Pietro Baldi

Analisi matematica I

Programma d'esame, anno accademico 2013-2014

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica, cognomi A-I.

Il libro di testo adottato durante il corso è *Analisi Matematica Uno*, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori Editore, e l'eserciziario allegato, *Esercizi di Matematica*, Volume I, Tomi 1,2,3,4.
Un altro testo consultato è *Analisi Uno*, G. De Marco, Zanichelli.

Gli esercizi assegnati per casa, gli esercizi svolti a lezione e gli esercizi delle dispense (file pdf sul sito docenti) sono parte integrante e fondamentale del corso di Analisi matematica I.

Numeri reali, naturali, interi, razionali

- I numeri reali. Assiomi relativi alle operazioni, relativi all'ordinamento e assioma di completezza.
- Conseguenze: regole pratiche di calcolo. Dimostrazione.
- Regole di calcolo con le disuguaglianze.
- Intervalli in $\mathbb{R}$: definizione.
- Il modulo di un numero reale: definizione, interpretazione di $|x|$ come distanza tra i punti x e 0 sulla retta dei numeri reali. Proprietà del modulo.
- Proposizione: $|x| < R \iff -R < x < R$. Dimostrazione.
- La disuguaglianza triangolare. Dimostrazione. La disuguaglianza per la differenza dei moduli. Dimostrazione.
- Massimo $\max(A)$ e minimo $\min(A)$ di un insieme A (non vuoto) di numeri reali: definizione.
- Unicità del massimo e del minimo di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Maggiorante, minorante di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$: definizione.
- Insiemi limitati, limitati superiormente, limitati inferiormente: definizione.
- Proposizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che $A \subseteq [-M, M]$, cioè $|a| \leq M$ per ogni $a \in A$. Dimostrazione.
- Teorema di esistenza del sup e dell'inf. Definizione dell'estremo superiore $\sup(A)$ e dell'estremo inferiore $\inf(A)$ di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrazione del teorema.
- Caratterizzazione del sup e dell'inf. Dimostrazione.
- Proposizione: se un insieme A ha minimo, allora $\min(A) = \inf(A)$; simile per il massimo. Dimostrazione.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. (Convenzione: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, cioè $0 \notin \mathbb{N}$).
- Proprietà di Archimede: siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nb > a$. Dimostrazione.
- Corollario: $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente. Dimostrazione.
- Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q \in (a, b)$. Dimostrazione.
- Proprietà degli interi: 1) se $A \subseteq \mathbb{Z}$ è limitato inferiormente, allora A ha minimo; 2) se $A \subseteq \mathbb{Z}$ è limitato superiormente, allora A ha massimo; 3) se $A \subseteq \mathbb{N}$, allora A ha minimo.
- Prodotti e somme di numeri pari/dispari. Dimostrazione.
- Proposizione: non esiste alcun numero razionale $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$. Dimostrazione.
- Proposizione: $\mathbb{Q}$ non è completo. Dimostrazione.
- Disuguaglianza: $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Equazioni e disequazioni di primo grado con uno o più moduli.
- Il principio di induzione. Dimostrazione.
- Disuguaglianza di Bernoulli: $(1 + a)^n \geq 1 + na$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a \geq -1$. Dimostrazione.

- Il simbolo $\sum$ di sommatoria e $\prod$ di produttoria. Proprietà: $c\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n ca_k$ (proprietà distributiva della somma) e $(\prod_{k=1}^n a_k)^p = \prod_{k=1}^n a_k^p$ (regole delle potenze).
- Proposizione: per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, si ha $\inf(A) \leq \sup(A)$. Dimostrazione.
- Proposizione: se $A \subseteq B$ sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, allora $\inf(B) \leq \inf(A)$, e $\sup(B) \geq \sup(A)$ (insiemi più grandi danno più scelta nella ricerca dell'inf e del sup). Dimostrazione.
- Corollario: se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ed $E \subseteq [a, b]$ non vuoto, allora $\inf(E), \sup(E) \in [a, b]$. Dimostrazione.

