SUI LIMITI DI POLINOMI E FRAZIONI RAZIONALI PER $x \to \pm\infty$

Il limite di un **polinomio** ***p(x)*** per $x \to \pm\infty$ da spesso luogo alla forma indeterminata +∞ -∞**:** ad esempio

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+4\right)$ si presenta nella forma indeterminata +∞ -∞;

$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2+4\right)$ si presenta nella forma indeterminata -∞ +∞:

Tuttavia tale limite è sempre un infinito che può essere determinato seguendo il seguente procedimento

- **mettere in evidenza il termine di grado massimo**
- **ricordare che un limite che si presenta nella forma "numero/infinito " è 0**
- **calcolare il limite che, a questo punto, non si presenta più in forma indeterminata**

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+4\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2}_{+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}\right)=+\infty\cdot 1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2+4\right)=\lim_{x\to-\infty}2x^3\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{2}{x^3}\right)=\left(-\infty\right)\cdot 1=-\infty$$

Dai precedenti esempi si può' dedurre la seguente regola pratica:

"**il limite per $x \to \pm\infty$ di un polinomio è uguale al limite per $x \to \pm\infty$ del suo termine di grado massimo**"

Esempio:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2+4\right)=\lim_{x\to-\infty}2x^3=2\left(-\infty\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4x-7x^5+x\right)=\lim_{x\to-\infty}-7x^5=-7\left(-\infty\right)=+\infty$$

Il limite di un **rapporto di polinomi** $\frac{p(x)}{q(x)}$ (**frazione razionale**) per $x \to \pm\infty$ si presenta nella forma indeterminata $\pm\infty / \pm\infty$.

La regola per il calcolo dei limiti dei polinomi per $x \to \pm\infty$ suggerisce il seguente procedimento per eliminare l'indeterminazione:

- **sostituire numeratore e denominatore con i rispettivi termini di grado massimo,**
- **semplificare la frazione ottenuta,**
- **calcolare il limite che non si presenta più in forma indeterminata.**

Esempi:

Dagli ultimi esempi deduciamo che $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x^2+4}{4x-7x^5+x}$ si presenta nella forma -∞ **/+**∞. Eliminiamo l'indeterminatezza:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x^2+4}{4x-7x^5+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{-7x^5} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{7}\cdot 0 = 0$$

altri limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5-x^2+1}{4x-7x^5+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{-7x^5} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^8-x^2+1}{-2x^5+x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^8}{-2x^5} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{2}x^3 = -\frac{3}{2}\cdot(+\infty) = -\infty$$

Applicando il procedimento per eliminare l'indeterminazione si evince che:
- il limite è un infinito se il numeratore è di grado superiore al denominatore;
- il limite è 0 se il numeratore è di grado inferiore al denominatore;
- il limite è uguale al rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado.