

Pietro Baldi

## **Analisi matematica I**

Programma svolto nell'anno accademico 2013-2014, dal 25 settembre al 20 dicembre 2013

Lezioni 1-36

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica, cognomi A-I.

Il libro di testo adottato durante il corso è *Analisi Matematica Uno*, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori Editore, e l'eserciziario allegato, *Esercizi di Matematica*, Volume I, Tomi 1,2,3,4.

Un altro testo consultato è *Analisi Uno*, G. De Marco, Zanichelli.

Gli esercizi assegnati per casa, gli esercizi svolti a lezione e gli esercizi delle dispense (file pdf sul sito docenti) sono parte integrante e fondamentale del corso di Analisi matematica I.

### **Lezione 1 (mercoledì 25/9/2013, ore 9-11, durata 2)**

- I numeri reali. Assiomi relativi alle operazioni, relativi all'ordinamento e assioma di completezza.
- Conseguenze: regole pratiche di calcolo. Dimostrazione.

### **Lezione 2 (giovedì 26/9/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)**

- Regole di calcolo con le disuguaglianze.
- Intervalli in  $\mathbb{R}$ : definizione.
- Il modulo di un numero reale: definizione, interpretazione di  $|x|$  come distanza tra i punti  $x$  e 0 sulla retta dei numeri reali. Proprietà del modulo.

### **Lezione 3 (venerdì 27/9/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)**

- Proposizione:  $|x| < R \iff -R < x < R$ . Dimostrazione.
- La disuguaglianza triangolare. Dimostrazione. La disuguaglianza per la differenza dei moduli. Dimostrazione.
- Massimo  $\max(A)$  e minimo  $\min(A)$  di un insieme  $A$  (non vuoto) di numeri reali: definizione.
- Unicità del massimo e del minimo di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Maggiorante, minorante di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ : definizione.
- Insiemi limitati, limitati superiormente, limitati inferiormente: definizione.
- Proposizione:  $A \subseteq \mathbb{R}$  è limitato se e solo se esiste  $M > 0$  tale che  $A \subseteq [-M, M]$ , cioè  $|a| \leq M$  per ogni  $a \in A$ . Dimostrazione.
- Teorema di esistenza del sup e dell'inf. Definizione dell'estremo superiore  $\sup(A)$  e dell'estremo inferiore  $\inf(A)$  di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Dimostrazione del teorema.
- Caratterizzazione del sup e dell'inf. Dimostrazione.
- Proposizione: se un insieme  $A$  ha minimo, allora  $\min(A) = \inf(A)$ ; simile per il massimo. Dimostrazione.

#### Lezione 4 (mercoledì 2/10/2013, ore 9-11, durata 2)

- Insiemi numerici:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ . (Convenzione:  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , cioè  $0 \notin \mathbb{N}$ ).
- Proprietà di Archimede: siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $b > 0$ . Allora esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nb > a$ . Dimostrazione.
- Corollario:  $\mathbb{N}$  è illimitato superiormente. Dimostrazione.
- Densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ : per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , esiste  $q \in \mathbb{Q}$  tale che  $q \in (a, b)$ . Dimostrazione.
- Proprietà degli interi: 1) se  $A \subseteq \mathbb{Z}$  è limitato inferiormente, allora  $A$  ha minimo; 2) se  $A \subseteq \mathbb{Z}$  è limitato superiormente, allora  $A$  ha massimo; 3) se  $A \subseteq \mathbb{N}$ , allora  $A$  ha minimo.
- Prodotti e somme di numeri pari/dispari. Dimostrazione.
- Proposizione: non esiste alcun numero razionale  $c \in \mathbb{Q}$  tale che  $c^2 = 2$ . Dimostrazione.
- Proposizione:  $\mathbb{Q}$  non è completo. Dimostrazione.
- Disuguaglianza:  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Equazioni di primo grado con uno o più moduli.

#### Lezione 5 (giovedì 3/10/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Disequazioni di primo grado con uno o più moduli.
- Potenze con esponente intero positivo:  $a^n$ , definita per base  $a \in \mathbb{R}$  ed esponente  $n \in \mathbb{N}$ . Regole delle potenze. Segno di potenze pari/dispari.
- Potenze ad esponente zero: definiamo  $a^0 = 1$ , per ogni  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Potenze con esponente intero negativo:  $a^m$ , definita per base  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ed esponente  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \leq -1$ .
- Definizione di radice quadrata: dato un numero reale  $a \geq 0$ , la sua radice quadrata è quel numero reale  $b \geq 0$  tale che  $b^2 = a$ .
- Relazione tra radice, quadrato e modulo:  $\sqrt{a^2} = |a|$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Potenza  $a^{1/n}$ , definita per base  $a \geq 0$  ed esponente  $1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , cioè definizione di radice  $n$ -esima: dato un numero reale  $a \geq 0$ , la sua radice  $n$ -esima è quel numero reale  $b \geq 0$  tale che  $b^n = a$ . (Osservazione: se  $n$  è dispari, la radice  $n$ -esima  $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$  si può definire anche per  $a < 0$ ).
- Potenze ad esponente razionale  $a^p$ , definite per base  $a > 0$  ed esponente  $p = m/n \in \mathbb{Q}$ .
- Potenze ad esponente reale  $a^p$ , definite per  $a, p \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .
- Regole delle potenze di base positiva ed esponente reale.
- Disuguaglianze per le potenze: (1)  $a^p > 0$  per ogni  $a > 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ; (2) Confronto tra  $a^p$  e  $b^p$  (basi diverse  $0 < a < b$  e stesso esponente  $p \in \mathbb{R}$ ); (3) Confronto tra  $a^p$  e  $a^q$  (stessa base  $a > 0$  ed esponenti diversi  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p < q$ ). Esempi.
- Potenze con base  $e$ .
- Logaritmo di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , logaritmo naturale: definizione, proprietà.

