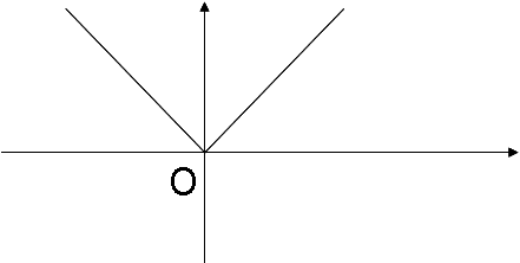
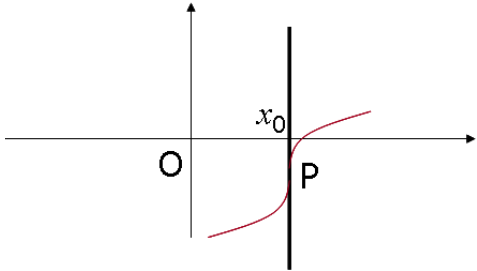
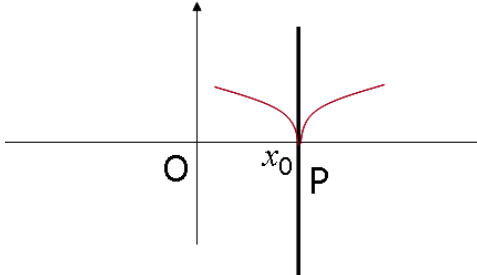


# **36. Funzioni non derivabili.**

**Punti angolosi, flessi a tangente verticale, cuspidi.**

# Riepilogo

Tipo di punto	Definizione	grafico
Punto angoloso	Se $f$ ammette in $x_0$ derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro	
flesso a tangente verticale	Se $f$ ammette in $x_0$ limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale uguali tra loro ma infiniti (cioè entrambi uguali a $+\infty$ o a $-\infty$ ),	
cuspidi	Se $f$ ammette in $x_0$ limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale diversi tra loro ed infiniti (cioè l'uno uguale a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$ o viceversa),	

# Funzione non derivabile in un punto

Vediamo ora cosa succede graficamente quando una funzione  $f$  non è derivabile in un punto

# Funzione non derivabile in un punto: esempio

$$f(x) = |x|$$

Tale funzione è definita e continua in tutto  $\mathbb{R}$

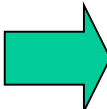
Quindi, in particolare, è definita e continua nel punto  $x_0 = 0$

Verifichiamo ora se  $f(x)$  è anche derivabile nel punto  $x_0 = 0$

# Funzione non derivabile in un punto: esempio

A tale proposito, costruiamone il rapporto incrementale nel caso in cui  $x_0 = 0$ :

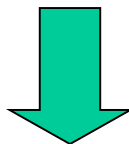
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = (\text{essendo } f(x) = |x|)$$
$$= \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{cases}$$

# Funzione non derivabile in un punto: esempio

La funzione  $f(x) = |x|$  ammette nel punto  $x_0 = 0$  derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro

$$f'_+(x_0) = 1 \quad \text{ed} \quad f'_-(x_0) = -1$$



La funzione  $f(x) = |x|$  non è derivabile nel punto  $x_0 = 0$  (pur essendo continua in tale punto) ed il punto  $x_0$  è detto

