

ESTREMI DI UN INSIEME NUMERICO

MINIMO e MASSIMO DI UN INSIEME

All'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali appartiene un numero, $\mathbf{1}$, che è minore o uguale di tutti i numeri di \mathbf{N} : $\mathbf{1} \leq n \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Per esprimere questo fatto abbiamo chiamato $\mathbf{1}$ il più piccolo elemento di \mathbf{N} o **minimo** di \mathbf{N} e scritto: $\mathbf{1} = \min N$ o $\mathbf{1} = \min_{n \in N} n$ ($\mathbf{1}$ è il minimo degli n appartenenti a \mathbf{N}).

La definizione di minimo di un insieme si può dare in generale::

Definizione di minimo di un insieme numerico. Siano S un insieme non vuoto di numeri reali ed m un numero reale. Si dice che m è il **minimo** di S , se e solo se m è un elemento di S ed è minore o uguale di ogni elemento di S :

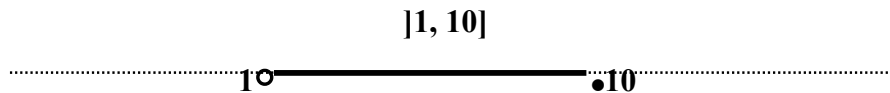
$$m \text{ è il minimo di } S \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1. m \in S \\ 2. m \leq s \quad \forall s \in S \end{cases} \quad (1)$$

Diciamo che m è il **il minimo** (e non un minimo) perché, se esiste, il **minimo è unico**; infatti se m, m' verificano entrambi le proprietà 1. e 2. si ha: $m, m' \in S$, e sia $m \leq m'$ che $m' \leq m$; pertanto è $m = m'$. Per indicare il minimo di un insieme S scriviamo $\min S$ o $\min_{x \in S} x$, quindi se m è il minimo scriviamo: $m = \min S$ o $m = \min_{x \in S} x$.

Esempi. - 2 appartiene all'intervallo $I = [2, 10] = \{x \in \mathbf{R} : 2 \leq x \leq 10\}$, e risulta $2 \leq s$ per ogni $s \in I$; allora 2 è il **minimo** di I e scriviamo: $2 = \min I$ o $2 = \min_{x \in I} x$.



Sia $S = X =]1, 10] = \{x \in \mathbf{R} : 1 < x \leq 10\}$; risulta $1 \leq s$ per ogni $s \in X$, ma 1 non appartiene a S (è infatti $1 < s$ per ogni $s \in X$); quindi 1 **non** è il **minimo** di S . Osserviamo che X non ha minimo



infatti un numero $m \in X$ verifica la disuguaglianza $1 < m$ e ci sono infiniti $x \in X$ tali che $1 < x < m$ (tutti quelli dell'intervallo $]1, m[$) e pertanto m non verifica la condizione 2. dell'equivalenza (1).

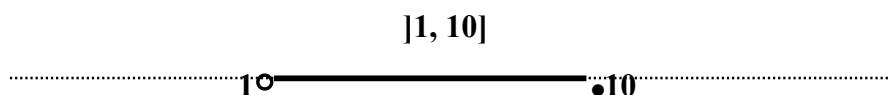
In modo speculare si definisce il concetto di massimo di un insieme.

Definizione di massimo di un insieme numerico. Siano S un insieme non vuoto di numeri reali ed M un numero reale. Si dice che M è il **massimo** di S , se e solo se M è un elemento di S maggiore o uguale di ogni elemento di S :

$$M \text{ è il massimo di } S \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1. M \in S \\ 2. s \leq M \quad \forall s \in S \end{cases} \quad (2)$$

Il **massimo** di S , se esiste, è **unico** e viene indicato con $\max S$ o $\max_{x \in S} x$; quindi, se M è il massimo di S , scriveremo $M = \max S$ o $M = \max_{x \in S} x$.