#### Lezione 6 (venerdì 4/10/2013, ore 08:30-11, durata 2:30)

- Proprietà dei logaritmi: dimostrazione.
- Il principio di induzione. Dimostrazione.
- Disuguaglianza di Bernoulli:  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq -1$ . Dimostrazione.
- Il simbolo  $\sum$  di sommatoria e  $\prod$  di produttoria. Proprietà:  $c \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n ca_k$  (proprietà distributiva della somma) e  $(\prod_{k=1}^n a_k)^p = \prod_{k=1}^n a_k^p$  (regole delle potenze).
- Formula della differenza di potenze  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$ . (Dimostrazione: esercizio facoltativo).
- Definizione: il fattoriale  $n!$ , il coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$ .
- Formula per le potenze del binomio:  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ . (Dimostrazione: esercizio facoltativo).
- Equazioni di secondo grado del tipo  $x^2 = p$ . Equazioni di secondo grado del tipo generale  $ax^2 + bx + c = 0$ . Ruolo del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Costruzione della formula delle soluzioni  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

- Fattorizzazione del polinomio di secondo grado  $ax^2 + bx + c$ : se  $\Delta \geq 0$  e  $u, v$  sono le sue radici, allora  $ax^2 + bx + c = a(x - u)(x - v)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Segno del polinomio di secondo grado, disequazioni di secondo grado.

### Lezione 7 (mercoledì 9/10/2013, ore 9-11, durata 2)

- Inf e sup di alcuni insiemi numerici.
- Proposizione: per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto, si ha  $\inf(A) \leq \sup(A)$ . Dimostrazione.
- Proposizione: se  $A \subseteq B$  sono sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{R}$ , allora  $\inf(B) \leq \inf(A)$ , e  $\sup(B) \geq \sup(A)$  (insiemi più grandi danno più scelta nella ricerca dell'inf e del sup). Dimostrazione.
- Corollario: se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , ed  $E \subseteq [a, b]$  non vuoto, allora  $\inf(E), \sup(E) \in [a, b]$ . Dimostrazione.
- Non esiste  $C > 0$  tale che  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Disequazioni con radici, moduli, logaritmi.

### Lezione 8 (giovedì 10/10/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

Trigonometria.

- Misura degli angoli in radianti.
- Definizione geometrica di  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$ .
- Identità fondamentale  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  (teorema di Pitagora).
- Disuguaglianze immediate:  $|\cos(\alpha)| \leq 1$ ,  $|\sin(\alpha)| \leq 1$  (i cateti sono più corti dell'ipotenusa).
- Uguaglianze (che si ricavano in modo elementare dalle similitudini dei triangoli): (1)  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ; (2)  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ; (3)  $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$ ; (4)  $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$ ; (5)  $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ ; (6)  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ ; (7)  $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$ ; (8)  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ ; (9)  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ .
- Formule di addizione, di duplicazione, di bisezione, di prostaferesi, di Werner.
- Valori di seno e coseno di angoli notevoli:  $0, \pi, 2\pi, \pi/2, 3\pi/2, \pi/4, \pi/3, \pi/6$ .
- Definizione di tangente:  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ . Interpretazione geometrica della tangente (usando la similitudine dei triangoli).
- Definizione delle funzioni trigonometriche inverse: arcsin, arccos, arctan.
- Disuguaglianza trigonometrica: (1)  $|\sin(x)| \leq |x|$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ; (2)  $|\sin(x)| < |x|$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ . Dimostrazione.
- Disuguaglianza trigonometrica: per ogni  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $x \neq 0$ , si ha  $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ . Dimostrazione.
- Disuguaglianze trigonometriche: (1)  $|\sin(\alpha) - \sin(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; (2)  $|\cos(\alpha) - \cos(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dimostrazione.

### Lezione 9 (venerdì 11/10/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

- Definizione di insieme prodotto  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ .
- Piano cartesiano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , corrispondenza tra punti del piano e coppie  $(a, b)$  di numeri reali. Ascissa, ordinata.
- Definizione di funzione  $f : A \rightarrow B$  di dominio  $A$  e codominio  $B$ .
- Definizione di grafico di funzione:  $G_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$ .
- Proposizione: sia  $G_f \subset \mathbb{R}^2$  il grafico di una funzione. Allora ogni retta verticale interseca  $G_f$  in al più un punto.
- Grafico della funzione polinomiale di primo grado  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx + q$ : le rette. Significato geometrico dei coefficienti  $m, q$ .
- Definizione di funzione crescente, decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona.
- Definizione di funzione costante.

