

Capitolo 5

Gruppi di omotopia

5.1 Definizioni ed esempi

Sia I^n il prodotto dell'intervallo reale $I = [0, 1]$ per se stesso n volte con $n \geq 1$. I^n è anche detto n -cubo (chiuso). Il bordo di I^n , ovvero la sua frontiera nello spazio euclideo \mathbb{R}^n di appartenenza, sarà indicato con \dot{I}^n .

Per $n = 1$ I^n è l'intervallo I e \dot{I} è costituito dai suoi due estremi.

Per $n = 2$ I^n è un quadrato e \dot{I}^n è il suo perimetro.

Per $n = 3$ I^n è un cubo e \dot{I}^n è la superficie totale, ossia l'insieme delle sei facce di esso.

Sia ora (X, x_0) uno spazio topologico puntato.

Indichiamo con $\Omega_n(X, x_0)$ l'insieme delle funzioni continue di I^n in X che portano \dot{I}^n nel punto x_0 , ovvero le funzioni continue di (I^n, \dot{I}^n) in (X, x_0) .

Se f e g sono due elementi di $\Omega_n(X, x_0)$ un'omotopia di f in g è una omotopia relativa a \dot{I}^n , ovvero una funzione continua $F: I^n \times I \rightarrow X$ tale che

$$F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} f(t_1, \dots, t_n) & \text{se } t = 0 \\ g(t_1, \dots, t_n) & \text{se } t = 1 \\ x_0 & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in \dot{I}^n \end{cases}$$

Diremo che f è omotopa a g se esiste un'omotopia di f in g , scrivendo $f \stackrel{F}{\sim} g$.

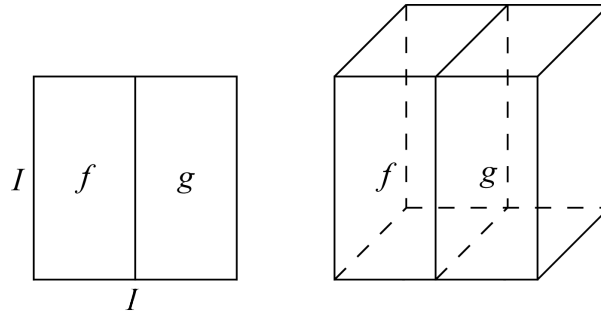
Sappiamo che la relazione di omotopia relativa è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\Omega_n(X, x_0) / \sim$ sarà denotato con $\Pi_n(X, x_0)$. Per $n = 1$ $\Pi_1(X, x_0)$ è il sostegno del gruppo fondamentale costruito nelle pagine precedenti.

Vogliamo costruire una struttura di gruppo per $\Pi_n(X, x_0)$ per ogni n che coincida per $n = 1$ con quella del gruppo fondamentale. Useremo però la notazione additiva.

Per ogni coppia di elementi f e g di $\Omega_n(X, x_0)$, si ponga

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \geq 1/2 \end{cases}$$

Figure per $n = 2$ e $n = 3$:



Si verifichi che $f \sim f', g \sim g' \implies f + g \sim f' + g'$ (la verifica è analoga a quella fatta per il prodotto di cappi quando si è definito il gruppo fondamentale).

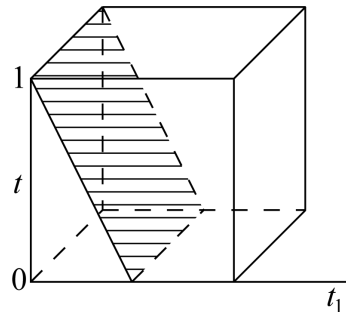
L'operazione di $\Pi_n(X, x_0)$ definita ponendo

$$[f] + [g] = [f + g]$$

è dunque ben posta. Tale operazione ha come elemento neutro la classe dell'applicazione C_{x_0} . Infatti $\forall [f] \in \Pi_n(X, x_0)$ si ha $C_{x_0} + f \sim f$ con omotopia data da

$$F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t_1 \leq \frac{1-t}{2} \\ f\left(\frac{2t_1+t-1}{1+t}, t_2, \dots, t_n\right) & \text{se } t_1 \geq \frac{1-t}{2} \end{cases}$$

Figura per $n = 2$

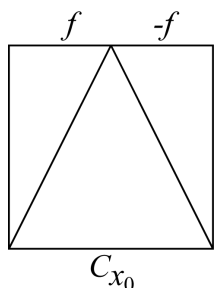


Analogamente si vede che $f + C_{x_0} \sim f$.

