nello spazio delle fasi. Infatti, dopo averle poste nella forma normale [3.21], ossia $\ddot{\mathbf{q}} = \chi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, basta introdurre nello spazio delle fasi il campo $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \chi(\mathbf{q}, \mathbf{v}))$ per ottenere precisamente la [10.1].

10.1 DEFINIZIONE *Un punto $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio se la funzione costante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ è soluzione del sistema di equazioni differenziali* [10.1]. ■

10.1 PROPOSIZIONE *Un punto $\mathbf{x}_0$ è di equilibrio se e soltanto se in esso il campo vettoriale $\mathbf{w}$ si annulla: $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = 0$.*

Dimostrazione

Evidentemente in un punto di equilibrio il campo vettoriale $\mathbf{w}$ si annulla: infatti dalla definizione di punto di equilibrio segue che $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = \dot{\mathbf{x}}(t) = 0$. Viceversa, se $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = 0$ allora $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ è soluzione del sistema per ogni t. ■

La definizione di stabilità dell'equilibrio ricalca quella data nel capitolo 3 per il punto materiale.

10.2 DEFINIZIONE *Una posizione di equilibrio $\mathbf{x}_0$ si dice* stabile (secondo Lyapunov) *se per ogni intorno U del punto di equilibrio esiste un intorno U' tale che, qualunque sia la condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ scelta in U', la soluzione corrispondente $\mathbf{x}(t)$ appartiene a U per tutti i tempi $t > 0$. Se è violata la condizione di stabilità, l'equilibrio si dice* instabile. ■

10.1 *Osservazione*

Usando intorni sferici, un enunciato di stabilità equivalente è il seguente: ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un numero $\delta > 0$ tale che, qualunque sia la condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ tale che $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$, si ha $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$ per tutti i tempi $t > 0$.

L'instabilità può essere invece caratterizzata così: esiste $\epsilon > 0$ tale che comunque fissato $\delta > 0$ esiste una condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ nell'intorno $|\mathbf{x}(0) - x_0| < \delta$ per cui $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| > \epsilon$ per un qualche $t > 0$.

Come è chiaro dalle definizioni, ci stiamo riferendo alla stabilità *nel futuro*, ma è possibile considerare l'analogo concetto *nel passato* invertendo il verso del tempo. ■

10.1 *Esempio*

Consideriamo un sistema di equazioni lineari in $\mathbf{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

dove A è una matrice $n \times n$ a coefficienti reali costanti e diagonalizzabile. Supponiamo che gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A siano distinti e diversi da zero. Come è noto, l'integrale

Da: A. Fasano, S. Marmi Meccanica Analitica

generale dell'equazione, è dato da

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{u}_j,$$

dove $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono gli autovettori di A. Le costanti c_j (in generale complesse) sono fissate dalle condizioni iniziali. Ovviamente $\mathbf{x} = 0$ è una posizione di equilibrio, ed è immediato verificare che è stabile ad esempio se la parte reale di *tutti* gli autovalori è negativa: $Re\lambda_j < 0, j = 1, \ldots, n$ (si usi la trasformazione lineare di coordinate che diagonalizza la matrice A). ■

L'analisi della stabilità dell'equilibrio per i sistemi a un solo grado di libertà è stata svolta nel capitolo 3 (§ 4). Procediamo ora allo studio del corrispondente problema per i sistemi lagrangiani autonomi con più di un grado di libertà.

Come sappiamo (§ 6), se $V(\mathbf{q})$ è l'energia potenziale, le equazioni di equilibrio sono

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, l. \qquad [10.2]$$

Sia $\overline{\mathbf{q}}$ una soluzione delle [10.2]. Dimostriamo il seguente criterio di stabilità, limitandoci per il momento al caso di vincoli lisci.

10.1 TEOREMA (di Dirichlet) *Se $\overline{\mathbf{q}}$ è un minimo isolato dell'energia potenziale, la corrispondente configurazione è di equilibrio stabile. Dimostrazione*

Per ipotesi $\overline{\mathbf{q}}$ risolve la [10.2] e quindi descrive una configurazione di equilibrio. Inoltre esiste un intorno $A \subset \mathbf{R}^l$ di $\overline{\mathbf{q}}$ nel quale $V(\mathbf{q}) > V(\overline{\mathbf{q}})$, $\forall\ \mathbf{q} \neq \overline{\mathbf{q}}$.

Possiamo senz'altro prendere $V(\overline{\mathbf{q}}) = 0$. Consideriamo ora un qualsiasi intorno $B \subset \mathbf{R}^{2l}$ del punto $(\overline{\mathbf{q}}, 0)$ nello spazio delle fasi e, per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo l'insieme di sub-livello dell'energia

$$\Omega_\varepsilon = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) | T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q}) < \varepsilon\}.$$

Ricordiamo che $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq a_0 |\dot{\mathbf{q}}^2|$ per qualche costante $a_0 > 0$ (teorema 3.1). Di conseguenza $\Omega_\epsilon \subset \Omega'_\epsilon = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mid a_0|\dot{\mathbf{q}}^2| + V(\mathbf{q}) < \epsilon\} \subset M_\epsilon \cap N_\epsilon$ dove $M_\epsilon = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mid |\dot{\mathbf{q}}| < (\epsilon/a_0)^{1/2}\}$, $N_\epsilon = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mid V(\mathbf{q}) < \epsilon\}$. Poiché nelle nostre ipotesi il diametro di $M_\epsilon \cap N_\epsilon$ tende a zero con ϵ, possiamo trovare ε sufficientemente piccolo in modo che sia $\Omega_\varepsilon \subset \Omega'_\epsilon \subset B \cap (A \times \mathbf{R}^l)$. È chiaro d'altra parte che ogni traiettoria che ha origine in Ω_ε deve rimanere in Ω_ε a causa della conservazione dell'energia. Risulta quindi verificata la condizione di stabilità (definizione 10.2). ■

10.1 COROLLARIO *Per un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci, nel quale le forze attive sono soltanto quelle dovute alla gravità, le configurazioni di equilibrio stabile si hanno in corrispondenza dei minimi isolati della quota del baricentro.* ■

10.2 *Esempio*

Con riferimento alla fig. 4.2, cap. 3, i punti di minimo isolato di $V(x)$, di ascissa x_2, x_4 individuano posizioni di equilibrio stabile. Esaminando per esempio il punto $(x_2, 0)$ nel piano delle fasi, si consideri un suo intorno generico U e si definisca $e_{\max} \in (e_2, e_3)$ tale che la traiettoria di energia $e_{\max}$ sia interamente contenuta in U. La regione delimitata da tale traiettoria contiene tutte le traiettorie con energia nell'intervallo $(e_2, e_{\max})$ e quindi la definizione di stabilità è rispettata. ∎

Vogliamo ora analizzare il moto in prossimità delle configurazioni di equilibrio stabile. Riscriviamo la lagrangiana del sistema

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\mathbf{q}), \qquad [10.3]$$

facendo comparire i vettori $\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{q}}$, dove $\overline{\mathbf{q}}$ è un minimo isolato di $V(\mathbf{q})$. Come abbiamo visto, è sempre possibile scegliere le condizioni iniziali in modo che la traiettoria nello spazio delle fasi resti in un prefissato intorno di $(\overline{\mathbf{q}}, 0)$. Prenderemo ora un intorno sufficientemente piccolo da poter trascurare in esso i termini dello sviluppo della funzione $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ di ordine superiore al secondo. Quindi sostituiremo la [10.3] con l'approssimazione quadratica

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{l} \overline{a}_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j - \sum_{i,j=1}^{l} \overline{V}_{ij} Q_i Q_j \right), \qquad [10.4]$$

dove abbiamo posto

$$\overline{a}_{ij} = a_{ij}(\overline{\mathbf{q}}), \qquad \overline{V}_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j}(\overline{\mathbf{q}}). \qquad [10.5]$$