- Grafico della funzione polinomiale di secondo grado  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ : le parabole con l'asse verticale. Significato geometrico del segno del coefficiente  $a$ .
- Grafico della funzione potenza  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ , con esponente  $n \in \mathbb{N}$ .
- Simmetrie: definizione di funzione pari ( $f(-x) = f(x)$  per ogni  $x \in A$ ) e di funzione dispari ( $f(-x) = -f(x)$  per ogni  $x \in A$ ). Significato geometrico: il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.
- Grafico della funzione potenza  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^m$ , con esponente  $m \in \mathbb{Z}$  (base:  $x \neq 0$ ).
- Grafico della funzione potenza  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^p$ , con esponente reale  $p \in \mathbb{R}$  (base:  $x > 0$ ). Distinzione qualitativa dei grafici:  $p > 1$ ,  $p = 1$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $p = 0$ ,  $p < 0$ .
- Grafico della funzione esponenziale di base  $a > 0$ :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$ . Distinzione qualitativa dei grafici:  $a \in (0, 1)$ ,  $a = 1$ ,  $a > 1$ . Caso notevole  $f(x) = e^x = \exp(x)$ , esponenziale di base  $e$ .
- Grafico della funzione logaritmo di base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ :  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a(x)$ . Distinzione qualitativa dei grafici:  $a \in (0, 1)$ ,  $a > 1$ . Caso notevole: logaritmo naturale (base  $e$ ).
- Grafico delle funzioni trigonometriche: la funzione seno  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , la funzione coseno  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , la funzione tangente  $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ , la funzione arcotangente  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ , la funzione arcseno  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , la funzione arccoseno  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .
- Definizione di funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $T$ .

### Lezione 10 (mercoledì 16/10/2013, ore 9-11, durata 2)

- La funzione segno  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = -1$  se  $x < 0$ . Il suo grafico  $G_f$ .
- La funzione parte intera  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ . Il suo grafico  $G_f$ .
- La funzione parte frazionaria:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - [x]$ . Il suo grafico  $G_f$ . È una funzione periodica.
- Definizione di funzione pari/dispari.
- Le funzioni seno iperbolico  $\sinh(x)$  e coseno iperbolico  $\cosh(x)$ . Proprietà:  $\cosh$  è pari;  $\sinh$  è dispari;  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- Proprietà delle funzioni pari/dispari.
- Definizione di funzione  $f : A \rightarrow B$  iniettiva sul dominio  $A$ .
- Definizione di funzione  $f : A \rightarrow B$  suriettiva sul codominio  $B$ .
- Definizione di funzione  $f : A \rightarrow B$  biiettiva o invertibile dal dominio  $A$  al codominio  $B$ . Definizione di funzione inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$ . Uguaglianze della funzione inversa: (1)  $f(f^{-1}(b)) = b$  per ogni  $b \in B$ ; (2)  $f^{-1}(f(a)) = a$  per ogni  $a \in A$ .
- Osservazione: se  $f$  è iniettiva, allora ogni retta orizzontale interseca il suo grafico  $G_f$  in al più un punto. Se  $f$  è suriettiva, allora ogni retta orizzontale interseca il suo grafico  $G_f$  in almeno un punto. Se  $f$  è biiettiva, allora ogni retta orizzontale interseca il suo grafico  $G_f$  in esattamente un punto.
- Definizione di immagine  $f(A)$  di un insieme  $A$  tramite la funzione  $f$ .
- Definizione di anti-immagine  $f^{-1}(E)$  di un insieme  $E \subseteq B$  tramite la funzione  $f$ .

Numeri complessi.

- Definizione: l'unità immaginaria  $i = \sqrt{-1}$ , soluzione dell'equazione  $x^2 + 1 = 0$ .
- L'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C} = \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$ .
- Operazioni con i numeri complessi: somma, prodotto, opposto, inverso.
- Rappresentazione grafica: il piano complesso.
- Definizione di complesso coniugato: se  $u = a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , definiamo  $\bar{u} = a - ib$ . Proprietà del coniugio.

### Lezione 11 (giovedì 17/10/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Definizione di modulo di un numero complesso: se  $u = a + ib$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , definiamo  $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Teorema di Pitagora:  $|u|$  è la distanza del punto  $u$  dall'origine. Proprietà del modulo.

- Rappresentazione grafica: dato  $u \in \mathbb{C}$ , disegnare  $\bar{u}$  e  $-u$ . Significato geometrico della disuguaglianza triangolare.
- Formula:  $u\bar{u} = |u|^2$  per ogni  $u \in \mathbb{C}$ . Formula dell'inverso:  $u^{-1} = \bar{u}/|u|^2$  per ogni  $u \in \mathbb{C}$ ,  $u \neq 0$ .
- Rappresentazione dei numeri complessi in coordinate polari:  $a + ib = \rho \cos(\vartheta) + i\rho \sin(\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$ . L'esponenziale complesso: per  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , si definisce  $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$ . Se  $u = a + ib$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , allora  $e^u = e^{a+ib} = e^a \cos(b) + i e^a \sin(b)$ .
- Proprietà dell'esponenziale complesso:  $e^u e^v = e^{u+v}$  per ogni  $u, v \in \mathbb{C}$ .
- Applicazione dell'esponenziale complesso per ricavare le formule della trigonometria. Formula generale  $\cos(nx) + i \sin(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$ .
- Calcolo delle radici complesse dei polinomi di secondo grado aventi  $\Delta < 0$ .
- Costruzione delle radici terze dell'unità, cioè soluzioni dell'equazione  $x^3 = 1$  in  $\mathbb{C}$ , usando le coordinate polari.

[La lezione di venerdì 18/10/2013 è saltata per lo sciopero dei mezzi pubblici].

### Lezione 12 (mercoledì 23/10/2013, ore 9-11, durata 2)

- Costruzione delle radici quarte dell'unità, cioè soluzioni dell'equazione  $x^4 = 1$  in  $\mathbb{C}$ , usando le coordinate polari.

Le successioni.