L'opposto di $[f]$ è $[-f]$ e $-f$ è data da

$$(-f)(t_1, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Si prova che $f + (-f) \sim C_{x_0}$ con omotopia data da



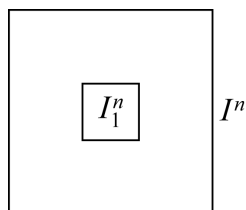
$$F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq t/2 \\ f(t, \dots, t_n) & \text{se } t/2 \leq t_1 \leq (2-t)/2 \\ (-f)(2t_1 - 1, \dots, t_n) & \text{se } (2-t)/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Si prova anche la proprietà associativa e così $\Pi_n(X, x_0)$ è un gruppo, che dicesi *n-simo gruppo di omotopia di X relativo al punto x_0* . Per questo motivo il gruppo fondamentale $\Pi_1(X, x_0)$ si dice anche primo gruppo di omotopia.

Lo studente osservi che i metodi usati e le formule finali sono uguali a quelli ricorrenti nella costruzione del gruppo fondamentale, ossia per il caso $n = 1$, con gli ovvi cambiamenti e lavorando sulla prima coordinata del generico punto (t_1, \dots, t_n) di I^n . Quello che è diverso dal caso $n = 1$ è esposto nel seguente

Teorema 5.1.1. $\Pi_n(X, x_0)$ per $n \geq 2$ è un gruppo abeliano.

Per provarlo osserviamo che se consideriamo un I_1^n represso di deformazione di I^n

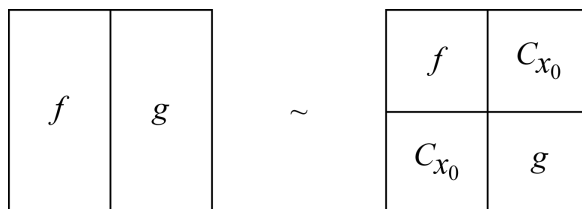


(come ad esempio in figura) con retrazione $r: I^n \rightarrow I_1^n$, allora ogni funzione $f: I^n \rightarrow X$ è omotopa ad una funzione $g: I^n \rightarrow X$ ottenuta come composta al modo seguente

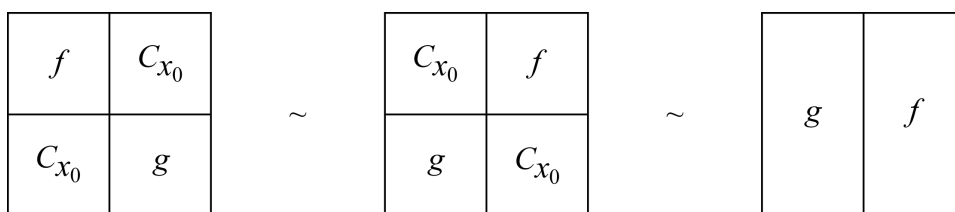
$$I^n \xrightarrow{r} I_1^n \xrightarrow{i} I^n \xrightarrow{f} X$$

g “concentra” la f su I_1^n e in $I^n - I_1^n$ è la funzione costante ad x_0 .

Dimostrazione del teorema 5.1.1. Per ogni coppia $[f], [g]$ di $\Pi_n(X, x_0)$, si ha



ma $f + C_{x_0} \sim C_{x_0} + f$ e $g + C_{x_0} \sim C_{x_0} + g$, e pertanto



Interpretare i disegni. □

L'abelianità di $\Pi_n(X, x_0)$ per $n \geq 2$ giustifica in qualche modo la scelta di usare la notazione additiva per l'operazione di gruppo.

NOTA 1

Ricordiamo che un n -cubo chiuso I^n è omeomorfo ad un n -disco chiuso D^n con un omeomorfismo h che muta \dot{I}^n in $\dot{D}^n = S^{n-1}$. Pertanto ad ogni funzione continua f di (I^n, \dot{I}^n) in (X, x_0) è associata, in maniera biunivoca, una funzione continua \bar{f} di (D^n, S^{n-1}) in (X, x_0) e viceversa:

$$\begin{array}{ccc}
 (I^n, \dot{I}^n) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\
 & \searrow h & \nearrow \bar{f} \\
 & & (D^n, S^{n-1})
 \end{array}$$

È anche vero che se $F: I^n \times I \rightarrow X$ è un'omotopia tra f ed f' relativa a \dot{I}^n , la funzione $F \circ (h^{-1} \times 1_I)$ di $D^n \times I$ in X è un'omotopia tra \bar{f} e \bar{f}' relativa a S^{n-1} .

Viceversa ogni omotopia tra \bar{f} e \bar{f}' ... lo studente è in grado di continuare.