Potenze, esponenziali, logaritmi

- Potenze con esponente intero positivo: a^n, definita per base $a \in \mathbb{R}$ ed esponente $n \in \mathbb{N}$. Regole delle potenze. Segno di potenze pari/dispari.
- Potenze ad esponente zero: definiamo $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Potenze con esponente intero negativo: a^m, definita per base $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ed esponente $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq -1$.
- Definizione di radice quadrata: dato un numero reale $a \geq 0$, la sua radice quadrata è quel numero reale $b \geq 0$ tale che $b^2 = a$.
- Relazione tra radice, quadrato e modulo: $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Potenza $a^{1/n}$, definita per base $a \geq 0$ ed esponente $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, cioè definizione di radice n-esima: dato un numero reale $a \geq 0$, la sua radice n-esima è quel numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. (Osservazione: se n è dispari, la radice n-esima $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ si può definire anche per $a < 0$).
- Potenze ad esponente razionale a^p, definite per base $a > 0$ ed esponente $p = m/n \in \mathbb{Q}$.
- Potenze ad esponente reale a^p, definite per $a, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
- Regole delle potenze di base positiva ed esponente reale.
- Disuguaglianze per le potenze: (1) $a^p > 0$ per ogni $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$; (2) Confronto tra a^p e b^p (basi diverse $0 < a < b$ e stesso esponente $p \in \mathbb{R}$); (3) Confronto tra a^p e a^q (stessa base $a > 0$ ed esponenti diversi $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$). Esempi.
- Potenze con base e.
- Logaritmo di base $a > 0$, $a \neq 1$, logaritmo naturale: definizione, proprietà. Dimostrazione.
- Formula della differenza di potenze $a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$. (Dimostrazione: esercizio facoltativo).
- Definizione: il fattoriale $n!$, il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$.
- Formula per le potenze del binomio: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$. (Dimostrazione: esercizio facoltativo).
- Equazioni di secondo grado del tipo $x^2 = p$. Equazioni di secondo grado del tipo generale $ax^2+bx+c = 0$. Ruolo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Costruzione della formula delle soluzioni $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Fattorizzazione del polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$: se $\Delta \geq 0$ e u, v sono le sue radici, allora $ax^2 + bx + c = a(x - u)(x - v)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Segno del polinomio di secondo grado, disequazioni di secondo grado.
- Disequazioni con radici, moduli, logaritmi.
- Non esiste $C > 0$ tale che $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.

Trigonometria

- Misura degli angoli in radianti.
- Definizione geometrica di $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$.
- Identità fondamentale $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ (teorema di Pitagora).
- Disuguaglianze immediate: $|\cos(\alpha)| \leq 1$, $|\sin(\alpha)| \leq 1$ (i cateti sono più corti dell'ipotenusa).
- Uguaglianze (che si ricavano in modo elementare dalle similitudini dei triangoli): (1) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; (2) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$; (3) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$; (4) $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$; (5) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$; (6) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$; (7) $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$; (8) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$; (9) $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
- Formule di addizione, di duplicazione, di bisezione, di prostaferesi, di Werner.
- Valori di seno e coseno di angoli notevoli: 0, π, 2π, $\pi/2$, $3\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/6$.

- Definizione di tangente: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Interpretazione geometrica della tangente (usando la similitudine dei triangoli).
- Definizione delle funzioni trigonometriche inverse: arcsin, arccos, arctan.
- Disuguaglianza trigonometrica: (1) $|\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; (2) $|\sin(x)| < |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Dimostrazione.
- Disuguaglianza trigonometrica: per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \neq 0$, si ha $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$. Dimostrazione.
- Disuguaglianze trigonometriche: (1) $|\sin(\alpha) - \sin(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; (2) $|\cos(\alpha) - \cos(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Formule parametriche $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, dove $t = \tan(x/2)$. Dimostrazione.

I numeri complessi

- Definizione: l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.
- L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{z : z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Operazioni con i numeri complessi: somma, prodotto, opposto, inverso.
- Rappresentazione grafica: il piano complesso.
- Definizione di complesso coniugato: se $u = a + ib$¡ con $a, b \in \mathbb{R}$, definiamo $\bar{u} = a - ib$. Proprietà del coniugio.
- Definizione di modulo di un numero complesso: se $u = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, definiamo $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Teorema di Pitagora: $|u|$ è la distanza del punto u dall'origine. Proprietà del modulo.
- Rappresentazione grafica: dato $u \in \mathbb{C}$, disegnare $\bar{u}$ e $-u$. Significato geometrico della disuguaglianza triangolare.
- Formula: $u\bar{u} = |u|^2$ per ogni $u \in \mathbb{C}$. Formula dell'inverso: $u^{-1} = \bar{u}/|u|^2$ per ogni $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$.
- Rappresentazione dei numeri complessi in coordinate polari: $a + ib = \rho\cos(\vartheta) + i\rho\sin(\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$. L'esponenziale complesso: per $\vartheta \in \mathbb{R}$, si definisce $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$. Se $u = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora $e^u = e^{a+ib} = e^a\cos(b) + ie^a\sin(b)$.
- Proprietà dell'esponenziale complesso: $e^u e^v = e^{u+v}$ per ogni $u, v \in \mathbb{C}$.
- Applicazione dell'esponenziale complesso per ricavare le formule della trigonometria. Formula generale $\cos(nx) + i\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$.
- Calcolo delle radici complesse dei polinomi di secondo grado aventi $\Delta < 0$.
- Costruzione delle radici terze dell'unità, cioè soluzioni dell'equazione $x^3 = 1$ in $\mathbb{C}$, usando le coordinate polari. Costruzione delle radici quarte dell'unità, cioè soluzioni dell'equazione $x^4 = 1$ in $\mathbb{C}$, usando le coordinate polari.

