggiunta di un'altra soluzione $g(\vec{x})$ è necessaria affinché $\varphi(\vec{x})$ soddisfi le condizioni sulla superficie di separazione S .
- 3) La scelta come funzione $g(\vec{x})$ di una funzione che soddisfa le condizioni di radiazione (il segno indica l'una o l'altra delle due) permette di controllare il contributo che tale funzione fornisce al comportamento asintotico di $p(\vec{x}, t)$ rispetto al tempo.

Consideriamo l'espressione

$$p_{\pm}(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}) \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + g_{\pm}(\vec{k}, \vec{x}) \right) e^{-i\omega t} d^3k + \text{c.c.} \quad (264)$$

con $|A(\vec{k})|$ a supporto compatto in modo da poter valutare l'integrale con il metodo della fase stazionaria, e da poter scambiare le derivate $\partial/\partial x_i$ e $\partial/\partial t$ con l'integrale su d^3k . Poiché la funzione integranda soddisfa l'equazione (211) per $\vec{x} \in \Omega_{est}$ anche $p(\vec{x}, t)$ data dalla (264) soddisfa la (211) per $\vec{x} \in \Omega_{est}$.

Sia $|A(\vec{k})|$ diverso da zero nell'intervallo $|k - \kappa| \ll \Delta k$ con $\Delta k \ll \kappa$, e per direzioni di \vec{k} appartenenti ad un cono attorno alla direzione θ_0, ϕ_0 (direzione di $\vec{\kappa}$) di ampiezza $\psi \ll 1$.

Valutiamo col metodo della fase stazionaria il contributo dei due termini

$$p_1(\vec{x}, t) = \int |A(\vec{k})| e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \alpha(\vec{k}))} d^3k + \text{c.c.}$$

$$p_{2\pm}(\vec{x}, t) = \int |A(\vec{k})| e^{i(\alpha(\vec{k}) - \omega t)} g_{\pm}(\vec{k}, \vec{x}) d^3k + \text{c.c.}$$

$$A(\vec{k}) = |A(\vec{k})| e^{i\alpha(\vec{k})}.$$

La scelta di $A(k)$ comporta che $|p_1(\vec{x}, t)|$ può essere reso apprezzabilmente diverso da zero entro una regione V_t nell'intorno del punto di fase stazionaria

$$\vec{x}_s = a \frac{\vec{k}}{\kappa} t - \left(\nabla_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}} ; \quad \frac{d\omega}{dk} = a. \quad (265)$$

Nella regione V_t , $|p_1(\vec{x}, t)|$ ha un massimo per un fissato t .

Affinchè $\vec{x}_s(t)$ si avvicini all'origine per t crescenti a partire dall'istante iniziale $t_0 < 0$ scegliamo $\vec{\kappa}$ in modo che esso formi un'angolo maggiore di $\pi/2$ con $\vec{x}_s(0) = - \left(\nabla_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}}$, essendo $\left| \left(\nabla_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}} \right| \gg r_0$ e cioè con il modulo di $\vec{x}_s(0)$ molto maggiore del raggio della sfera. Pertanto $p_1(\vec{x}, t)$ soddisfa le condizioni asintotiche iniziali.

Occorre che anche p_2 soddisfi le condizioni asintotiche per ogni $t \ll t_0 < 0$ ed $r \gg r_0$. Iniziamo a considerare $p_{2-}(\vec{x}, t)$. Per la (243), a grandi r

$$g_-(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r} f_-(\vec{k}, \theta, \phi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Pertanto

$$p_{2-}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \int d\Omega_k \int |A(\vec{k})| |f_-(\theta, \phi, \vec{k})| e^{-i(kr + akt - \alpha(\vec{k}) - \psi(\vec{k}, \theta, \phi))} k^2 dk +$$

$$+ \text{complesso coniugato,}$$

$$f_-(\theta, \phi, \vec{k}) = |f_-(\theta, \phi, \vec{k})| e^{i\psi(\vec{k}, \theta, \phi)}.$$

L'integrale su dk ha fase stazionaria per

$$r_- = -at + \left(\frac{d\alpha(\vec{k})}{dk} \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}} + \left(\frac{d\psi(\vec{k}, \theta, \phi)}{dk} \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}}.$$

Possiamo scegliere un t negativo tale che

$$a|t| \gg \left| \frac{d\alpha}{dk} + \frac{d\psi}{dk} \right|$$

e tale quindi che l'integrale su dk abbia fase stazionaria in

$$r_- \simeq -at \gg r_0.$$

Pertanto $|p_{2-}(\vec{x}, t)|$ può essere apprezzabilmente diversa da zero sui punti di una sfera di raggio $a|t| \gg r_0$, violando le condizioni asintotiche scelte prima, e non può scegliere $f_-(\vec{k}, \vec{x})$ come $\varphi(\vec{x})$ per $\vec{x} \in \Omega_{est}$.