- Successioni di numeri reali. Definizione di limite di una successione (limite finito,  $+\infty$ ,  $-\infty$ ).
- Definizione di successione costante, o definitivamente costante.
- Definizione di "definitivamente" nel contesto delle successioni.
- Successioni che non hanno limite: esempio principale:  $a_n = (-1)^n$ .

### Lezione 13 (giovedì 24/10/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Proposizione: sia  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $|a| < \varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Allora  $a = 0$ . Dimostrazione.
- Unicità del limite di successione. Dimostrazione.
- Scritture equivalenti:  $a_n \rightarrow c$  se e solo se  $(a_n - c) \rightarrow 0$  se e solo se  $|a_n - c| \rightarrow 0$ . Dimostrazione.
- Proposizione ("limite dominato"): se  $|a_n - c| \leq b_n$  definitivamente, e  $b_n \rightarrow 0$ , allora  $a_n \rightarrow c$ . Dimostrazione.
- Il limite del modulo: se  $a_n \rightarrow c$ , allora  $|a_n| \rightarrow |c|$ . Dimostrazione.
- Definizione di successione limitata.
- Esistono successioni limitate che non hanno limite (esempio:  $a_n = (-1)^n$ ).
- Proposizione: ogni successione convergente è limitata. Dimostrazione.
- Proposizione: dato  $C > 0$ , si ha  $a_n \rightarrow a$  se e solo se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - a| < C\varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dimostrazione.
- Definizione di successione infinitesima.
- Proposizione: se  $a_n$  è infinitesima e  $b_n$  è limitata, allora la successione  $(a_n b_n)$  è infinitesima. Dimostrazione.
- Teorema della permanenza del segno per le successioni: se  $a_n \rightarrow a$  e  $a > 0$ , allora  $a_n > 0$  definitivamente; simile per  $a < 0$ . Dimostrazione.
- Corollario (del teorema della permanenza del segno per successioni): se  $a_n \geq 0$  definitivamente e  $a_n \rightarrow a$ , allora  $a \geq 0$ ; simile per  $a_n \leq 0$ . Dimostrazione. (Questo corollario si può rinunciare così: le disuguaglianze larghe passano al limite).
- Osservazione: le disuguaglianze strette, passando al limite, diventano larghe; esempio:  $a_n = 1/n > 0$  per ogni  $n$ , ma  $\lim a_n = 0$ .
- Operazioni con i limiti finiti: somma  $a_n + b_n$ , prodotto  $a_n b_n$ , opposto  $-a_n$ , inverso  $1/a_n$  di successioni convergenti.

### Lezione 14 (venerdì 25/10/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

- Operazioni con i limiti finiti: somma  $a_n + b_n$ , prodotto  $a_n b_n$ , opposto  $-a_n$ , inverso  $1/a_n$  di successioni convergenti. Dimostrazione.
- Corollario 2 (del teorema della permanenza del segno per successioni): (1) se  $a_n \leq b_n$  definitivamente, e  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , allora  $a \leq b$ ; (2) se  $a_n \leq b$  definitivamente, e  $a_n \rightarrow a$ , allora  $a \leq b$ ; simile per  $a_n \geq b$ . Dimostrazione.
- Teorema dei carabinieri (per le successioni). Dimostrazione.
- Operazioni con i limiti infiniti: somma, prodotto, opposto, inverso.
- Tecniche di calcolo dei limiti (principio generale del “mettere in evidenza la parte principale”).
- Limiti notevoli di trigonometria: (1) se  $a_n \rightarrow 0$ , allora  $\sin(a_n) \rightarrow 0$ ,  $\cos(a_n) \rightarrow 1$ . (2) Se  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n \neq 0$ , allora  $\sin(a_n)/a_n \rightarrow 1$ . Dimostrazione.
- Teorema di confronto (per successioni): (1) se  $a_n \leq b_n$  definitivamente, e  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora anche  $b_n \rightarrow +\infty$ ; (2) se  $a_n \leq b_n$  definitivamente, e  $b_n \rightarrow -\infty$ , allora anche  $a_n \rightarrow -\infty$ . Dimostrazione.

### Lezione 15 (mercoledì 30/10/2013, ore 9-11, durata 2)

- Limite notevole per le potenze:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$  nei casi  $a > 1$ ,  $a = 1$ ,  $a \in (-1, 1)$ ,  $a \leq -1$ . Dimostrazione.
- Definizione di successione crescente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona.
- Teorema sulle successioni monotone: (1) ogni successione monotona ha limite; (2) ogni successione monotona limitata converge. Dimostrazione.
- La successione che definisce il numero  $e$ : la successione  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  è crescente e limitata. Dimostrazione.