Ad esempio 10 è **massimo** di $S = X =]1, 10] = \{x \in \mathbf{R} : 1 < x \leq 10\}$, perché 10 verifica le condizioni 1. e 2 dell'equivalenza (2): $10 = \max_{x \in S} x$



MINORANTI E INSIEMI LIMITATI INFERIORMENTE; MAGGIORANTI E INSIEMI LIMITATI SUPERIORMENTE

Consideriamo N come parte dei numeri reali R ; allora non solo è $1 \leq n \quad \forall n \in N$, ma anche $0 \leq n \quad \forall n \in N$, $-1/2 \leq n \quad \forall n \in N$, $-1 \leq n \quad \forall n \in N$ ecc..., cioè $0, -1/2, -1$ e altri numeri condividono con 1 la proprietà di non superare alcun numero di N ; chiameremo tali numeri *minoranti di N* , concordemente con la seguente definizione

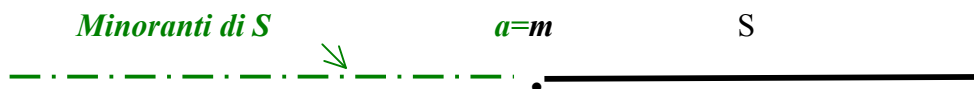
Definizione di minorante di un insieme numerico. Sia S un insieme non vuoto di numeri reali ed a un numero reale. Si dice che a è un **minorante** di S se e solo se $a \leq s \quad \forall s \in S$:

$$a \text{ è un minorante di } S \stackrel{\text{def}}{\iff} a \leq s \quad \forall s \in S \quad (2)$$

..... a S

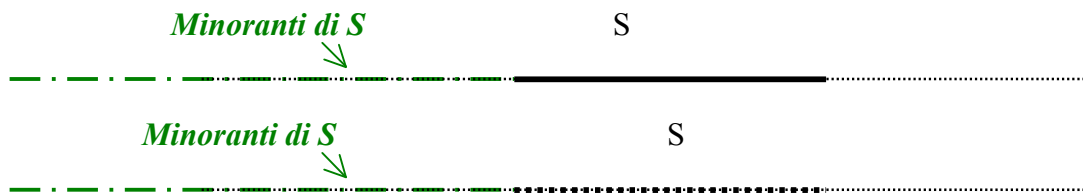
Dal confronto tra le definizioni di minorante e di minimo deduciamo:

“il minimo m di S è un un minorante di S che appartiene a S ”

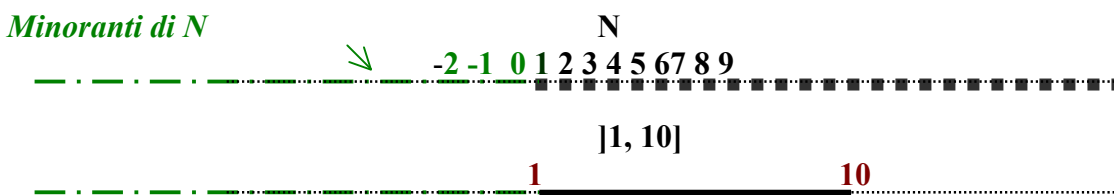


Ovviamente, se a è un minorante non appartenente a S possiamo specificare che è: $a < s \quad \forall s \in S$.

Se a è un minorante di S ogni numero minore di a è a sua volta un minorante di S ; quindi se S è ha un minorante ne ha infiniti: si può dimostrare che essi formano un *intervallo* di R



Ad esempio l'intervallo $]-\infty, 1]$ è l'insieme dei minoranti di N e anche l'insieme dei minoranti dell'intervallo $[1, 10]$



Non tutti gli insiemi numerici sono dotati di minoranti; infatti per l'insieme Z degli interi realtivi risulta impossibile trovare un numero reale a che venga prima di tutti i numeri di Z .



Per indicare che un insieme S è dotato di minoranti diremo che S è *inferiormente limitato*.