**punto angoloso**

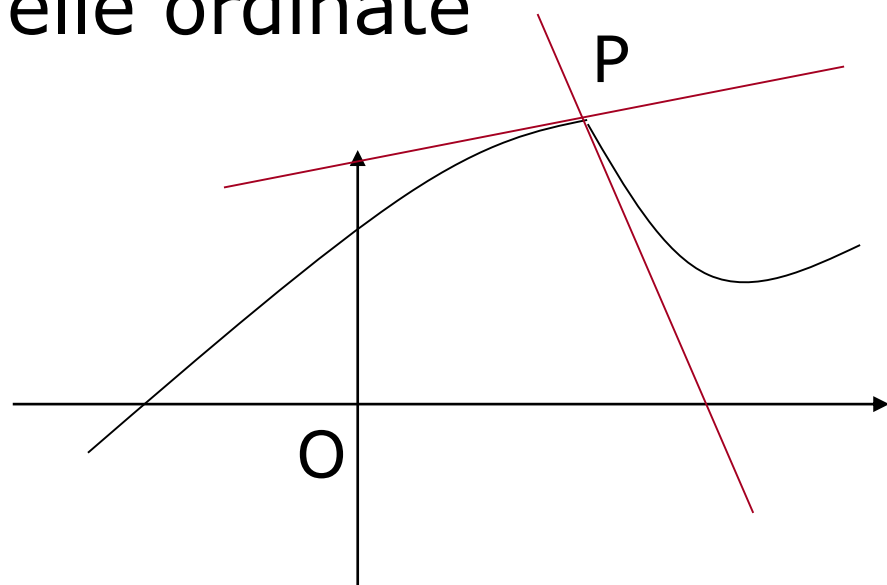
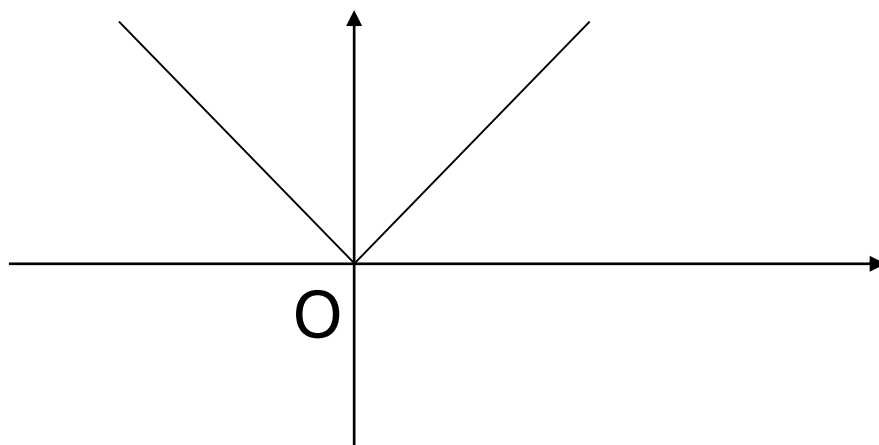
## Punto angoloso: definizione

Def. Sia assegnata una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$  e sia  $x_0$  un fissato punto interno all'intervallo  $[a,b]$ . Se  $f$  ammette in  $x_0$  derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro, allora  $f$  non è derivabile in  $x_0$  e si dice che il punto  $x_0$  è un **punto angoloso**

# Punto angoloso: grafico

Da un punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto angoloso  $x_0$  due rette tangenti (da destra e da sinistra) non parallele all'asse delle ordinate

$$f(x) = |x|$$



## Punto angoloso: osservazione

In generale, ogni funzione che presenta il valore assoluto nella propria espressione analitica non è derivabile nei punti  $x$  in cui si annulla l'argomento del valore assoluto.

E tali punti sono punti angolosi.

**Esempio 2.** Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

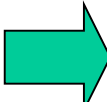
Anche tale funzione è definita e continua in tutto  $\mathbb{R}$

Quindi, in particolare, è definita e continua nel  
punto  $x_0 = 1$

Si verifica però che  $f(x)$  non è derivabile nel  
punto  $x_0 = 1$


A tale proposito, costruiamone il rapporto incrementale nel caso in cui  $x_0 = 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \left( \text{essendo } f(x) = \sqrt[3]{x-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt[3]{1+h-1} - \sqrt[3]{1-1}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h}\end{aligned}$$


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{2}{3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$