### Lezione 16 (giovedì 31/10/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Definizione del numero di Nepero:  $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .
- Proposizione: per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , la successione  $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$  è definitivamente crescente e limitata. (Senza dimostrazione).
- Definizione dell'esponenziale:  $e^x = \exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ . Proprietà dell'esponenziale.
- Limiti notevoli per l'esponenziale: (1) se  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora  $e^{a_n} \rightarrow +\infty$ ; (2) se  $a_n \rightarrow -\infty$ , allora  $e^{a_n} \rightarrow 0$ ; (3) se  $a_n \rightarrow c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , allora  $e^{a_n} \rightarrow e^c$ ; (4) se  $a_n \rightarrow 0$ , con  $a_n \neq 0$ , allora  $\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \rightarrow 1$ . (Senza dimostrazione).
- Limiti di esponenziali con base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . (Senza dimostrazione).
- Limiti notevoli per il logaritmo: (1) se  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora  $\log(a_n) \rightarrow +\infty$ ; (2) se  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n > 0$ , allora  $\log(a_n) \rightarrow -\infty$ ; (3) se  $a_n \rightarrow c$ ,  $c > 0$ , allora  $\log(a_n) \rightarrow \log(c)$ ; (4) se  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n > 0$ , allora  $\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \rightarrow 1$ . (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: se  $x_n \rightarrow \pm\infty$ , allora  $(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} \rightarrow e$ . (Senza dimostrazione).
- Limiti di potenze del tipo  $a_n^{b_n}$  in cui sia la base  $a_n$  che l'esponente  $b_n$  dipendono da  $n$ : (1) se  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , allora  $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$ ; (2) se  $a_n \rightarrow a$ ,  $a > 1$ , e  $b_n \rightarrow +\infty$ , allora  $a_n^{b_n} \rightarrow +\infty$ ; (3) se  $a_n \rightarrow a$ ,  $a > 1$ , e  $b_n \rightarrow -\infty$ , allora  $a_n^{b_n} \rightarrow 0$ ; (4) se  $a_n \rightarrow a$ ,  $a \in (0, 1)$ , e  $b_n \rightarrow +\infty$ , allora  $a_n^{b_n} \rightarrow 0$ ; (5) se  $a_n \rightarrow a$ ,  $a \in (0, 1)$ , e  $b_n \rightarrow -\infty$ , allora  $a_n^{b_n} \rightarrow +\infty$ . (Se invece  $a_n \rightarrow 1$  e  $b_n \rightarrow \pm\infty$ , allora si ha una forma indeterminata del tipo “ $1^\infty$ ”; se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \rightarrow 0$ , allora si ha una forma indeterminata del tipo “ $\infty^0$ ”). (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: confronto tra logaritmo, esponenziale e potenze polinomiali. Se  $p > 0$ ,  $x_n \rightarrow +\infty$ , allora  $\frac{\log(x_n)}{x_n^p} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\exp(x_n)}{x_n^p} \rightarrow +\infty$  (i logaritmi tendono a  $+\infty$  più lentamente di qualunque potenza; gli esponenziali tendono a  $+\infty$  più velocemente di qualunque potenza). (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: se  $p \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n \neq 0$ , allora  $\frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} \rightarrow p$ . (Senza dimostrazione).
- Successioni definite per ricorrenza: esempio  $a_{n+1} = a_n^2$ .

## Lezione 17 (mercoledì 6/11/2013, ore 9-11, durata 2)

Limiti di funzioni.

- Definizione di punto di accumulazione di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ .
- Definizione di punto isolato di un insieme.
- Definizione: si dice che  $+\infty$  è di accumulazione per l'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  se  $A$  è illimitato superiormente. Simile per  $-\infty$ .
- Caratterizzazione dei punti di accumulazione:  $p$  è di accumulazione per  $A$  se e solo se esiste una successione  $(a_n)$  tale che: (1)  $a_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$ ; (2)  $a_n \neq p \forall n \in \mathbb{N}$ ; (3)  $a_n \rightarrow p$  per  $n \rightarrow \infty$ . Dimostrazione.
- Definizione di limite di funzione (definizione basata sulle successioni).
- Definizione di punto di accumulazione da destra/da sinistra di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Caratterizzazione dei punti di accumulazione da destra/sinistra.
- Definizione di limite destro/sinistro di funzione (definizione basata sulle successioni).
- Definizione di limite di funzione "con  $\varepsilon, \delta$ ".
- Teorema ponte: le due definizioni di limite di funzione (quella per successioni e quella  $\varepsilon, \delta$ ) sono equivalenti. (Senza dimostrazione).

## Lezione 18 (giovedì 7/11/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Tecniche di calcolo per limiti di funzione.
- Teorema della permanenza del segno (per limiti di funzione). Dimostrazione.
- Teorema dei carabinieri (per i limiti di funzione). Dimostrazione.
- Teorema di confronto (per i limiti di funzioni). Dimostrazione.
- Teorema sui limiti destro e sinistro di funzione: (1) se il limite  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  esiste e vale  $v$ , allora esistono sia il limite destro  $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$  che quello sinistro  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$  e valgono entrambi  $v$ ; (2) se il limite destro  $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$  e il limite sinistro  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$  esistono e valgono entrambi  $v$ , allora esiste il limite  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  e vale  $v$ . Dimostrazione.

## Lezione 19 (venerdì 8/11/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

Funzioni continue.

- Definizione di funzione continua in un punto  $p$ . Definizione di funzione continua in un insieme  $A$ .
- Osservazione:  $f$  è continua in  $p$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow p} x)$ , cioè: le funzioni continue in  $p$  sono quelle per cui i simboli " $f$ " e " $\lim_{x \rightarrow p}$ " si possono scambiare.
- Le funzioni elementari: potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcseno, arccoseno, arctangente sono tutte continue, ciascuna nel proprio dominio. Esempio: la funzione  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  (definita per  $x \neq 0$ ) è continua in ogni punto  $x \neq 0$ , cioè è continua nel suo dominio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- La funzione modulo  $f(x) = |x|$  è continua in  $\mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Teorema della permanenza del segno per le funzioni continue: se  $f$  è continua in  $p$  e  $f(p) > 0$ , allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) > 0 \forall x \in A, |x - p| < \delta$ . Dimostrazione.
- La composizione di funzioni: definizione. Continuità della funzione composta. Dimostrazione.
- Teorema di Weierstrass. Dimostrazione.
- Definizione di punto di minimo/punto di massimo per  $f$  in  $[a, b]$  (è un punto  $x$  del dominio). Definizione di valor minimo/valor massimo di  $f$  in  $[a, b]$  (è un valore  $y = f(x)$  del codominio).