In conclusione l'insieme $\Pi_n(X, x_0)$ può essere anche costruito a partire dalla coppia (D^n, S^{n-1}) invece che dalla coppia (I^n, \dot{I}^n) , però con tale visione è più complicato definire in $\Pi_n(X, x_0)$ l'operazione di gruppo.

NOTA 2

A partire dalla visione di $\Pi_n(X, x_0)$ come classi di omotopia relativa di funzioni di (D^n, S^{n-1}) in (X, x_0) se ne può dare un'altra.

Si ricordi che esiste una funzione continua $p: D^n \rightarrow S^n$ che muta il bordo S^{n-1} di D^n in un punto (diciamo $U = (1, 0, \dots, 0)$) di S^n ed è un omeomorfismo di $D^n - S^{n-1}$ su $S^n - U$. Ciò è dovuto al fatto che S^n si può ottenere come quoziente di D^n identificando ad un punto il chiuso S^{n-1} , bordo di D^n . Allora per ogni funzione continua $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ esiste una funzione continua

$\bar{f}: (S^n, U) \longrightarrow (X, x_0)$ che chiude commutativamente il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\ p \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & (S^n, U) & \end{array}$$

e si può anche osservare che l'associazione di \bar{f} ad f trasporta la relazione di omotopia. I dettagli sono lasciati allo studente.

Anche con questa visione di $\Pi_n(X, x_0)$ è complicato definire l'operazione che lo rende un gruppo, però tale visione per alcuni risultati sui gruppi di omotopia è più efficace.

NOTA 3

Abbiamo definito $\Pi_n(X, x_0)$ per ogni $n \geq 1$. Osserviamo ora che per ogni spazio puntato (X, x_0) si possono anche considerare le funzioni di (I^0, \dot{I}^0) in (X, x_0) . I^0 è un punto, \dot{I}^0 è vuoto. Pertanto $\Omega_0(X, x_0)$ è costituito dalle funzioni costanti in X (in altre parole dai punti di X).

Un'omotopia tra due elementi x_1 e x_2 di Ω_0 sarà allora una funzione continua di I in X che muta gli estremi di I in x_1 e x_2 rispettivamente, e quindi un cammino di X da x_1 a x_2 . Pertanto se X è connesso per cammini tutti gli elementi di Ω_0 sono omotopi. Se X non è connesso per cammini ci sono tante classi di omotopia quante sono le componenti connesse per cammini.

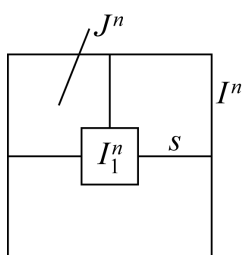
Possiamo pertanto estendere la definizione di Π_n anche al caso $n = 0$ e dire che si tratta del gruppo nullo se X è c.c.. Se X non è c.c. non diamo alcuna struttura a Π_0 .

5.2 Relazione tra $\Pi_n(X, x_0)$ e $\Pi_n(X, x_1)$

Siano x_0 ed x_1 due punti dello spazio topologico X . In generale non c'è relazione tra $\Pi_n(X, x_0)$ e $\Pi_n(X, x_1)$. Abbiamo visto però che se x_0 ed x_1 sono congiungibili con un cammino γ , quest'ultimo determina un isomorfismo $\gamma_{\#}$ tra i gruppi fondamentali relativi ai due punti. Il teorema che segue estende tale risultato ai casi $n > 1$, anzi per $n = 1$ lo dimostra con un metodo apparentemente diverso (riflettere).

Teorema 5.2.1. *Un cammino γ di X da x_0 a x_1 determina un isomorfismo di $\Pi_n(X, x_0)$ su $\Pi_n(X, x_1)$ per ogni $n \geq 1$.*

Dim. Sia $f \in \Omega_n(X, x_0)$ e sia I_1^n un retratto di I^n come in figura (per $n = 2$).



L'intercapedine $J^n = I^n - \overset{\circ}{I}_1^n$ tra i due n -cubi è omeomorfa al cilindro $\dot{I}^n \times I$, ovvero $\dot{I}_1^n \times I$. Ogni generatrice s di J^n è un segmento con il primo estremo in \dot{I}_1^n ed il secondo estremo in \dot{I}^n . Con una riparametrizzazione possiamo mutare ogni generatrice s in $[0, 1]$ e mandarla in X utilizzando il cammino γ . Otteniamo una funzione continua g di J^n in X che porta \dot{I}_1^n in x_0 e \dot{I}^n in x_1 .