L'altra scelta $g_+(\vec{k}, \vec{x})$ per grandi r

$$g_+(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} f_+(\vec{k}, \theta, \phi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (266)$$

comporta che

$$p_{2+}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \int d\Omega_k |A(\vec{k})| |f_+(\theta, \phi, \vec{k})| e^{i(k(r-at) + \alpha(\vec{k}) + \psi(\vec{k}, \theta, \phi))} k^2 dk +$$

+ complesso coniugato.

L'integrale su dk ha fase stazionaria per

$$r_+ = at - \left(\frac{d\alpha(\vec{k})}{dk} \right)_{\vec{k}=\vec{k}} - \left(\frac{d\psi(\vec{k}, \theta, \phi)}{dk} \right)_{\vec{k}=\vec{k}}$$

Per t sufficientemente negativo si ha $r_+ < 0$ e l'integrale non punti di fase stazionaria ($r \geq 0$ essendo il modulo di \vec{x})³⁷.

Abbiamo allora stabilito che con la scelta

$$\varphi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + g_+(\vec{k}, \vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega_{est} \quad (267)$$

sono soddisfatte le condizioni iniziali asintotiche per $p(\vec{x}, t)$.

La $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$ deve, inoltre, soddisfare le condizioni di continuità sulla superficie sferica $r = r_0$

$$\begin{aligned} (\varphi(\vec{k}, \vec{x}))_i &= (\varphi(\vec{k}, \vec{x}))_e & r = r_0 \\ \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \varphi(\vec{k}, \vec{x})}{\partial r} \right)_i &= \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial \varphi(\vec{k}, \vec{x})}{\partial r} \right)_e & r = r_0. \end{aligned} \quad (268)$$

Osserviamo che la scelta delle coordinate sferiche ci ha consentito di assegnare queste condizioni in forma semplice.

Per esprimere $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ in coordinate sferiche, indichiamo con γ l'angolo tra \vec{k} e \vec{x} ed usiamo lo sviluppo

$$e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \gamma) \quad (269)$$

³⁷In effetti si può dimostrare che $p_{2+}(\vec{x}, t)$ non ha fase stazionaria qualunque sia $t < 0$ e per ogni r ma la dimostrazione è molto laboriosa.

dove $P_l(\cos \gamma)$ sono i polinomi di Legendre in $\cos \gamma$. Ricordiamo inoltre che se γ è l'angolo tra due direzioni individuate dalle coordinate sferiche θ_k, ϕ_k e θ, ϕ si ha

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=l}^l Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) Y_l^m(\theta, \phi)$$

(formula di addizione delle funzioni sferiche)

che sostituita nella (269) dà

$$e^{ikr \cos \gamma} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^l i^l j_l(kr) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (270)$$

Poichè $g_+(\vec{k}, \vec{x})$ è una soluzione dell'equazione di Helmholtz che soddisfa le condizioni di radiazione (239) può essere rappresentata dallo sviluppo (261)

$$g_+(\vec{k}, \vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\vec{k}) h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (r > r_0) \quad (271)$$

dove è stata indicata esplicitamente la dipendenza dai parametri \vec{k} .

Nella regione Ω_i , $\varphi(\vec{k}, \vec{x})$ deve coincidere con una soluzione dell'equazione

$$-\nabla^2 f_i(\vec{k}, \vec{x}) = k'^2 f_i(\vec{k}, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_i, \quad \text{con } k'^2 = \frac{\omega^2}{a_i^2} = \frac{a^2 k^2}{a_i^2}$$

per la quale si può usare lo sviluppo (258)

$$f_i(\vec{k}, \vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm}(\vec{k}) j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi), \quad r < r_0 \quad (272)$$

le serie (270), (271) e (272) sono assolutamente ed uniformemente convergenti (rispettivamente la prima e la terza per ogni r , la seconda solo per $r > 0$). Pertanto

$$\varphi(\vec{k}, \vec{x}) = \begin{cases} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + g_+(\vec{k}, \vec{x}) & |\vec{x}| > r_0 \\ f_i(\vec{k}, \vec{x}) & |\vec{x}| < r_0 \end{cases} \quad (273)$$

è rappresentata in coordinate sferiche dagli sviluppi (270), (271) e (272). Le condizioni (268) fanno comparire le derivate $\partial\varphi/\partial r$ che dobbiamo esprimere come serie nelle $Y_l^m(\theta, \phi)$.