Tali limiti da destra e da sinistra, pur essendo uguali, non sono finiti

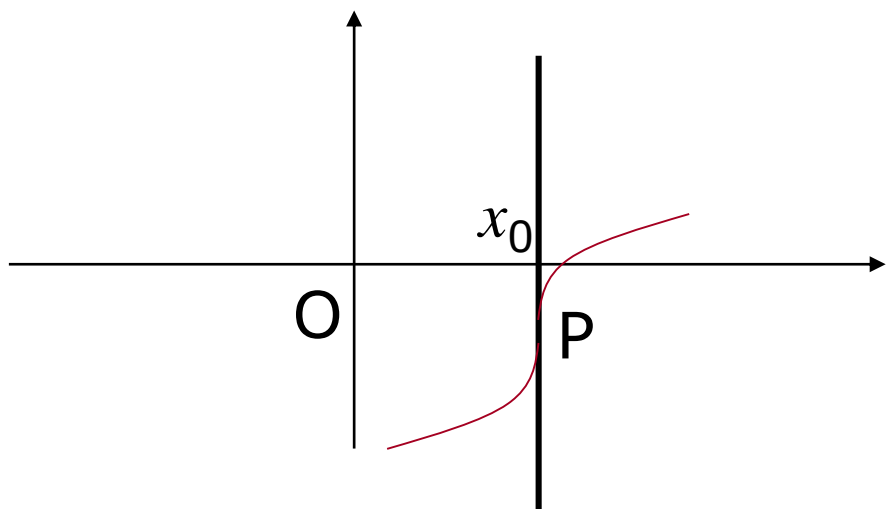
→ La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$  non è derivabile in  $x_0=1$  (pur essendo lì continua) e il punto  $x_0=1$  è detto

**flesso a tangente verticale**

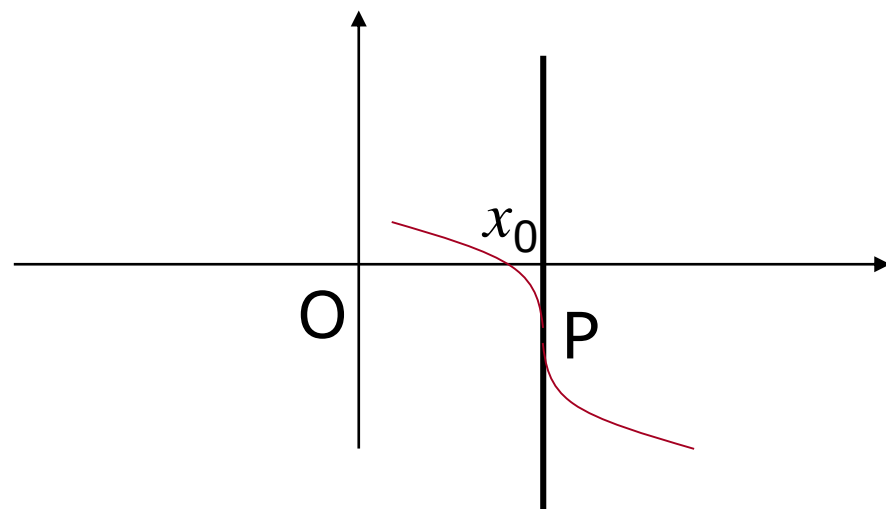
Più precisamente:

Def. Sia assegnata una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$  e sia  $x_0$  un fissato punto interno all'intervallo  $[a,b]$ . Se  $f$  ammette in  $x_0$  limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale uguali tra loro ma infiniti (cioè entrambi uguali a  $+\infty$  o a  $-\infty$ ), allora  $f$  non è derivabile in  $x_0$  e si dice che il punto  $x_0$  è un **flesso a tangente verticale**

Da un punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto di flesso a tangente verticale  $x_0$  retta tangente parallela all'asse delle ordinate



$$\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$



$$\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

**Esempio 3.** Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}$$

Anche tale funzione è definita e continua in tutto  $\mathbb{R}$

Quindi, in particolare, è definita e continua nel  
punto  $x_0 = 0$

Si verifica però che  $f(x)$  non è derivabile nel  
punto  $x_0 = 0$

A tale proposito, costruiamone il rapporto incrementale nel caso in cui  $x_0 = 0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \left( \text{essendo } f(x) = \sqrt[3]{|x|} \right)$$

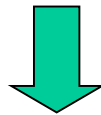
$$= \frac{\sqrt[3]{|h|} - |0|}{h} = \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h}$$

→  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{2}{h^3}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{\frac{2}{h^3}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \right) = -\infty \end{cases}$