Funzioni elementari e generalità

- Definizione di insieme prodotto $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.
- Piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, corrispondenza tra punti del piano e coppie (a, b) di numeri reali. Ascissa, ordinata.
- Definizione di funzione $f : A \to B$ di dominio A e codominio B.
- Definizione di grafico di funzione: $G_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$.
- Proposizione: sia $G_f \subset \mathbb{R}^2$ il grafico di una funzione. Allora ogni retta verticale interseca G_f in al più un punto.
- Grafico della funzione polinomiale di primo grado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$: le rette. Significato geometrico dei coefficienti m, q.
- Definizione di funzione crescente, decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona.
- Definizione di funzione costante.

- Grafico della funzione polinomiale di secondo grado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$: le parabole con l'asse verticale. Significato geometrico del segno del coefficiente a.
- Grafico della funzione potenza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, con esponente $n \in \mathbb{N}$.
- Simmetrie: definizione di funzione pari ($f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in A$) e di funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in A$). Significato geometrico: il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.
- Grafico della funzione potenza $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^m$, con esponente $m \in \mathbb{Z}$ (base: $x \neq 0$).
- Grafico della funzione potenza $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, con esponente reale $p \in \mathbb{R}$ (base: $x > 0$). Distinzione qualitativa dei grafici: $p > 1$, $p = 1$, $p \in (0, 1)$, $p = 0$, $p < 0$.
- Grafico della funzione esponenziale di base $a > 0$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Distinzione qualitativa dei grafici: $a \in (0, 1)$, $a = 1$, $a > 1$. Caso notevole $f(x) = e^x = \exp(x)$, esponenziale di base e.
- Grafico della funzione logaritmo di base $a > 0$, $a \neq 1$: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a(x)$. Distinzione qualitativa dei grafici: $a \in (0, 1)$, $a > 1$. Caso notevole: logaritmo naturale (base e).
- Grafico delle funzioni trigonometriche: la funzione seno $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, la funzione coseno $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, la funzione tangente $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, la funzione arctangente $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, la funzione arcseno $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, la funzione arccoseno $\arcsin : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- Definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T.
- La funzione segno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ se $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ se $x < 0$. Il suo grafico G_f.
- La funzione parte intera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Il suo grafico G_f.
- La funzione parte frazionaria: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$. Il suo grafico G_f. È una funzione periodica.
- Definizione di funzione pari/dispari.
- Le funzioni seno iperbolico $\sinh(x)$ e coseno iperbolico $\cosh(x)$. Proprietà: cosh è pari; sinh è dispari; $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Proprietà delle funzioni pari/dispari.
- Definizione di funzione $f : A \to B$ iniettiva sul dominio A.
- Definizione di funzione $f : A \to B$ suriettiva sul codominio B.
- Definizione di funzione $f : A \to B$ biiettiva o invertibile dal dominio A al codominio B. Definizione di funzione inversa $f^{-1} : B \to A$. Uguaglianze della funzione inversa: (1) $f(f^{-1}(b)) = b$ per ogni $b \in B$; (2) $f^{-1}(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$.
- Osservazione: se f è iniettiva, allora ogni retta orizzontale interseca il suo grafico G_f in al più un punto. Se f è suriettiva, allora ogni retta orizzontale interseca il suo grafico G_f in almeno un punto. Se f è biiettiva, allora ogni retta orizzontale interseca il suo grafico G_f in esattamente un punto.
- Definizione di immagine $f(A)$ di un insieme A tramite la funzione f.
- Definizione di anti-immagine $f^{\leftarrow}(E)$ di un insieme $E \subseteq B$ tramite la funzione f.