Per i coefficienti di Fourier di $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \phi)$ con $u(r, \theta, \phi) \in C^2(R \times S^2)$ o a $C^2((R - O) \times S^2)$ si ha

$$\int Y_l^{m*}(\theta, \phi) \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial r} \int Y_l^{m*}(\theta, \phi) u(r, \theta, \phi)$$

poichè l'integrale è esteso alla regione limitata $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Poichè i coefficienti di Fourier di

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad , \quad g_+(\vec{k}, \vec{x}) \quad , \quad f_i(\vec{k}, \vec{x})$$

sono rispettivamente

$$4\pi i^l j_l(kr) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) \quad , \quad a_{lm}(\vec{k}) h_l^{(1)}(kr) \quad , \quad j_l(akr/a_i)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} \widetilde{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}} \right)_{lm} &= 4\pi i^l \frac{d}{dr} j_l(kr) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) = \\ &= 4\pi i^l k j_l'(kr) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} \widetilde{g_+(\vec{k}, \vec{x})} \right)_{lm} &= a_{lm} k h_l'^{(1)}(kr) \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} \widetilde{f_i(\vec{k}, \vec{x})} \right)_{lm} &= b_{lm} \frac{a}{a_i} k j_l'(kr). \end{aligned}$$

Poichè le serie in $Y_l^m(\theta, \phi)$ delle funzioni che compaiono nelle (268) convergono per $r = r_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [4\pi i^l j_l(kr_0) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) + a_{lm}(\vec{k}) h_l^{(1)}(kr_0)] Y_l^m(\theta, \phi) \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm}(\vec{k}) j_l\left(\frac{a}{a_i} kr_0\right) Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k [4\pi i^l j_l'(kr_0) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) + a_{lm}(\vec{k}) h_l'^{(1)}(kr_0)] Y_l^m(\theta, \phi) \\ = \frac{\rho_e}{\rho_i} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm}(\vec{k}) \frac{a}{a_i} k j_l'\left(\frac{a}{a_i} kr_0\right) Y_l^m(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (275)$$

Poichè le (274) e le (275) devono valere per ogni θ e ϕ esse sono soddisfatte se e solo se i coefficienti delle $Y_l^m(\theta, \phi)$ al primo e al secondo membro sono uguali. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} b_{lm}(\vec{k}) j_l\left(\frac{a}{a_i} kr_0\right) - a_{lm}(\vec{k}) h_l^{(1)}(kr_0) &= 4\pi i^l j_l(kr_0) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) \\ \frac{\rho_e a}{\rho_i a_i} k b_{lm}(\vec{k}) j_l'\left(\frac{a}{a_i} kr_0\right) - a_{lm}(\vec{k}) k h_l'^{(1)}(kr_0) &= \\ 4\pi i^l k j_l'(kr_0) Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k) & \end{aligned} \quad (276)$$

che permettono di determinare le incognite $a_{lm}(\vec{k})$ e $b_{lm}(\vec{k})$.

Poichè ambedue i termini noti sono proporzionali a $Y_l^{m*}(\theta_k \phi_k)$ si ha che

$$\begin{aligned} a_{lm}(\vec{k}) &= \alpha_{lm}(k) Y_l^{m*}(\theta_k \phi_k) \\ b_{lm}(\vec{k}) &= \beta_{lm}(k) Y_l^{m*}(\theta_k \phi_k) \end{aligned} \quad (277)$$

ed $\alpha_{lm}(k)$ e $\beta_{lm}(k)$ sono determinati dalle equazioni che si ottengono sostituendo le (277) nelle (276) e dividendo per $Y_l^{m*}(\theta_k \phi_k)$.