Definizione d'insieme numerico limitato inferiormente. Un insieme non vuoto di numeri reali S è detto *limitato inferiormente* (o *inferiormente limitato*) se e solo se è dotato di minoranti

$$S \text{ è limitato inferiormente} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R}: a \leq s \quad \forall s \in S \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}: S \subseteq [a, +\infty[$$

In modo speculare si definiscono i concetti di maggiorante di un insieme e il concetto di insieme limitato superiormente

Definizione di maggiorante di un insieme numerico. Sia S un insieme non vuoto di numeri reali e b un numero reale. Si dice che b è un *maggiorante di S* , se e solo se b è *S* maggiore o uguale di ogni elemento di S :

$$b \text{ è un maggiorante di } S \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} s \leq b \quad \forall s \in S$$

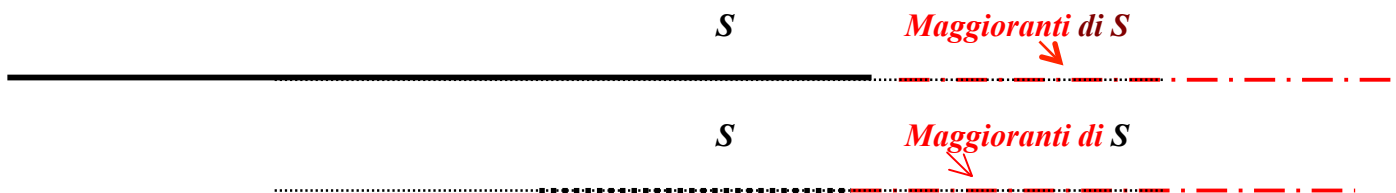


Il massimo M di S , se esiste, è un maggiorante di S appartenente a S .



Ovviamente se b è un maggiorante di S non appartenente a S risulta: $s < b \quad \forall s \in S$

Se S ha maggioranti, l'insieme dei suoi maggioranti è un intervallo di \mathbb{R} .



Definizione d'insieme numerico limitato superiormente. Un insieme non vuoto di numeri reali S è detto *limitato superiormente* se e solo se è dotato di maggioranti

$$S \text{ è limitato superiormente} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b \in \mathbb{R}: s \leq b \quad \forall s \in S \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}: S \subseteq]-\infty, b]$$

Infine

Definizione di insieme numerico limitato. Un insieme non vuoto di numeri reali S è detto *limitato* se è limitato inferiormente e superiormente, cioè se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R}: a \leq s \leq b \quad \forall s \in S$$



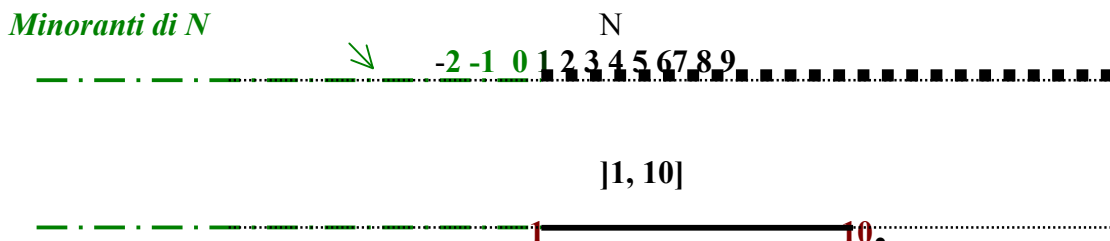
allora

S è limitato \Leftrightarrow esiste un intervallo chiuso limitato $[a, b]$ che include S

ESTREMO INFERIORE ED ESTREMO SUPERIORE DI UN INSIEME NUMERICO

ESTREMO INFERIORE DI UN INSIEME INFERIORMENTE LIMITATO

Osserviamo che N e l'intervallo $X =]1, 10]$ hanno lo stesso insieme dei minoranti, l'intervallo $]-\infty, 1]$ ma **1** è il minimo di N mentre X non ha minimo.



Tuttavia **1** gioca lo stesso ruolo per i due insiemi che può essere individuato in uno dei seguenti modi:

- **1** è l'unico elemento di separazione tra l'insieme e l'insieme dei suoi minoranti;
- **1** è il massimo dei minoranti.

Che cosa accade in generale per un insieme inferiormente limitato S ? Esiste per esso un numero reale che ha lo stesso ruolo che **1** ha per l'insieme N e l'insieme $]1, 10]$?

La risposta è sì ed è nel seguente teorema alla base della cui dimostrazione c'è l'assioma di completezza dei numeri reali.