Successioni

- Successioni di numeri reali. Definizione di limite di una successione (limite finito, $+\infty$, $-\infty$).
- Definizione di successione costante, o definitivamente costante.
- Definizione di "definitivamente" nel contesto delle successioni.
- Successioni che non hanno limite: esempio principale: $a_n = (-1)^n$.
- Proposizione: sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Allora $a = 0$. Dimostrazione.
- Unicità del limite di successione. Dimostrazione.
- Scritture equivalenti: $a_n \to c$ se e solo se $(a_n - c) \to 0$ se e solo se $|a_n - c| \to 0$. Dimostrazione.
- Proposizione ("*limite dominato*"): se $|a_n - c| \leq b_n$ definitivamente, e $b_n \to 0$, allora $a_n \to c$. Dimostrazione.
- Il limite del modulo: se $a_n \to c$, allora $|a_n| \to |c|$. Dimostrazione.
- Definizione di successione limitata.
- Esistono successioni limitate che non hanno limite (esempio: $a_n = (-1)^n$).
- Proposizione: ogni successione convergente è limitata. Dimostrazione.

- Proposizione: dato $C > 0$, si ha $a_n \to a$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a| < C\varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dimostrazione.
- Definizione di successione infinitesima.
- Proposizione: se a_n è infinitesima e b_n è limitata, allora la successione $(a_n b_n)$ è infinitesima. Dimostrazione.
- Teorema della permanenza del segno per le successioni: se $a_n \to a$ e $a > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente; simile per $a < 0$. Dimostrazione.
- Corollario (del teorema della permanenza del segno per successioni): se $a_n \geq 0$ definitivamente e $a_n \to a$, allora $a \geq 0$; simile per $a_n \leq 0$. Dimostrazione. (Questo corollario si può rienunciare così: le disuguaglianze larghe passano al limite).
- Osservazione: le disuguaglianze strette, passando al limite, diventano larghe; esempio: $a_n = 1/n > 0$ per ogni n, ma $\lim a_n = 0$.
- Operazioni con i limiti finiti: somma $a_n + b_n$, prodotto $a_n b_n$, opposto $-a_n$, inverso $1/a_n$ di successioni convergenti. Dimostrazione.
- Corollario 2 (del teorema della permanenza del segno per successioni): (1) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e $a_n \to a$, $b_n \to b$, allora $a \leq b$; (2) se $a_n \leq b$ definitivamente, e $a_n \to a$, allora $a \leq b$; simile per $a_n \geq b$. Dimostrazione.
- Teorema dei carabinieri (per le successioni). Dimostrazione.
- Operazioni con i limiti infiniti: somma, prodotto, opposto, inverso.
- Tecniche di calcolo dei limiti (principio generale del "mettere in evidenza la parte principale").
- Limiti notevoli di trigonometria: (1) se $a_n \to 0$, allora $\sin(a_n) \to 0$, $\cos(a_n) \to 1$. (2) Se $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0$, allora $\sin(a_n)/a_n \to 1$. Dimostrazione.
- Teorema di confronto (per successioni): (1) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e $a_n \to +\infty$, allora anche $b_n \to +\infty$; (2) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e $b_n \to -\infty$, allora anche $a_n \to -\infty$. Dimostrazione.
- Limite notevole per le potenze: $\lim_{n\to+\infty} a^n$ nei casi $a > 1$, $a = 1$, $a \in (-1, 1)$, $a \leq -1$. Dimostrazione.
- Definizione di successione crescente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona.
- Teorema sulle successioni monotone: (1) ogni successione monotona ha limite; (2) ogni successione monotona limitata converge. Dimostrazione.
- La successione che definisce il numero e: la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente e limitata. Dimostrazione.
- Definizione del numero di Nepero: $e := \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.
- Proposizione: per ogni $x \in \mathbb{R}$, la successione $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ è definitivamente crescente e limitata. (Senza dimostrazione).
- Definizione dell'esponenziale: $e^x = \exp(x) = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$. Proprietà dell'esponenziale.
- Limiti notevoli per l'esponenziale: (1) se $a_n \to +\infty$, allora $e^{a_n} \to +\infty$; (2) se $a_n \to -\infty$, allora $e^{a_n} \to 0$; (3) se $a_n \to c$, $c \in \mathbb{R}$, allora $e^{a_n} \to e^c$; (4) se $a_n \to 0$, con $a_n \neq 0$, allora $\frac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1$. (Senza dimostrazione).
- Limiti di esponenziali con base $a > 0$, $a \neq 1$. (Senza dimostrazione).
- Limiti notevoli per il logaritmo: (1) se $a_n \to +\infty$, allora $\log(a_n) \to +\infty$; (2) se $a_n \to 0$, $a_n > 0$, allora $\log(a_n) \to -\infty$; (3) se $a_n \to c$, $c > 0$, allora $\log(a_n) \to \log(c)$; (4) se $a_n \to 0$, $a_n > 0$, allora $\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \to 1$. (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: se $x_n \to \pm\infty$, allora $(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} \to e$. (Senza dimostrazione).
- Limiti di potenze del tipo $a_n^{b_n}$ in cui sia la base a_n che l'esponente b_n dipendono da n: (1) se $a_n \to a$, $b_n \to b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora $a_n^{b_n} \to a^b$; (2) se $a_n \to a$, $a > 1$, e $b_n \to +\infty$, allora $a_n^{b_n} \to +\infty$; (3) se $a_n \to a$, $a > 1$, e $b_n \to -\infty$, allora $a_n^{b_n} \to 0$; (4) se $a_n \to a$, $a \in (0, 1)$, e $b_n \to +\infty$, allora $a_n^{b_n} \to 0$; (5) se $a_n \to a$, $a \in (0, 1)$, e $b_n \to -\infty$, allora $a_n^{b_n} \to +\infty$. (Se invece $a_n \to 1$ e $b_n \to \pm\infty$, allora si ha una forma indeterminata del tipo "1^∞"; se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0$, allora si ha una forma indeterminata del tipo "∞^0"). (Senza dimostrazione).