Se indichiamo con $\overline{A}$ e con $\overline{V}$ le matrici simmetriche dei coefficienti $\overline{a}_{ij}$ e $\overline{V}_{ij}$ rispettivamente, la lagrangiana [10.3] si può riscrivere con la notazione matriciale

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{Q}}^T \overline{A} \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}^T \overline{V} \mathbf{Q}) \qquad [10.6]$$

e le equazioni di Lagrange ad essa associate sono lineari:

$$\overline{A} \ddot{\mathbf{Q}} + \overline{V} \mathbf{Q} = 0. \qquad [10.7]$$

Facciamo l'ipotesi che anche la matrice $\overline{V}$ sia definita positiva, e dimostriamo il seguente

10.2 Teorema *Se $\overline{A}, \overline{V}$ sono simmetriche e definite positive, esiste una trasformazione lineare in $\mathbb{R}^l$ che disaccoppia le* [10.7] *in l oscillazioni armoniche, dette* modi normali *del sistema e le cui frequenze sono dette* frequenze proprie *del sistema.*

Dimostrazione

Seguendo il procedimento standard per trovare l'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari e a coefficienti costanti, cerchiamo una soluzione della [10.7] della forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{w} e^{i\lambda t}, \qquad [10.8]$$

dove $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbb{R}^l$ da determinarsi e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sostituendo [10.8] in [10.7] troviamo

$$e^{i\lambda t} (\overline{V} - \lambda^2 \overline{A}) \mathbf{w} = 0$$

e siamo quindi condotti a studiare il problema generalizzato agli autovalori

$$\det(\mu \overline{A} - \overline{V}) = 0, \qquad [10.9]$$

che avrà, tenuto conto della molteplicità, l soluzioni $\mu_1, \ldots, \mu_l$ con i corrispondenti autovettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l$. Dimostreremo che nel nostro caso le l radici $\mu_1, \ldots, \mu_l$ sono positive. Il metodo consiste nell'applicare alla [10.7] una sequenza di trasformazioni lineari che la conducono alla forma diagonale. La scelta di ciascuna di tali trasformazioni deve obbedire al criterio di *conservare la simmetria* delle matrici dei coefficienti.

Poichè $\overline{A}$ è una matrice simmetrica e positiva, esiste un'unica matrice simmetrica e positiva il cui quadrato è uguale ad $\overline{A}$ e che pertanto indicheremo con $\overline{A}^{1/2}$ (la radice quadrata di $\overline{A}$). Infatti poichè $\overline{A}$ è simmetrica esiste una matrice ortogonale S che diagonalizza $\overline{A}$:

$$S\overline{A}S^{-1} = S\overline{A}S^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_l \end{pmatrix} \qquad [10.10]$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sono appunto gli autovalori di $\overline{A}$. La positività di $\overline{A}$ assicura che gli autovalori sono tutti positivi, e quindi possiamo definire

$$\overline{A}^{1/2} = S^T \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\alpha_l} \end{pmatrix} S. \qquad [10.11]$$

È immediato verificare che $\overline{A}^{1/2}$ è simmetrica e positiva e che $(\overline{A}^{1/2})^2 = \overline{A}$. Inoltre

$$\overline{A}^{-1/2} = S^T \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{\alpha_l} \end{pmatrix} S$$ è pure simmetrica. Mediante il cambiamento di variabili

$$\mathbf{Y} = \overline{A}^{1/2}\mathbf{Q} \qquad [10.12]$$

la [10.7] diventa

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \overline{A}^{-1/2}\,\overline{V}\,\overline{A}^{-1/2}\mathbf{Y} = 0, \qquad [10.13]$$

per cui la [10.9] equivale a

$$\det(\overline{A}^{-1/2}\,\overline{V}\,\overline{A}^{-1/2} - \mu) = 0. \qquad [10.14]$$