Teorema 1. *Sia S un insieme non vuoto inferiormente limitato. Allora esiste il massimo dell'insieme dei minoranti.*

Dim. Sia A l'insieme dei minoranti di S : $A = \{a \in \mathbb{R} : a \leq s \quad \forall s \in S\}$. A e S sono parti separate di \mathbb{R} perchè risulta:

$$a \leq s \quad \forall a \in A \text{ e } \forall s \in S.$$

Per l'assioma di completezza dei numeri reali esiste un elemento c di separazione di A e S , tale cioè che :

$$a \leq c \leq s \quad \forall a \in A \text{ e } \forall s \in S. \quad (3)$$

poiché $c \leq s \quad \forall s \in S$, c risulta essere un minorante di S , quindi

$$1) \quad c \in A;$$

d'altra parte, per (3):

$$2) \quad a \leq c \quad \forall a \in A$$

Quindi è **c** il massimo di A e il teorema è dimostrato .

Nota: dalla dimostrazione si evince che un elemento di separazione di A (insieme dei minoranti di S) e S è necessariamente il massimo dell'insieme dei minoranti, poiché il massimo è unico allora è **unico** anche l' **elemento di separazione tra i due insiemi**.

Definizione di estremo inferiore di un insieme numerico limitato inferiormente. Sia S un insieme non vuoto di numeri reali S limitato inferiormente. Si definisce **estremo inferiore di S** il **massimo dell'insieme dei minoranti**; esso coincide con l'unico elemento di separazione dell'insieme A dei minoranti di S ed S .

L'estremo inferiore di S s'indica con $\inf S$ o con $\inf_{x \in S} x$: esso coincide con il minimo dell'insieme S se e solo se appartiene a S .

Quindi : $1 = \inf N = \min N$ e $1 = \inf]1, 10]$.

ESTREMO INFERIORE DI UN INSIEME NON INFERIORMENTE LIMITATO.

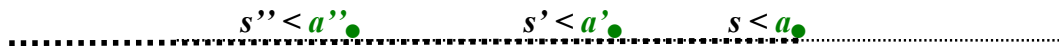
S non è limitato inferiormente se nessun numero reale è un minorante di S . Poiché dalla definizione di minorante (cfr. (2)) segue che

$$a \text{ non è un minorante di } S \Leftrightarrow \exists s \in S: s < a,$$



deduciamo che

S non è limitato inferiormente (cioè non ha minoranti) $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} \exists s \in S: s < a$.



In altre parole, comunque ci spostiamo a sinistra sulla retta dei numeri reali troviamo sempre un numero s di S (allora, in $\hat{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $-\infty$ è l'unico elemento che precede gli elementi S). In tal caso si parla di estremo inferiore di S ponendolo convenzionalmente uguale a $-\infty$

$$-\infty = \inf S \quad \text{o} \quad -\infty = \inf_{x \in S} x.$$

Pertanto il significato delle suindicate uguaglianze è dato dall'equivalenza seguente:

$$-\infty = \inf S \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} \exists s \in S: s < a$$

Risulta ad esempio :

$$-\infty = \inf Z \quad \text{e} \quad -\infty = \inf \mathbb{R}.$$

Nota. La frase " $\forall a \in \mathbb{R} \exists s \in S: s < a$ " asserisce che "ad ogni intorno $]-\infty, a[$ di $-\infty$ appartiene almeno un punto di S (ovviamente diverso da $-\infty$) e cioè che " $-\infty$ è punto di accumulazione per S "

$$\alpha = \inf S \Leftrightarrow \alpha \text{ è punto di accumulazione per } S$$

ESTREMO SUPERIORE DI UN INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO

Teorema 2. *Sia S un insieme non vuoto superiormente limitato. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti.*

Se S è superiormente limitato, **il minimo dei maggioranti di S è anche l'unico elemento di separazione tra tale insieme ed S.**

Definizione di estremo superiore di un insieme numerico superiormente limitato. *Sia S un insieme non vuoto di numeri reali S limitato superiormente. Si definisce estremo superiore di S il minimo dell'insieme dei maggioranti.*

L'estremo superiore di S si indica con $\sup S$ o con $\sup_{x \in S} x$: esso coincide con il massimo dell'insieme S se e solo se appartiene a S.