- Limite notevole: confronto tra logaritmo, esponenziale e potenze polinomiali. Se $p > 0$, $x_n \to +\infty$, allora $\frac{\log(x_n)}{x_n^p} \to 0$, $\frac{\exp(x_n)}{x_n^p} \to +\infty$ (i logaritmi tendono a $+\infty$ più lentamente di qualunque potenza; gli esponenziali tendono a $+\infty$ più velocemente di qualunque potenza). (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: se $p \in \mathbb{R}$, $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$, allora $\frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} \to p$. (Senza dimostrazione).
- Successioni definite per ricorrenza: esempio $a_{n+1} = a_n^2$.

Limiti di funzioni

- Definizione di punto di accumulazione di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.
- Definizione di punto isolato di un insieme.
- Definizione: si dice che $+\infty$ è di accumulazione per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se A è illimitato superiormente. Simile per $-\infty$.
- Caratterizzazione dei punti di accumulazione: p è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione (a_n) tale che: (1) $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$; (2) $a_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$; (3) $a_n \to p$ per $n \to \infty$. Dimostrazione.
- Definizione di limite di funzione (definizione basata sulle successioni).
- Definizione di punto di accumulazione da destra/da sinistra di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Caratterizzazione dei punti di accumulazione da destra/sinistra.
- Definizione di limite destro/sinistro di funzione (definizione basata sulle successioni).
- Definizione di limite di funzione "con ε, δ".
- Teorema ponte: le due definizioni di limite di funzione (quella per successioni e quella ε, δ) sono equivalenti. (Senza dimostrazione).
- Tecniche di calcolo per limiti di funzione.
- Teorema della permanenza del segno (per limiti di funzione). Dimostrazione.
- Teorema dei carabinieri (per i limiti di funzione). Dimostrazione.
- Teorema di confronto (per i limiti di funzioni). Dimostrazione.
- Teorema sui limiti destro e sinistro di funzione: (1) se il limite $\lim_{x\to p} f(x)$ esiste e vale v, allora esistono sia il limite destro $\lim_{x\to p^+} f(x)$ che quello sinistro $\lim_{x\to p^-} f(x)$ e valgono entrambi v; (2) se il limite destro $\lim_{x\to p^+} f(x)$ e il limite sinistro $\lim_{x\to p^-} f(x)$ esistono e valgono entrambi v, allora esiste il limite $\lim_{x\to p} f(x)$ e vale v. Dimostrazione.

Funzioni continue

- Definizione di funzione continua in un punto p. Definizione di funzione continua in un insieme A.
- Osservazione: f è continua in p se e solo se $\lim_{x\to p} f(x) = f(\lim_{x\to p} x)$, cioè: le funzioni continue in p sono quelle per cui i simboli "f" e "$\lim_{x\to p}$" si possono scambiare.
- Le funzioni elementari: potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcseno, arccoseno, arctangente sono tutte continue, ciascuna nel proprio dominio. Esempio: la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (definita per $x \neq 0$) è continua in ogni punto $x \neq 0$, cioè è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- La funzione modulo $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Teorema della permanenza del segno per le funzioni continue: se f è continua in p e $f(p) > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ $\forall x \in A$, $|x - p| < \delta$. Dimostrazione.
- La composizione di funzioni: definizione. Continuità della funzione composta. Dimostrazione.
- Teorema di Weierstrass. Dimostrazione.
- Definizione di punto di minimo/punto di massimo per f in $[a, b]$ (è un punto x del dominio). Definizione di valor minimo/valor massimo di f in $[a, b]$ (è un valore $y = f(x)$ del codominio).
- Teorema dell'esistenza degli zeri. Dimostrazione.
- Primo teorema di esistenza dei valori intermedi: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Dimostrazione.
- Secondo teorema di esistenza dei valori intermedi: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra il suo valor minimo e il suo valor massimo in $[a, b]$. Dimostrazione.

- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette un'estratta convergente. Dimostrazione.
- Definizione di funzione uniformemente continua nel dominio.
- Teorema di Cantor dell'uniforme continuità: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è uniformemente continua in $[a, b]$. Dimostrazione.

Funzioni monotone

- Proposizione: (1) se f è strettamente monotona, allora è iniettiva. (2) Se f è strettamente monotona e suriettiva, allora è invertibile. Inoltre se f è strettamente crescente, allora anche la funzione inversa f^{-1} è strettamente crescente; se f è strettamente decrescente, allora anche f^{-1} è strettamente decrescente. Dimostrazione.
- Corollario: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strettamente monotona e continua. Sia m il valor minimo di f, e sia M il suo valor massimo. Allora $f : [a, b] \to [m, M]$ è invertibile. Dimostrazione.
- Teorema sui limiti di funzioni monotone: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescente (non necessariamente continua), e sia $p \in (a, b)$. Allora tutti i seguenti limiti esistono finiti, con queste disuguaglianze: $f(a) \le \lim_{x\to a^-} f(x) \le \lim_{x\to p^-} f(x) \le f(p) \le \lim_{x\to p^+} f(x) \le \lim_{x\to b^-} f(x) \le f(b)$. Simile se f è decrescente (cambiare verso alle disuguaglianze). (Senza dimostrazione).
- Criterio di continuità delle funzioni monotone: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è continua se e solo se f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. (Senza dimostrazione).
- Teorema di continuità della funzione inversa: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strettamente monotona. Se f è continua, allora anche la funzione inversa f^{-1} è continua. (Senza dimostrazione).

Calcolo differenziale

- Il coefficiente angolare della retta che unisce due punti $A = (p, f(p))$ e $B = (p + h, f(p + h))$ sul grafico G_f di una funzione f vale $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ e si chiama rapporto incrementale.
- Definizione di derivata di una funzione f nel punto p. Definzione di funzione derivabile nel punto p. Interpretazione geometrica: $f'(p)$ è la pendenza della retta tangente a G_f nel punto $(p, f(p))$.
- Definizione di funzione derivabile in un intervallo (a, b) o $[a, b]$.
- Definizione di derivata destra/sinistra.
- Calcolo delle derivate delle funzioni elementari: polinomi, potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno. Dimostrazione.
- Proposizione: la funzione radice quadrata $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in $[0, +\infty)$, è derivabile in $(0, +\infty)$, e non è derivabile in $x = 0$. Dimostrazione.
- Proposizione: la funzione modulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$, è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e non è derivabile in $x = 0$. Dimostrazione.
- Proposizione: se f è derivabile in p, allora f è continua in p. Dimostrazione.
- Derivata: (1) della somma $f(x) + g(x)$; (2) del prodotto $f(x)g(x)$; (3) di $\frac{1}{f(x)}$; (4) del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$; (5) della funzione composta $g(f(x))$. Dimostrazione di (1) (le altre la prossima lezione).
- Proposizione: (1) se f è derivabile in x, allora la funzione $R(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$ soddisfa $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$. Perciò si ha $f(x + h) = f(x) + f'(x)h + hR(h)$, e $R(h) \to 0$ per $h \to 0$. (2) Sia f una funzione che soddisfa $f(x + h) = f(x) + mh + hR(h)$, dove $m \in \mathbb{R}$ e $R(h) \to 0$ per $h \to 0$. Allora f è derivabile in x, e la sua derivata vale $f'(x) = m$. Dimostrazione.
- Derivata: (1) della somma $f(x) + g(x)$; (2) del prodotto $f(x)g(x)$; (3) di $\frac{1}{f(x)}$; (4) del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$; (5) della funzione composta $g(f(x))$. Dimostrazione di (2),(3),(4),(5).
- Derivata di $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$.
- Teorema: la derivata della funzione inversa. (Senza dimostrazione).
- Derivata di arcseno, arccoseno, arctangente.
- Definizione di derivata seconda $f''(x)$, derivata terza $f'''(x)$, ..., derivata n-esima $f^{(n)}(x)$.