Quindi, risulta che:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

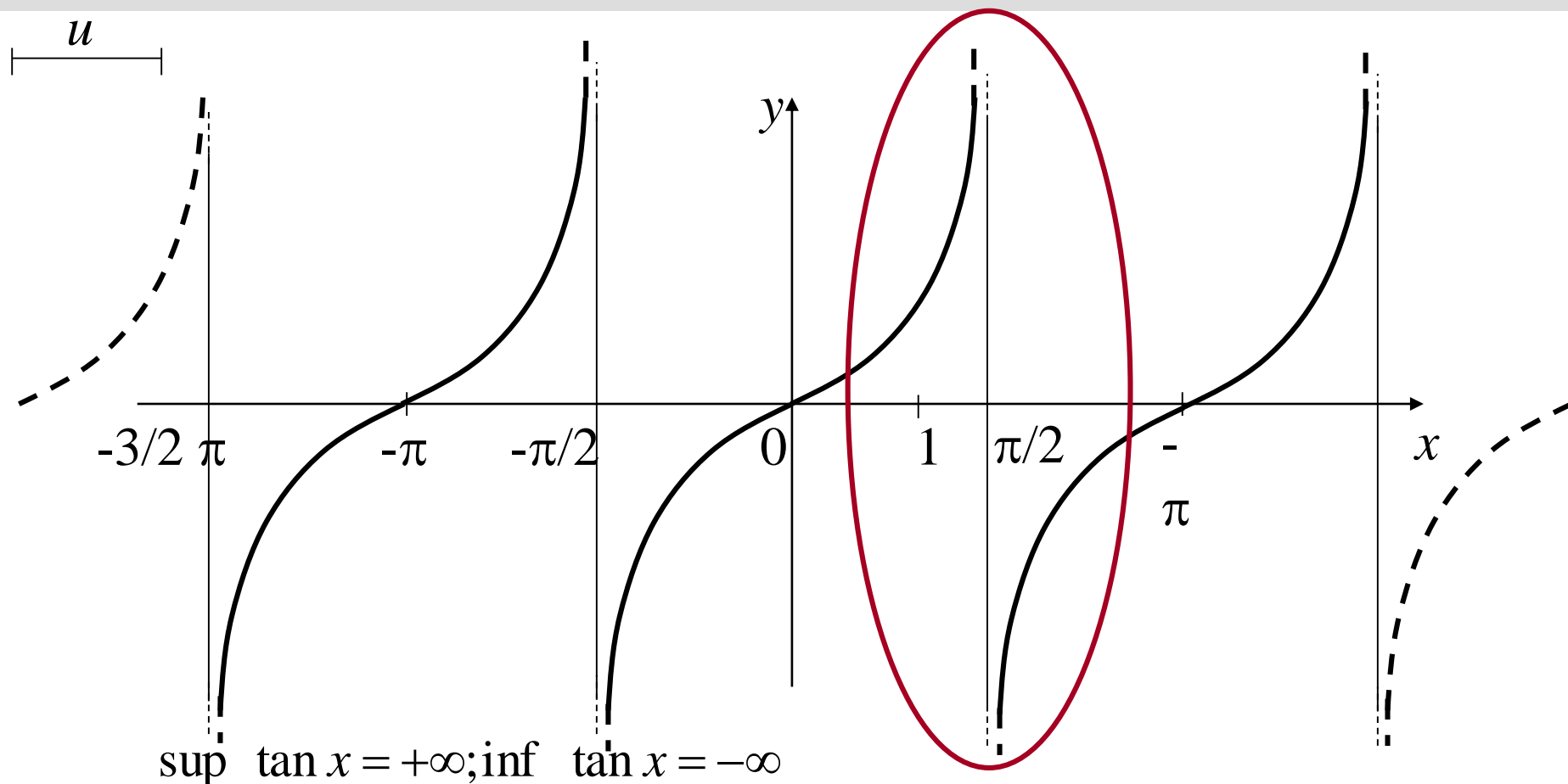


Tali limiti da destra e da sinistra sono differenti tra loro e non sono finiti

→ La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$  non è derivabile in  $x_0=0$  (pur essendo lì continua) e il punto  $x_0=0$  è detto