Definiamo poi su I^n la funzione ottenuta incollando $g: J^n \rightarrow X$ con la funzione f concentrata in I_1^n lungo \dot{I}_1^n su cui f e g coincidono con C_{x_0} . Otteniamo una funzione continua f_1 di I^n in X che porta \dot{I}^n in x_1 e pertanto è un elemento di $\Omega_n(X, x_1)$.

Con procedimenti simili si vede poi che se f è omotopa ad f' anche f_1 è omotopa ad f'_1 (basta lavorare sull'omotopia $F: I^n \times I \rightarrow X$ così come si è fatto per f , utilizzando un retratto di $I^n \times I$).

Si ottiene in definitiva un'applicazione $\gamma_{\#}$ di $\Pi_n(X, x_0)$ in $\Pi_n(X, x_1)$ che lo studente proverà facilmente essere un omomorfismo.

$\gamma_{\#}$ è biunivoco, in quanto dotato di inverso. L'inverso di $\gamma_{\#}$ è l'applicazione indotta dal cammino γ^{-1} da x_1 ad x_0 inverso di γ .

Si conclude allora che se esiste un cammino γ da x_0 a x_1 , $\Pi_n(X, x_0)$ è isomorfo a $\Pi_n(X, x_1)$. \square

Si può ancora provare che se γ da x_0 a x_1 è un cammino omotopo a γ' risulta $\gamma_{\#} = \gamma'_{\#}$. In altre parole l'isomorfismo $\gamma_{\#}$ dipende solo dalla classe di omotopia di γ , e non dal particolare γ .

Dal teorema precedente risulta che se X è connesso per cammini, $\Pi_n(X, x_0)$ non dipende dal punto x_0 , e si può indicare con $\Pi_n(X)$ n -simo gruppo di omotopia di X .

5.3 Il funtore omotopia

Diciamo *gruppo graduato* una successione di gruppi $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Un morfismo tra i gruppi graduati $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(G'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ è una successione $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dove per ogni $n \in \mathbb{Z}$ φ_n è un omomorfismo di G_n in G'_n . I gruppi graduati con i morfismi di cui sopra costituiscono, si vede facilmente, una categoria, la categoria $\text{grad } \mathcal{G}$.

Sia ora (X, x_0) uno spazio puntato. Ad esso possiamo associare il gruppo graduato $\Pi(X, x_0) = (\Pi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dove Π_n è il gruppo nullo per ogni $n \leq 0$, mentre per $n > 0$ è l' n -simo gruppo di omotopia $\Pi_n(X, x_0)$.

Se $\varphi: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ è una funzione continua di spazi puntati, per ogni $n \geq 1$ e per ogni $f_n \in \Omega_n(X, x_0)$ si può considerare la funzione $\varphi \circ f_n \in \Omega_n(Y, y_0)$. Se F è un'omotopia di f'_n in f_n la funzione $\varphi \circ F$ è un'omotopia di $\varphi \circ f'_n$ in $\varphi \circ f_n$ (tutte le omotopie sono ovviamente relative a \dot{I}^n). Ha senso allora considerare per ogni $n \geq 1$ la funzione $(\varphi\#)_n: \Pi_n(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n(Y, y_0)$ definita al modo seguente

$$(\varphi\#)_n [f_n] = [\varphi \circ f_n]$$

Si verifica facilmente che per ogni $n \geq 1$

- 1) $((id_X)\#)_n = 1_{\Pi_n(X, x_0)}$
- 2) $((\varphi \circ \psi)\#)_n = (\varphi\#)_n \circ (\psi\#)_n$

Pertanto se ad ogni oggetto della categoria $\mathcal{T}op$ si associa il gruppo graduato Π e ad ogni morfismo φ di $\mathcal{T}op$ il morfismo $\varphi\# = (\varphi\#)_{n \in \mathbb{Z}}$ si ottiene un funtore dalla categoria $\mathcal{T}op$ alla categoria $\text{grad } \mathcal{G}$ che dicesi *funtore omotopia*.

Di facile verifica per lo studente sono poi le seguenti proposizioni che estendono risultati provati per il gruppo fondamentale:

Proposizione 5.3.1. *Se φ e ψ sono funzioni omofope di (X, x_0) in (Y, y_0) , allora si ha $\varphi\# = \psi\#$.*

Proposizione 5.3.2. *Se (X, x_0) e (Y, y_0) sono spazi puntati omotopi, i gruppi graduati $\Pi(X, x_0)$ e $\Pi(Y, y_0)$ sono isomorfi.*

L'ultimo risultato si enuncia in maniera elegante dicendo che *l'omotopia è un funtore omotopico* (attenzione al bisticcio di parole).