Avendo determinato $g_+(\vec{k}, \vec{x})$ esaminiamo il comportamento di $p(\vec{x}, t)$ per $t \gg 0$ e per $\vec{x} \in \Omega_{est}$. il termine

$$p_1(\vec{x}, t) = \int |A(\vec{k})| (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - akt + \alpha(\vec{k}))}) d^3k + \text{c.c.}$$

è apprezzabilmente diverso da zero solo in una regione V_t nell'intorno del punto di fase stazionaria

$$\vec{x}_s = a \frac{\vec{k}}{\kappa} t - \left(\nabla_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}}$$

che si muove lungo la medesima traiettoria che aveva a $t \ll 0$.

Il termine $p_1(\vec{x}, t)$ descrive la propagazione dell'onda incidente nel caso che tutto lo spazio fosse occupato dal materiale che si trova all'esterno della sfera di raggio r_0 . L'altro termine

$$\begin{aligned} p_2(\vec{x}, t) &= \frac{1}{r} \int d\Omega_k |A(\vec{k})| |f_+(\theta, \phi, \vec{k})| e^{i(k(r-at) + \alpha(\vec{k}) + \psi(\vec{k}, \theta, \phi))} k^2 dk + \\ &+ \text{complesso coniugato.} \end{aligned}$$

è localizzato attorno al punto di fase stazionaria

$$r_+ = at - \left(\frac{d\alpha(\vec{k})}{dk} \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}} - \left(\frac{d\psi(\vec{k}, \theta, \phi)}{dk} \right)_{\vec{k}=\vec{\kappa}}$$

Pertanto $p_2(\vec{x}, t)$ può essere apprezzabilmente diverso da zero in una corona sferica nell'intorno della sfera di raggio at . Convenzionalmente $p_2(\vec{x}, t)$ viene, talvolta, designata come onda diffusa dal materiale contenuto nella sfera di raggio r_0 , perchè è diversa da zero solo in presenza del materiale. In effetti l'onda diffusa, cioè l'onda presente in Ω_{est} per t sufficientemente grande è uguale a $p_2(\vec{x}, t)$ solo nella zona in cui $p_1(\vec{x}, t)$ è trascurabile, mentre nell'intorno del punto $\vec{x}_s(t)$, $p_1(\vec{x}, t)$ si somma costruttivamente o distruttivamente a $p_2(\vec{x}, t)$.

APPENDICE 1

Teorema

Se $f(\vec{x})$ di x_1, x_2, \dots, x_N è C^m le funzioni

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_N^{r_N}}(\vec{x}^0 + \vec{\xi}(\vec{x}))$$

che compaiono nel resto m -esimo della formula di Taylor con punto iniziale \vec{x}^0 sono funzioni C^{n-m} delle variabili x_1, \dots, x_N ($m = r_1 + r_2 + \dots + r_N, m \leq n$), $\vec{\xi}(\vec{x})$ punto interno al segmento che congiunge il punto \vec{x}^0 e il punto \vec{x} .

Dimostrazione

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) &= \int_0^1 \frac{df}{dt} \left((\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) dt = \\ &= \sum_i (x_i - x_i^0) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \left((\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) dt \end{aligned} \quad (1)$$

Pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \left((\vec{x}^0 + \vec{\xi}(\vec{x})) \right) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \left((\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) dt \quad (2)$$

Il secondo membro è l'integrale su un intervallo finito della derivata parziale prima di una funzione C^n e quindi è una funzione C^{n-1} di x_1, \dots, x_N .

Definiamo

$$F_i(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \left((\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) dt \quad (3)$$

e quindi

$$F_i(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}^0) \quad (4)$$

Usiamo per $F_i(\vec{x})$ la stessa identità utilizzata per $f(t)$

$$\begin{aligned} F_i(\vec{x}) - F_i(\vec{x}^0) &= \int_0^1 \frac{dF_i}{du} \left((\vec{x}^0 + u(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) du = \\ &= \sum_j (x_j - x_j^0) \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \left((\vec{x}^0 + u(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) du \end{aligned} \quad (5)$$

Dalla (3) abbiamo che

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_i} \left((\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \right) dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (\vec{x}^0 + u(\vec{x} - \vec{x}^0)) = \\ & \int_0^1 \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + t(\vec{x}^0 + u(\vec{x} - \vec{x}^0) - \vec{x}^0)) t dt = \\ & = \int_0^1 \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + ut(\vec{x} - \vec{x}^0)) t dt \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (\vec{x}^0 + u(\vec{x} - \vec{x}^0)) du = \\ & = \int_0^1 du \int_0^1 \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + ut(\vec{x} - \vec{x}^0)) t dt \end{aligned}$$