Risulta ad esempio:

$$10 = \sup]1, 10[\quad \text{e} \quad 10 = \sup]1, 10] = \max]1, 10].$$

ESTREMO SUPERIORE DI UN INSIEME NON SUPERIORMENTE LIMITATO

Un insieme S non è limitato superiormente se non ha maggioranti. Poichè

$$b \text{ non è un maggiorante di } S \Leftrightarrow \exists s \in S: b < s$$

si ha: 

S non è limitato superiormente (cioè non ha maggioranti) $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R} \exists s \in S: b < s$



In altre parole, comunque ci spostiamo a destra sulla retta dei numeri reali troviamo sempre un numero s di S (allora, in $\hat{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $+\infty$ è l'unico elemento che segue gli elementi S). Anche in tal caso si parlerà di estremo superiore di S ponendolo convenzionalmente uguale a $+\infty$

$$+\infty = \sup S \quad \text{o} \quad +\infty = \sup_{x \in S} x.$$

Pertanto il significato delle suindicate uguaglianze è dato dall'equivalenza:

$$+\infty = \sup S \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R} \exists s \in S: b < s.$$

Risulta ad esempio:

$$+\infty = \sup N, \quad +\infty = \sup Z, \quad +\infty = \sup R, \quad +\infty = \sup]0, +\infty[$$

Nota. La frase " $\forall b \in \mathbb{R} \exists s \in S: b < s$ " asserisce che "ad ogni intorno $]b, +\infty[$ di $+\infty$ appartiene almeno un punto di S (ovviamente diverso da $+\infty$) e cioè che " $+\infty$ è punto di accumulazione per S". Allora

$$+\infty = \sup S \Leftrightarrow +\infty \text{ è punto di accumulazione per } S.$$

Esempi conclusivi

L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali è *inferiormente limitato* e l'insieme dei minoranti di \mathbb{N} è l'intervallo $]-\infty, 1]$; il minorante 1 appartiene a \mathbb{N} e quindi 1 è il **minimo di \mathbb{N}**

Minoranti di \mathbb{N}



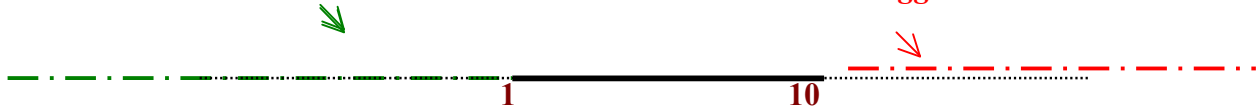
L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali *non è superiormente limitato*.

L'intervallo di \mathbb{R} , $X =]1, 10] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 10\}$, è **limitato sia superiormente che inferiormente** quindi è **limitato**: l'insieme dei suoi minoranti è l'intervallo $]-\infty, 1]$ e l'insieme dei suoi maggioranti è l'intervallo $[10, +\infty[$

Minoranti di X

X

Maggioranti di X



Nessun minorante appartiene a X , quindi X **non ha minimo**; 1 è il massimo dell'insieme dei minoranti e quindi 1 è l'**estremo inferiore di X** : poiché $10 \in X$, 10 è il **massimo di X** :

$$1 = \inf X$$

$$10 = \max X$$

L'intervallo $Y = [1, 10] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 10\}$, è **limitato sia superiormente che inferiormente** quindi è **limitato**: l'insieme dei suoi minoranti è l'intervallo $]-\infty, 1]$ e l'insieme dei suoi maggioranti è l'intervallo $[10, +\infty[$; poiché $1 \in Y$ e $10 \in Y$, 1 è il **minimo di Y** , 10 è il **massimo di Y** .