## Lezione 20 (mercoledì 13/11/2013, ore 9-11, durata 2)

- Teorema dell'esistenza degli zeri. Dimostrazione.
- Primo teorema di esistenza dei valori intermedi: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . Dimostrazione.

- Secondo teorema di esistenza dei valori intermedi: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  assume tutti i valori compresi tra il suo valor minimo e il suo valor massimo in  $[a, b]$ . Dimostrazione.

### Lezione 21 (giovedì 14/11/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette un'estratta convergente. Dimostrazione.

- Definizione di funzione uniformemente continua nel dominio.

- Teorema di Cantor dell'uniforme continuità: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  è uniformemente continua in  $[a, b]$ . Dimostrazione.

Funzioni monotone.

- Proposizione: (1) se  $f$  è strettamente monotona, allora è iniettiva. (2) Se  $f$  è strettamente monotona e suriettiva, allora è invertibile. Inoltre se  $f$  è strettamente crescente, allora anche la funzione inversa  $f^{-1}$  è strettamente crescente; se  $f$  è strettamente decrescente, allora anche  $f^{-1}$  è strettamente decrescente.

Dimostrazione.

- Corollario: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente monotona e continua. Sia  $m$  il valor minimo di  $f$ , e sia  $M$  il suo valor massimo. Allora  $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$  è invertibile. Dimostrazione.

- Teorema sui limiti di funzioni monotone: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  crescente (non necessariamente continua), e sia  $p \in (a, b)$ . Allora tutti i seguenti limiti esistono finiti, con queste disuguaglianze:  $f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) \leq f(p) \leq \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \leq f(b)$ . Simile se  $f$  è decrescente (cambiare verso alle disuguaglianze). (Senza dimostrazione).

### Lezione 22 (venerdì 15/11/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

- Criterio di continuità delle funzioni monotone: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona. Allora  $f$  è continua se e solo se  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . (Senza dimostrazione).

- Teorema di continuità della funzione inversa: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente monotona. Se  $f$  è continua, allora anche la funzione inversa  $f^{-1}$  è continua. (Senza dimostrazione).

Le derivate.

- Il coefficiente angolare della retta che unisce due punti  $A = (p, f(p))$  e  $B = (p + h, f(p + h))$  sul grafico  $G_f$  di una funzione  $f$  vale  $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$  e si chiama rapporto incrementale.

- Definizione di derivata di una funzione  $f$  nel punto  $p$ . Definizione di funzione derivabile nel punto  $p$ . Interpretazione geometrica:  $f'(p)$  è la pendenza della retta tangente a  $G_f$  nel punto  $(p, f(p))$ .

- Definizione di funzione derivabile in un intervallo  $(a, b)$  o  $[a, b]$ .

- Definizione di derivata destra/sinistra.

- Calcolo delle derivate delle funzioni elementari: polinomi, potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno. Dimostrazione.

- Proposizione: la funzione radice quadrata  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  è continua in  $[0, +\infty)$ , è derivabile in  $(0, +\infty)$ , e non è derivabile in  $x = 0$ . Dimostrazione.

- Proposizione: la funzione modulo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  è continua in  $\mathbb{R}$ , è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e non è derivabile in  $x = 0$ . Dimostrazione.

- Proposizione: se  $f$  è derivabile in  $p$ , allora  $f$  è continua in  $p$ . Dimostrazione.

- Derivata: (1) della somma  $f(x) + g(x)$ ; (2) del prodotto  $f(x)g(x)$ ; (3) di  $\frac{1}{f(x)}$ ; (4) del rapporto  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ; (5) della funzione composta  $g(f(x))$ . Dimostrazione di (1) (le altre la prossima lezione).

### Lezione 23 (mercoledì 20/11/2013, ore 9-11, durata 2)

- Proposizione: (1) se  $f$  è derivabile in  $x$ , allora la funzione  $R(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$  soddisfa  $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$ . Perciò si ha  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hR(h)$ , e  $R(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . (2) Sia

$f$  una funzione che soddisfa  $f(x+h) = f(x) + mh + hR(h)$ , dove  $m \in \mathbb{R}$  e  $R(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . Allora  $f$  è derivabile in  $x$ , e la sua derivata vale  $f'(x) = m$ . Dimostrazione.

- Derivata: (1) della somma  $f(x) + g(x)$ ; (2) del prodotto  $f(x)g(x)$ ; (3) di  $\frac{1}{f(x)}$ ; (4) del rapporto  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ; (5) della funzione composta  $g(f(x))$ . Dimostrazione di (2),(3),(4),(5).
- Derivata di  $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$ .
- Teorema: la derivata della funzione inversa. (Senza dimostrazione).
- Derivata di arcseno, arccoseno, arctangente.
- Definizione di derivata seconda  $f''(x)$ , derivata terza  $f'''(x)$ , ..., derivata  $n$ -esima  $f^{(n)}(x)$ .
- Definizione di funzione di classe  $C^n(A)$  su un dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Definizione di funzione di classe  $C^\infty(A)$ .