Eseguendo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} s = tu \\ t = t \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \left| \frac{\partial(t,u)}{\partial(t,s)} \right| = \frac{1}{t}$$

cioè $t dt du = ds dt$, otteniamo

$$\int_0^1 du \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (\vec{x}^0 + u(\vec{x} - \vec{x}^0)) = \int_0^1 ds \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + s(\vec{x} - \vec{x}^0)) \int_{t_1(s)}^{t_2(s)} dt \quad (6)$$

Poichè per fissato \bar{s} , cioè lungo l'iperbole equilatera $ut = \bar{s}$, si ha che $\bar{s} \leq t \leq 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} & \int_0^1 ds \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + s(\vec{x} - \vec{x}^0)) \int_s^1 dt = \\ & = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + s(\vec{x} - \vec{x}^0)) (1 - s) ds \end{aligned}$$

Sostituendo nel secondo membro della (2) la definizione (3) di $F_i(\vec{x})$ ed il suo valore calcolato con la (5), utilizzando la (4) e la (6), otteniamo

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \sum_i (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) + \\ + \sum_{ij} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + s(\vec{x} - \vec{x}^0)) (1-s) ds.$$

Pertanto

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + \vec{\xi}(\vec{x})) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + s(\vec{x} - \vec{x}^0)) (1-s) ds.$$

Il secondo membro è l'integrale su un intervallo finito della derivata parziale seconda di una funzione C^n e quindi è una funzione C^{n-2} di x_1, \dots, x_N .

Definendo

$$F_{ij}(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{x}^0 + s(\vec{x} - \vec{x}^0)) (1-s) ds.$$

e quindi

$$F_{ij}(\vec{x}^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}^0) \int_0^1 (1-s) ds = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}^0)$$

ed usando

$$F_{ij}(\vec{x}) - F_{ij}(\vec{x}^0) = \int_0^1 \frac{dF_{ij}}{dv} (\vec{x}^0 + v(\vec{x} - \vec{x}^0)) dv = \\ = \sum_k (x_k - x_k^0) \int_0^1 \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} (\vec{x}^0 + v(\vec{x} - \vec{x}^0)) dv$$

abbiamo

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \sum_i (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{ij} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}^0) + \\ + \sum_{ijk} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) \int_0^1 \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} (\vec{x}^0 + v(\vec{x} - \vec{x}^0)) dv$$

e l'integrale nell'ultimo termine è per quanto detto una funzione C^{n-3} di x_1, \dots, x_N .

APPENDICE 2

Se $u(\vec{x}, t)$ soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

allora

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3 x = 0$$

per $u(\vec{x}, t)$ a decrescenza rapida assieme alle sue derivate.

Infatti ³⁸

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3 x = \\ & = \int \left(\frac{2}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u \right) d^3 x = \\ & = 2 \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \nabla^2 u \right) d^3 x + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} dS = 0. \end{aligned}$$

L'integrale di volume è nullo perchè u soddisfa la (1) e l'integrale di superficie va a zero per funzioni a decrescenza rapida.

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \tilde{g}(\vec{k}) d^3 k + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \tilde{g}^*(\vec{k}) d^3 k$$

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) + g^*(\vec{x}, t) \quad ; \quad g(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{g}(\vec{k}, t) d^3 k$$

$$\tilde{g}(\vec{k}, t) = \tilde{g}(\vec{k}) e^{-i\omega t}$$

$$\omega = vk \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = -i\omega \tilde{g}(\vec{k}, t) \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i} = ik_i \tilde{g}(\vec{k}, t)$$

$$\int \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3 x =$$

38

$$\int_{S_V} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} dS = \int_V \operatorname{div} \left(\nabla u \frac{\partial u}{\partial t} \right) d^3 x = \int_V \left(\nabla^2 u \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) d^3 x$$

$$= \int \frac{1}{v^2} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g^*}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g^*}{\partial t} \right) d^3x +$$

$$\int \left((\nabla g)^2 + (\nabla g^*)^2 + 2 \nabla g \cdot \nabla g^* \right) d^3x.$$

Cominciamo a calcolare i termini sottolineati. Vedremo che la loro somma è zero.