- Definizione di funzione di classe $C^n(A)$ su un dominio $A \subseteq \mathbb{R}$. Definizione di funzione di classe $C^\infty(A)$.
- Esempio di funzione derivabile che non è di classe C^1: funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. f è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. La sua derivata $f'(x)$ non è continua in $x = 0$.
- Definizione di punto interno di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.
- Definizione di punto di minimo/massimo globale (o assoluto) e locale (o relativo) di una funzione.
- Teorema di Fermat. Dimostrazione.
- Teorema di Rolle. Dimostrazione.
- Teorema di Lagrange. Dimostrazione.
- Applicazione del teorema di Lagrange: le disuguaglianze $|\sin(x)| \leq |x|$, $|\cos(x)-1| \leq x^2$, $|\sin(x)-x| \leq x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Proposizione: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è costante se e solo se f è derivabile in $[a, b]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Dimostrazione.
- Criterio di monotonia per f dallo studio del segno di f'. Dimostrazione.
- Equazione della retta tangente al grafico G_f di f nel punto $(p, f(p))$: $y = f(p) + f'(p)(x - p)$.
- Definizione di funzione convessa/concava in un intervallo.
- Definizione di punto di flesso.
- Criterio di convessità per f dallo studio del segno di f''. (Senza dimostrazione).
- Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine per punti di massimo/minimo di una funzione. Dimostrazione.
- Definizione di asintoto orizzontale, obliquo, verticale per una funzione.
- Regola per il calcolo di un asintoto obliquo o orizzontale. Dimostrazione.
- Cosa si intende con "studio di funzione".
- Studio di funzione completo: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x$.
- Teorema di de l'Hôpital. (Senza dimostrazione).
- Definizione di polinomio di Taylor $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(p)(x - p)^k$ di ordine n, centrato nel punto p, per una funzione f derivabile n volte. Definizione di resto n-esimo $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$.
- Teorema della formula di Taylor con resto in forma di Peano. Dimostrazione.
- Calcolo dei polinomi di Taylor per le funzioni e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$ (in particolare $\sqrt{1 + x}$ e $\frac{1}{1+x}$) centrate in $p = 0$.
- Definizione di o piccolo.
- Regole per le operazioni con gli o piccolo. Dimostrazione.
- Sviluppi di Taylor e calcoli con gli o piccolo.
- Utilizzo della formula di Taylor per il calcolo degli asintoti orizzontali/obliqui di funzioni.
- Utilizzo della formula di Taylor per stabilire se un punto è di massimo/minimo relativo.

Integrali

- Idea geometrica: calcolare le aree per approssimazione con rettangoli.
- Definizione di partizione di un intervallo $[a, b]$.
- Definizione di somma integrale inferiore $\underline{s}(f, P)$ e somma integrale superiore $\overline{S}(f, P)$ di una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rispetto ad una partizione P di $[a, b]$.
- Lemma dei raffinamenti (raffinando una partizione, la somma integrale inferiore cresce, la somma integrale superiore cala). Dimostrazione.
- Lemma: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, e P, Q due partizioni di $[a, b]$. Allora $\underline{s}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$. In altri termini: l'insieme $A = \{\underline{s}(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$ delle somme integrali inferiori di f e l'insieme $B = \{\overline{S}(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$ delle somme integrali superiori di f sono due insiemi separati. Dimostrazione.
- Definizione di funzione integrabile in $[a, b]$. Definizione di integrale $\int_a^b f = \sup(A) = \inf(B)$.
- Criterio di integrabilità. Dimostrazione.
- Definizione di $\int_b^a f$ e di $\int_a^a f$.