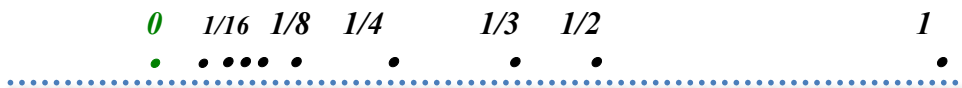
Minoranti di Y

Y

Maggioranti di Y



L'insieme $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots\} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **massimo 1** ed è *inferiormente limitato* da 0 e dai **numeri negativi**; quale numero è l'estremo inferiore di A ?



Dimostriamo che 0 è l'estremo inferiore di A e cioè che è il più grande dei minoranti.

Occorre far vedere che un numero $a > 0$, non è un minorante.

Se, per assurdo, esistesse un numero positivo $a > 0$ minorante di A , si avrebbe $0 < a < 1/n \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi, passando ai reciproci: $n < 1/a \forall n \in \mathbb{N}$; ma ciò non è possibile perché significherebbe che \mathbb{N} è limitato superiormente da $1/a$, il che non è. L'assurdo nasce dall'aver supposto che esiste un numero positivo minorante di A . Tale numero non può esistere ed **l'insieme dei minoranti di A è l'intervallo dei numeri reali $]-\infty, 0]$; perciò**

$$0 = \inf A = \inf_{n \in \mathbb{N}} 1/n$$

RILETTURA DELLE PARTI SEPARATE E PARTI CONTIGUE DI \mathbb{R} ATTRAVERSO IL CONCETTO DI ESTREMO SUPERIORE E DI ESTREMO INFERIORE.

Ricordiamo le seguenti definizioni e l'assioma di continuità di \mathbb{R} .

Definizione di parti separate di \mathbb{R} e di sezione di \mathbb{R} - "Una coppia (A, B) di parti di \mathbb{R} è una coppia di **parti separate** (o più semplicemente A e B sono *parti separate* di \mathbb{R}) se

$$a \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B."$$

Una coppia di parti separate (A, B) è detta **sezione** di \mathbb{R} se $\{A, B\}$ è una partizione di \mathbb{R} .

Definizione di parti contigue di \mathbb{R} "Due parti separate A e B di \mathbb{R} sono **contigue** se e solo se hanno un solo elemento di separazione"

Assioma di continuità o completezza dei numeri reali - Se (A, B) è una coppia di parti separate di \mathbb{R} , esiste almeno un elemento di separazione, cioè un numero c tale che

$$a \leq c \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B;$$

I **teoremi 1 e 2** nel fascicolo "Estremi di un insieme numerico" assicurano che ogni insieme inferiormente limitato è dotato di estremo inferiore (massimo dei minoranti) e che ogni insieme superiormente limitato è dotato di estremo superiore (minimo dei maggioranti) e l'esistenza di tali estremi si dimostra ricorrendo all'assioma di completezza dei numeri reali. In realtà l'esistenza di elementi di separazione per ogni coppia di parti separate e l'esistenza di estremo inferiore e superiore sono fatti equivalenti: infatti si dimostra che ipotizzando l'esistenza del massimo dei minoranti di un insieme o del minimo dei maggioranti di un insieme, si giunge alla conclusione che parti separate di \mathbb{R} devono avere almeno un elemento di separazione

Per ogni coppia (A, B) di parti separate di \mathbb{R} , esiste almeno un elemento di separazione

↕

ogni insieme inferiormente limitato è dotato di estremo inferiore

↕

ogni insieme superiormente limitato è dotato di estremo superiore

Utilizzando il concetto di estremo inferiore e di estremo superiore è facile dimostrare che la condizione di separatezza di A e B equivale alla condizione

$$"sup A \leq inf B"$$

e l'intervallo $[sup A, inf B]$ è l'insieme degli elementi di separazione di A e B .



Pertanto **" A e B sono contigue se e solo se $sup A = inf B$ ".**

Una condizione necessaria e sufficiente a che due parti separate di \mathbb{R} siano contigue è fornita dalla seguente

Proposizione A (sulla caratterizzazione delle parti contigue). "Due parti separate A e B di \mathbb{R} sono contigue se e solo se per ogni scelta di $\epsilon > 0$ esistono due numeri a e b , appartenenti rispettivamente ad A e B , tali che $b - a < \epsilon$ "