$$\frac{1}{v^2} \int \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 d^3x = \frac{1}{v^2} \int \left(\frac{\partial g^*}{\partial t} \right)^* \frac{\partial g}{\partial t} d^3x =$$

$$= -\frac{1}{v^2} \int \omega^2 \tilde{g}(-\vec{k}, t) \tilde{g}(\vec{k}, t) d^3k = -\int k^2 \tilde{g}(-\vec{k}, t) \tilde{g}(\vec{k}, t) d^3k$$

per l'eguaglianza di Parseval e perchè

$$g^*(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{g}^*(\vec{k}, t) d^3k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) d^3k$$

cioè

$$g^*(\vec{x}, t) = \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \text{ e quindi } \frac{\partial \tilde{g}^*}{\partial t} = i\omega \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \quad (2)$$

e quindi

$$\frac{1}{v^2} \int \left(\frac{\partial g^*}{\partial t} \right)^2 d^3x = -\int k^2 \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \tilde{g}^*(\vec{k}, t) d^3k$$

Analogamente poichè

$$\left(\frac{\partial \tilde{g}^*}{\partial x_i} \right) = ik_i \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \quad (3)$$

$$\int (\nabla g)^2 d^3x = \int (\nabla g^*)^* \nabla g d^3x = \int k^2 \tilde{g}(-\vec{k}, t) \tilde{g}(\vec{k}, t) d^3k$$

$$\int (\nabla g^*)^2 d^3x = \int k^2 \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \tilde{g}^*(\vec{k}, t) d^3k$$

pertanto la somma dei quattro termini sottolineati è zero.

Poichè, sempre per Parseval,

$$\frac{2}{v^2} \int \frac{\partial g^*}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} d^3x = \frac{2}{v^2} \int \omega^2 |\tilde{g}(\vec{k}, t)|^2 d^3k = 2 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 d^3k$$

$$2 \int \nabla g^* \cdot \nabla g d^3x = 2 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k}, t)|^2 d^3k = 2 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 d^3k$$

segue che

$$\int \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3x = 4 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 d^3k.$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} & \int x_i \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3x = \\ &= \int x_i \left[\frac{1}{v^2} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g^*}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g^*}{\partial t} \right) d^3x + \right. \\ & \quad \left. + \int \left((\nabla g)^2 + (\nabla g^*)^2 + 2 \nabla g \cdot \nabla g^* \right) d^3x \right] d^3x. \end{aligned}$$

Cominciamo a calcolare i termini sottolineati la cui somma risulterà zero.

Ricordiamo che

$$\left(x_i \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial}{\partial k_i} (k_j \tilde{g}(\vec{k}, t)) \quad , \quad \left(x_i \frac{\partial g^*}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial k_i} (\omega \tilde{g}(\vec{k}, t))$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \int x_i \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 d^3x = \frac{1}{v^2} \int \left(\frac{\partial g^*}{\partial t} \right)^* x_i \frac{\partial g}{\partial t} d^3x = \\ &= - \frac{i}{v^2} \int \omega \tilde{g}(-\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} (\omega \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3k = \\ &= -i \int k \tilde{g}(-\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} (k \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3k = \\ &= -i \int \left(k^2 \tilde{g}(-\vec{k}, t) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_i}(\vec{k}, t) + k_i \tilde{g}(-\vec{k}, t) \tilde{g}(\vec{k}, t) \right) d^3k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \int x_i \left(\frac{\partial g^*}{\partial t} \right)^2 d^3x = \\ &= i \int \left(k^2 \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \frac{\partial \tilde{g}^*}{\partial k_i}(\vec{k}, t) + k_i \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \right) d^3k \end{aligned}$$

$$\int x_i (\nabla g)^2 d^3x = \int \sum_j \left(\frac{\partial g^*}{\partial x_j} \right)^* x_i \frac{\partial g^*}{\partial x_j} d^3x =$$

$$\begin{aligned}
&= i \int \sum_j k_j \tilde{g}(-\vec{k}, t) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_i}(k_j(\vec{k}, t)) d^3 k = \\
&= i \int \left(k^2 \tilde{g}(-\vec{k}, t) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_i}(\vec{k}, t) + k_i \tilde{g}(-\vec{k}, t) \tilde{g}(\vec{k}, t) \right) d^3 k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int x_i (\nabla g^*)^2 d^3 x = \\
&= -i \int \left(k^2 \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \frac{\partial \tilde{g}^*}{\partial k_i}(\vec{k}, t) + k_i \tilde{g}^*(-\vec{k}, t) \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \right) d^3 k.
\end{aligned}$$

La somma dei quattro termini è quindi zero.