- Proprietà dell'integrale: (1) additività; (2) linearità; (3) confronto; (4) disuguaglianza fondamentale $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. (Senza dimostrazione).
- Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Dimostrazione.
- Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Dimostrazione.
- Esempio di funzione limitata che non è integrabile: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = 1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. (Dimostrazione: esercizio facoltativo).
- Integrale delle funzioni costanti: area del rettangolo.
- Definizione di media integrale.
- Primo teorema della media integrale (per funzioni limitate integrabili). Dimostrazione.
- Secondo teorema della media integrale (per funzioni continue). Dimostrazione.
- Definizione di primitiva di una funzione.
- Proposizione: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora una funzione $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in [a,b]$. Dimostrazione.
- Definizione di funzione integrale $I(x)$ di punto iniziale a: $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale: $I(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Dimostrazione.
- Formula fondamentale del calcolo integrale: se F è una primitiva di f, allora $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Dimostrazione.
- Definizione di integrale indefinito.
- Integrale indefinito (cioè primitive) delle funzioni elementari. Integrali immediati.
- Integrale indefinito: integrazione per sostituzione (come conseguenza della regola della derivata di funzione composta). Regola di transformazione del "dx".
- Integrale indefinito: integrazione per parti (come conseguenza della regola della derivata del prodotto di due funzioni).
- Calcolo di integrali indefiniti con varie tecniche.
- Integrale definito: integrazione per sostituzione.
- Integrazione di funzione razionale $\frac{N(x)}{D(x)}$, $N(x)$, $D(x)$ polinomi: richiamo alla divisione tra polinomi con quoziente e resto. Calcolo di $\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx$ nei tre casi $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.
- Formula per l'area della regione piana compresa tra due grafici di funzione.
- Definizione di integrale generalizzato. Calcolo di alcuni integrali generalizzati.
- Proposizione: se $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$, e f è continua in $(-M, M)$, allora la funzione integrale $I(x) = \int_0^x f$ è $I(x) = o(x^{n+1})$ per $x \to 0$. Dimostrazione.
- Osservazione: se $f(x) \geq 0$, allora la funzione integrale $I(x) = \int_a^x f$ è crescente, e dunque ha limite per $x \to +\infty$ (finito oppure $+\infty$).
- Utilizzo delle formule parametriche di trigonometria per risolvere alcuni integrali per sostituzione.
- Teorema di confronto per gli integrali generalizzati. Dimostrazione.

Serie

- Definizioni: serie, termine generale di una serie, somma parziale n-esima di una serie, somma di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Carattere di una serie.
- Condizione necessaria per la convergenza di una serie: se una serie converge, allora il suo termine generale è necessariamente infinitesimo. Dimostrazione.
- Osservazione: le serie a termine generale a_n definitivamente ≥ 0 convergono o divergono a $+\infty$, ma non sono mai indeterminate. Dimostrazione.
- La serie geometrica di ragione p. Dimostrazione.
- La serie geometrica convergente che non parte da zero: $\sum_{k=m}^{\infty} p^k = \frac{p^m}{1-p}$. Dimostrazione.
- La serie armonica. Disuguaglianza per la somma parziale: $\log(n+1) \leq s_n \leq \log(n) + 1$. Conseguenza: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$. Dimostrazione.

- La serie armonica generalizzata. Dimostrazione (dettagli per esercizio: adattare la dimostrazione della serie armonica).
- Criterio del confronto per le serie. Dimostrazione.
- Criterio degli infinitesimi e del confronto asintotico per le serie. Dimostrazione.
- Applicazione del criterio del confronto asintotico per le serie, combinato con gli sviluppi di Taylor, per studiare il carattere delle serie.
- Criterio del rapporto per le serie a termini definitivamente > 0. Dimostrazione.
- Esempio: la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- Criterio della radice per le serie a termini definitivamente ≥ 0. Dimostrazione.
- Definizione di serie assolutamente convergente.
- Teorema: la convergenza assoluta di una serie implica la sua convergenza. Dimostrazione.
- Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno. (Senza dimostrazione).
- Esempio classico di serie che converge ma non converge assolutamente: $\sum_{n=1} \infty \frac{(-1)^n}{n}$.

- Criterio del rapporto e della radice per le successioni. Dimostrazione.
- Teorema: formula di Taylor con resto in forma integrale. Dimostrazione.
- Teorema: formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange. Dimostrazione.
- Definizione di serie di Taylor per funzioni di classe C^∞.
- Reinterpretazione della serie geometrica: la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ coincide con la sua serie di Taylor, che è convergente, per ogni $x \in (-1, 1)$.
- Teorema: condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor. Dimostrazione.
- Esempi più importanti: le funzioni seno, coseno, exp sono sviluppabili in serie di Taylor, in tutto $\mathbb{R}$. In particolare, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Produttorie: in analogia con le serie, si definisce $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ il limite, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)$.
- Proposizione: sia $a_n \geq 0$, e $a_n \to 0$ per $n \to 0$. Allora $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ converge se e solo se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Dimostrazione.
- L'esponenziale complesso rivisto alla luce delle serie di Taylor di seno, coseno ed esponenziale: $e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = (1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \frac{\vartheta^6}{6!} + \ldots) + i(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \ldots) = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$.