### **Prima prova scritta intercorso (mercoledì 20/11/2013, ore 16:30-19, durata 2:30)**

#### **Lezione 24 (venerdì 22/11/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)**

- Esempio di funzione derivabile che non è di classe  $C^1$ : funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  per  $x \neq 0$ , e  $f(0) = 0$ .  $f$  è derivabile in ogni punto  $x \in \mathbb{R}$ . La sua derivata  $f'(x)$  non è continua in  $x = 0$ .
- Definizione di punto interno di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ .
- Definizione di punto di minimo/massimo globale (o assoluto) e locale (o relativo) di una funzione.
- Teorema di Fermat. Dimostrazione.
- Teorema di Rolle. Dimostrazione.
- Teorema di Lagrange. Dimostrazione.
- Applicazione del teorema di Lagrange: le disuguaglianze  $|\sin(x)| \leq |x|$ ,  $|\cos(x) - 1| \leq x^2$ ,  $|\sin(x) - x| \leq x^3$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Dimostrazione.
- Proposizione:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è costante se e solo se  $f$  è derivabile in  $[a, b]$  e  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Dimostrazione.
- Criterio di monotonia per  $f$  dallo studio del segno di  $f'$ . Dimostrazione.

#### **Lezione 25 (mercoledì 27/11/2013, ore 9-11, durata 2)**

- Equazione della retta tangente al grafico  $G_f$  di  $f$  nel punto  $(p, f(p))$ :  $y = f(p) + f'(p)(x - p)$ .
- Definizione di funzione convessa/concava in un intervallo.
- Definizione di punto di flesso.
- Criterio di convessità per  $f$  dallo studio del segno di  $f''$ . (Senza dimostrazione).
- Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine per punti di massimo/minimo di una funzione. Dimostrazione.
- Definizione di asintoto orizzontale, obliquo, verticale per una funzione.
- Regola per il calcolo di un asintoto obliquo o orizzontale. Dimostrazione.
- Cosa si intende con "studio di funzione".

#### **Lezione 26 (giovedì 28/11/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)**

- Studio di funzione completo:  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x$ .
- Teorema di de l'Hôpital. (Senza dimostrazione).
- Definizione di polinomio di Taylor  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(p)(x-p)^k$  di ordine  $n$ , centrato nel punto  $p$ , per una funzione  $f$  derivabile  $n$  volte. Definizione di resto  $n$ -esimo  $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ .
- Teorema della formula di Taylor con resto in forma di Peano. (Dimostrazione: prossima lezione).

### Lezione 27 (venerdì 29/11/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

- Teorema della formula di Taylor con resto in forma di Peano. Dimostrazione.
- Calcolo dei polinomi di Taylor per le funzioni  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  (in particolare  $\sqrt{1+x}$  e  $\frac{1}{1+x}$ ) centrate in  $p=0$ .
- Definizione di  $o$  piccolo.
- Regole per le operazioni con gli  $o$  piccolo. Dimostrazione.
- Sviluppi di Taylor e calcoli con gli  $o$  piccolo.
- Utilizzo dello sviluppo di Taylor per il calcolo degli asintoti orizzontali/obliqui di funzioni.

### Lezione 28 (mercoledì 4/12/2013, ore 9-11, durata 2)

Gli integrali.

- Idea geometrica: calcolare le aree per approssimazione con rettangoli.
- Definizione di partizione di un intervallo  $[a, b]$ .
- Definizione di somma integrale inferiore  $\underline{S}(f, P)$  e somma integrale superiore  $\overline{S}(f, P)$  di una funzione limitata  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto ad una partizione  $P$  di  $[a, b]$ .
- Lemma dei raffinamenti (raffinando una partizione, la somma integrale inferiore cresce, la somma integrale superiore cala). Dimostrazione.
- Lemma: sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata, e  $P, Q$  due partizioni di  $[a, b]$ . Allora  $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$ . In altri termini: l'insieme  $A = \{\underline{S}(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$  delle somme integrali inferiori di  $f$  e l'insieme  $B = \{\overline{S}(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$  delle somme integrali superiori di  $f$  sono due insiemi separati. Dimostrazione.
- Definizione di funzione integrabile in  $[a, b]$ . Definizione di integrale  $\int_a^b f = \sup(A) = \inf(B)$ .
- Criterio di integrabilità. Dimostrazione.

### Lezione 29 (giovedì 5/12/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Definizione di  $\int_b^a f$  e di  $\int_a^a f$ .
- Proprietà dell'integrale: (1) additività; (2) linearità; (3) confronto; (4) disuguaglianza fondamentale  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ . (Senza dimostrazione).
- Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Dimostrazione.
- Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Dimostrazione.
- Esempio di funzione limitata che non è integrabile:  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  se  $x \in \mathbb{Q}$ , e  $f(x) = 1$  se  $x \notin \mathbb{Q}$ . (Dimostrazione: esercizio facoltativo).
- Integrale delle funzioni costanti: area del rettangolo.
- Definizione di media integrale.
- Primo teorema della media integrale (per funzioni limitate integrabili). Dimostrazione.
- Secondo teorema della media integrale (per funzioni continue). Dimostrazione.
- Definizione di primitiva di una funzione.
- Proposizione: sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, e sia  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $f$ . Allora una funzione  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $f$  se e solo se esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $G(x) = F(x) + c$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Dimostrazione.
- Applicazione della formula di Taylor per stabilire se un punto è di massimo/minimo relativo.

### Lezione 30 (venerdì 6/12/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

- Definizione di funzione integrale  $I(x)$  di punto iniziale  $a$ :  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ .
- Teorema fondamentale del calcolo integrale:  $I(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ . Dimostrazione.