Calcoliamo ora i restanti due termini ³⁹

$$\begin{aligned}
\frac{2}{v^2} \int \frac{\partial g^*}{\partial t} x_i \frac{\partial g}{\partial t} d^3 x &= \frac{2i}{v^2} \int \omega \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} (\omega \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3 k = \\
&= 2i \int k \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} (k \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3 k = \\
&= 2i \int \left(k_i |\tilde{g}(\vec{k}, t)|^2 + k^2 \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} (k \tilde{g}(\vec{k}, t)) \right) d^3 k = \\
&= 2i \int \left(k_i |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} |\tilde{g}(\vec{k})| \right) d^3 k + \\
&\quad + 2 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} t - \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right) d^3 k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \int \nabla g^* \cdot \nabla g d^3 x &= 2 \int \sum_j \frac{\partial g^*}{\partial x_j} x_i \frac{\partial g}{\partial x_j} d^3 x = \\
&= 2i \int \sum_j k_j \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} (k_j \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3 k = \\
&= 2i \int \left(k_i |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + k^2 \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial}{\partial k_i} \tilde{g}(\vec{k}, t) \right) d^3 k = \\
&= 2i \int \left(k_i |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} |\tilde{g}(\vec{k})| \right) d^3 k +
\end{aligned}$$

³⁹Ricordiamo che

$$\tilde{g}(\vec{k}, t) = |\tilde{g}(\vec{k})| e^{-i\omega t + i\varphi(\vec{k})} \quad \tilde{g}^*(\vec{k}) = |\tilde{g}(\vec{k})| e^{i\varphi(\vec{k})}$$

$$+2 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} t - \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right) d^3 k$$

Pertanto abbiamo che

$$\begin{aligned} & \int x_i \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3 x = \\ & = 4i \int \left(k_i |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} |\tilde{g}(\vec{k})| \right) d^3 k + \\ & + 4 \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} t - \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right) d^3 k \end{aligned}$$

Il secondo integrale al secondo membro è zero. Infatti, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} & \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} |\tilde{g}(\vec{k})| d^3 k = \\ & - \int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} |\tilde{g}(\vec{k})| d^3 k - 2 \int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 k_i d^3 k \end{aligned}$$

ossia

$$\int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} |\tilde{g}(\vec{k})| d^3 k = - \int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 k_i d^3 k$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \langle x_i \rangle &= \frac{\int x_i \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3 x}{\int \left(\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u)^2 \right) d^3 x} = \\ &= \frac{\int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \frac{\partial \omega}{\partial k_i} k^2 d^3 k}{\int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 k^2 d^3 k} t - \frac{\int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} k^2 d^3 k}{\int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 k^2 d^3 k} . \\ \langle x_i \rangle &= \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right\rangle t - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right\rangle \end{aligned}$$

L'estensione spaziale del gruppo d'onde descritto da $\tilde{g}(\vec{k})$ può essere valutata calcolando