Evidentemente $\overline{A}^{-1/2}\,\overline{V}\,\overline{A}^{-1/2}$ è simmetrica e definita positiva, quindi i suoi autovalori $\mu_1, \dots, \mu_l$ sono reali e tutti positivi. Se ne conclude (cfr. esempio 10.1) che la configurazione $\overline{\mathbf{q}}$ è di equilibrio stabile per il sistema linearizzato. Posto allora

$$C = \overline{A}^{-1/2}\,\overline{V}\,\overline{A}^{-1/2}, \qquad [10.15]$$

se W è una matrice ortogonale che diagonalizza C, cioè

$$W^T C W = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_l \end{pmatrix}, \qquad [10.16]$$

definendo

$$\mathbf{Y} = W\mathbf{X}, \qquad [10.17]$$

la [10.13] si trasforma in

$$\ddot{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_l \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0, \qquad [10.18]$$

che rappresenta appunto l oscillazioni armoniche indipendenti di pulsazioni $\omega_i = \sqrt{\mu_i}$, $i = 1, \dots, l$ (modi normali). La trasformazione lineare che conduce ai modi normali è quindi

$$\mathbf{X} = W^T \overline{A}^{1/2}\mathbf{Q}. \qquad [10.19]$$

10.2 *Osservazione*

È bene ricordare che se C è una matrice simmetrica reale $\ell \times \ell$ con autovalori $(\mu_1, \dots, \mu_\ell)$, la matrice ortogonale W che diagonalizza C si costruisce nel modo seguente: si determinano facilmente ℓ vettori colonna $\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(\ell)}$ ortonormali tali che $(C - \mu_j)\mathbf{w}^{(j)} = 0$. La matrice $W = (\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(\ell)})$ è ortogonale e $W^T C W = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_l \end{pmatrix}$. Per esempio se $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$,

$$\mathbf{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$ ■

10.3 *Esempio*

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove sotto l'azione della forza peso su una superficie con equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)).$$

La lagrangiana del sistema è

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m(E(q_1, q_2)\dot{q}_1^2 + 2F(q_1, q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + G(q_1, q_2)\dot{q}_2^2) - mgz(q_1, q_2)$$

dove E, F e G sono i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie. Un punto $(\overline{q}_1, \overline{q}_2)$ è di equilibrio per il sistema solo se è un punto critico di $z = z(q_1, q_2)$. La lagrangiana delle equazioni linearizzate è

$$L = \frac{1}{2}(m(\overline{E}\dot{Q}_1^2 + 2\overline{F}\dot{Q}_1\dot{Q}_2 + \overline{G}\dot{Q}_2^2) - mg(\overline{z}_{11}Q_1^2 + 2\overline{z}_{12}Q_1Q_2 + \overline{z}_{22}Q_2^2)),$$

dove $\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}$, $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ sono i coefficienti della prima forma fondamentale calcolati in $\overline{\mathbf{q}}$, e

$$\overline{z}_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}(\overline{q}_1, \overline{q}_2), \quad \overline{z}_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}(\overline{q}_1, \overline{q}_2), \quad \overline{z}_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2}(\overline{q}_1, \overline{q}_2).$$

Le frequenze proprie ω_1 e ω_2 del sistema sono allora la soluzione del problema agli autovalori con polinomio caratteristico

$$\det\left(\omega^2 \begin{pmatrix} \overline{E} & \overline{F} \\ \overline{F} & \overline{G} \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_{12} & \overline{z}_{12} \end{pmatrix}\right) = 0.$$

D'altronde, se indichiamo con $\overline{e}$, $\overline{f}$ e $\overline{g}$ i coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie (cfr. appendice 3) calcolati in $(\overline{q}_1, \overline{q}_2)$, è immediato verificare che

$$\overline{e} = \overline{z}_{11}, \qquad \overline{f} = \overline{z}_{12}, \qquad \overline{g} = \overline{z}_{22}.$$