- Formula fondamentale del calcolo integrale: se  $F$  è una primitiva di  $f$ , allora  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ . Dimostrazione.
- Definizione di integrale indefinito.
- Integrale indefinito (cioè primitive) delle funzioni elementari. Integrali immediati.
- Integrale indefinito: integrazione per sostituzione (come conseguenza della regola della derivata di funzione composta). Regola di trasformazione del “ $dx$ ”.
- Integrale indefinito: integrazione per parti (come conseguenza della regola della derivata del prodotto di due funzioni).
- Calcolo di integrali indefiniti con varie tecniche.
- Integrale definito: integrazione per sostituzione.

### Lezione 31 (mercoledì 11/12/2013, ore 9-11, durata 2)

- Integrazione di funzione razionale  $\frac{N(x)}{D(x)}$ ,  $N(x)$ ,  $D(x)$  polinomi: richiamo alla divisione tra polinomi con quoziente e resto. Calcolo di  $\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c} dx$  nei tre casi  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$ .
- Formula per l'area della regione piana compresa tra due grafici di funzione.
- Definizione di integrale generalizzato. Calcolo di alcuni integrali generalizzati.
- Proposizione: se  $f(x) = o(x^n)$  per  $x \rightarrow 0$ , e  $f$  è continua in  $(-M, M)$ , allora la funzione integrale  $I(x) = \int_0^x f$  è  $I(x) = o(x^{n+1})$  per  $x \rightarrow 0$ . Dimostrazione.
- Osservazione: se  $f(x) \geq 0$ , allora la funzione integrale  $I(x) = \int_a^x f$  è crescente, e dunque ha limite per  $x \rightarrow +\infty$  (finito oppure  $+\infty$ ).

### Lezione 32 (giovedì 12/12/2013, ore 16:30-18:30, durata 2)

- Formule di trigonometria utili per risolvere alcuni integrali per sostituzione: le formule parametriche  $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , dove  $t = \tan(x/2)$ . Dimostrazione. Utilizzo di tali formule negli integrali.
- Teorema di confronto per gli integrali generalizzati. Dimostrazione.

Serie.

- Definizioni: serie, termine generale di una serie, somma parziale  $n$ -esima di una serie, somma di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Carattere di una serie.
- Condizione necessaria per la convergenza di una serie: se una serie converge, allora il suo termine generale è necessariamente infinitesimo. Dimostrazione.
- Osservazione: le serie a termine generale  $a_n$  definitivamente  $\geq 0$  convergono o divergono a  $+\infty$ , ma non sono mai indeterminate. Dimostrazione.
- La serie geometrica di ragione  $p$ . Dimostrazione.

### Lezione 33 (venerdì 13/12/2013, ore 8:30-11, durata 2:30)

- La serie geometrica convergente che non parte da zero:  $\sum_{k=m}^{\infty} p^k = \frac{p^m}{1-p}$ . Dimostrazione.
- La serie armonica. Disuguaglianza per la somma parziale:  $\log(n+1) \leq s_n \leq \log(n) + 1$ . Conseguenza:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$ . Dimostrazione.
- La serie armonica generalizzata. Dimostrazione (dettagli per esercizio: adattare la dimostrazione della serie armonica).
- Criterio del confronto per le serie. Dimostrazione.
- Criterio degli infinitesimi e del confronto asintotico per le serie. Dimostrazione.
- Applicazione del criterio del confronto asintotico per le serie, combinato con gli sviluppi di Taylor, per studiare il carattere delle serie.

### Lezione 34 (mercoledì 18/12/2013, ore 9-11, durata 2)

- Criterio del rapporto per le serie a termini definitivamente  $> 0$ . Dimostrazione.
- Esempio: la serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .
- Criterio della radice per le serie a termini definitivamente  $\geq 0$ . Dimostrazione.
- Definizione di serie assolutamente convergente.
- Teorema: la convergenza assoluta di una serie implica la sua convergenza. Dimostrazione.
- Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno. (Senza dimostrazione).
- Esempio classico di serie che converge ma non converge assolutamente:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

### Lezione 35 (giovedì 19/12/2013, ore 14:45-17:15, durata 2:30)

- Criterio del rapporto e della radice per le successioni. Dimostrazione.
- Teorema: formula di Taylor con resto in forma integrale. Dimostrazione.
- Teorema: formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange. Dimostrazione.
- Definizione di serie di Taylor per funzioni di classe  $C^{\infty}$ .
- Reinterpretazione della serie geometrica: la funzione  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  coincide con la sua serie di Taylor, che è convergente, per ogni  $x \in (-1, 1)$ .
- Teorema: condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor. Dimostrazione.
- Esempi più importanti: le funzioni seno, coseno, exp sono sviluppabili in serie di Taylor, in tutto  $\mathbb{R}$ . In particolare,  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- Produttorie: in analogia con le serie, si definisce  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  il limite, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)$ .
- Proposizione: sia  $a_n \geq 0$ , e  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Allora  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$  converge se e solo se la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge. Dimostrazione.
- L'esponenziale complesso rivisto alla luce delle serie di Taylor di seno, coseno ed esponenziale:  $e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = (1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \frac{\vartheta^6}{6!} + \dots) + i(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \dots) = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$ .

### Lezione 36 (venerdì 20/12/2013, ore 9-11, durata 2)

- Seconda prova scritta intercorso.
- Svolgimento degli esercizi della prova.