$$\langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 .$$

A questo fine osserviamo che

$$\left(\widetilde{x_i^2 g} \right) = - \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial k_i^2} , \quad \left(\widetilde{\frac{\partial g}{\partial t}} \right) = -i\omega \tilde{g} , \quad \left(\widetilde{\frac{\partial g}{\partial x_j}} \right) = ik_j \tilde{g}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x_i^2 \frac{\partial g}{\partial t} \right) = i \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} (\omega \tilde{g}) \quad , \quad \left(x_i^2 \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = -i \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} (k_j \tilde{g}) \\
& \frac{2}{v^2} \int \frac{\partial g^*}{\partial t} x_i^2 \frac{\partial g}{\partial t} d^3x = -\frac{2}{v^2} \int \omega \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} (\omega \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3k = \\
& -\frac{2}{v^2} \int \left[\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2} |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + 2\omega \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_i}(\vec{k}, t) + \right. \\
& \quad \left. + \omega^2 \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial k_i^2}(\vec{k}, t) \right] d^3k = \\
& = -2 \int \left\{ \left(1 - \frac{k_i^2}{k^2} \right) |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + 2k_i \left[|\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial |\tilde{g}|}{\partial k_i} + i |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) \right] + k^2 |\tilde{g}(\vec{k})| \left[\frac{\partial^2 |\tilde{g}|}{\partial k_i^2} - |\tilde{g}(\vec{k})| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. \left. + i \left(2 \frac{\partial |\tilde{g}|}{\partial k_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) + |\tilde{g}(\vec{k})| \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_i^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2} t \right) \right) \right] \right\} d^3k = \\
& -2 \int \left\{ \left(1 - \frac{k_i^2}{k^2} \right) |\tilde{g}(\vec{k})|^2 + |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} \left(k^2 \frac{\partial |\tilde{g}|}{\partial k_i} \right) + \right. \\
& \quad \left. - k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right)^2 + i \frac{\partial}{\partial k_i} \left[k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) \right] \right\} d^3k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_i}(\vec{k}, t) = \frac{\partial}{\partial k_i} (|\tilde{g}(\vec{k})| e^{-i\omega t + i\varphi}) = \\
& = e^{-i\omega t + i\varphi} \frac{\partial |\tilde{g}|}{\partial k_i} + i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) |\tilde{g}(\vec{k})| e^{-i\omega t + i\varphi} \\
& \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} (\tilde{g}(\vec{k}) e^{-i\omega t + i\varphi}) = \left\{ \frac{\partial^2 |\tilde{g}|}{\partial k_i^2} + 2i \frac{\partial |\tilde{g}|}{\partial k_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) + \right. \\
& \quad \left. - |\tilde{g}(\vec{k})| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right)^2 + |\tilde{g}(\vec{k})| i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_i^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2} t \right) \right\} e^{-i\omega t + i\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \int \nabla g^* \nabla g x_i^2 d^3x = -2 \sum_j \int k_j \tilde{g}^*(\vec{k}, t) \frac{\partial^2}{\partial k_i^2} (k_j \tilde{g}(\vec{k}, t)) d^3k = \\
& = -2 \sum_j \int \left[|\tilde{g}(\vec{k})|^2 k_j \frac{\partial^2 k_j}{\partial k_i^2} + 2\tilde{g}^*(\vec{k}, t) k_j \frac{\partial k_j}{\partial k_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial k_i}(\vec{k}, t) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{g}^*(\vec{k}, t) k_j^2 \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial k_i^2}(\vec{k}, t) \Big] d^3 k = \\
& = -2 \int \left[2 |\tilde{g}(\vec{k})| k_i \frac{\partial |\tilde{g}(\vec{k})|}{\partial k_i} + 2 i k_i |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{g}^*(\vec{k}, t) k^2 \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial k_i^2}(\vec{k}, t) \right] d^3 k = \\
& = -2 \int \left[|\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} \left(k^2 \frac{\partial |\tilde{g}(\vec{k})|}{\partial k_i} \right) - k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + i \frac{\partial}{\partial k_i} \left(k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) \right) \right] d^3 k
\end{aligned}$$

Notiamo che

$$\int \frac{\partial}{\partial k_i} \left(k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right) \right) d^3 k = 0$$

perchè $|\tilde{g}(\vec{k})|$ va a zero rapidamente all'infinito.

Inoltre

$$\begin{aligned}
\int |\tilde{g}(\vec{k})| \frac{\partial}{\partial k_i} \left(k^2 \frac{\partial |\tilde{g}(\vec{k})|}{\partial k_i} \right) d^3 k &= - \int k^2 \left(\frac{\partial |\tilde{g}(\vec{k})|}{\partial k_i} \right)^2 d^3 k \\
\left(1 - \frac{k_i^2}{k^2} \right) &= k \frac{\partial^2 k}{\partial k_i^2}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\langle x_i^2 \rangle &= \frac{\int \left[k^2 \left(\frac{\partial |\tilde{g}(\vec{k})|}{\partial k_i} \right)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{g}(\vec{k})|^2 k \frac{\partial^2 k}{\partial k_i^2} \right] d^3 k}{\int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 d^3 k} + \\
&+ \frac{\int |\tilde{g}(\vec{k})|^2 k^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} - \frac{\partial \omega}{\partial k_i} t \right)^2 d^3 k}{\int k^2 |\tilde{g}(\vec{k})|^2 d^3 k}.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
\langle x_i^2 \rangle &= \langle x_i^2 \rangle_{t=0} - 2t \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right\rangle + t^2 \left\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)^2 \right\rangle \\
\langle x_i \rangle^2 &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right\rangle^2 + 2t \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right\rangle \left\langle -\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right\rangle + t^2 \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right\rangle^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 &= (\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2)_{t=0} + \\ + 2t &\left(\left\langle \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial k_i} \right) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right\rangle \langle x_i \rangle_{t=0} \right) + \\ + t^2 &\left(\left\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right\rangle^2 \right). \end{aligned}$$