**cuspid**

# Funzione tangente



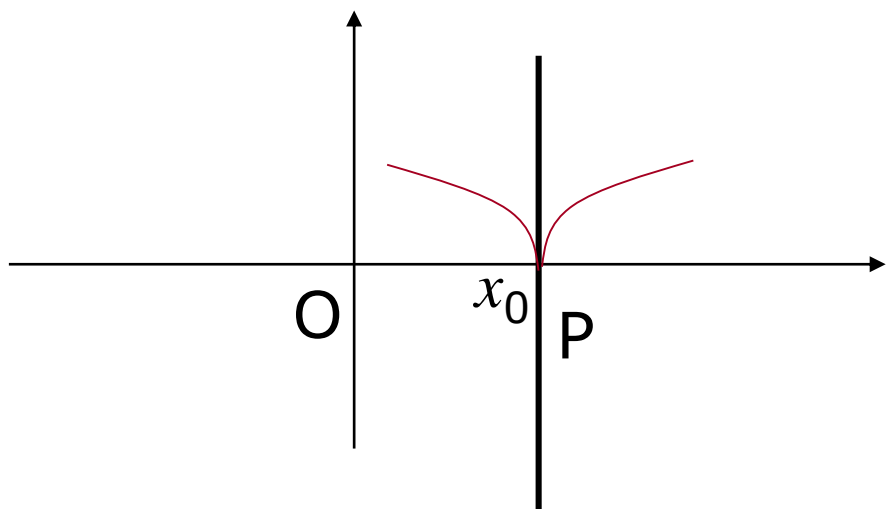
$f$  strettamente crescente in  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z}$

$f$  dispari:  $-\tan x = \tan(-x)$

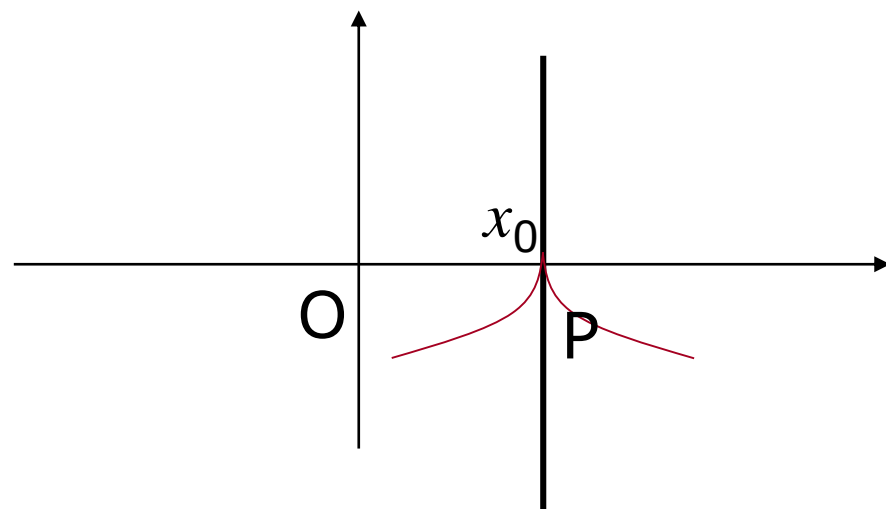
Più precisamente:

Def. Sia assegnata una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$  e sia  $x_0$  un fissato punto interno all'intervallo  $[a,b]$ . Se  $f$  ammette in  $x_0$  limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale diversi tra loro ed infiniti (cioè l'uno uguale a  $+\infty$  e l'altro a  $-\infty$  o viceversa), allora  $f$  non è derivabile in  $x_0$  e si dice che il punto  $x_0$  è una **cuspid**

Da un punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto di cuspidè  $x_0$  retta tangente parallela all'asse delle ordinate

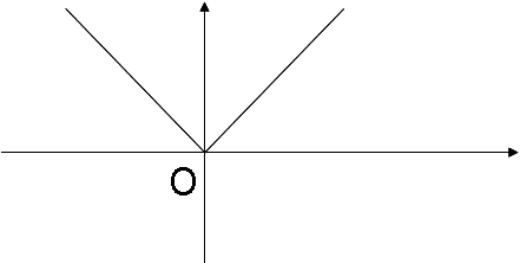
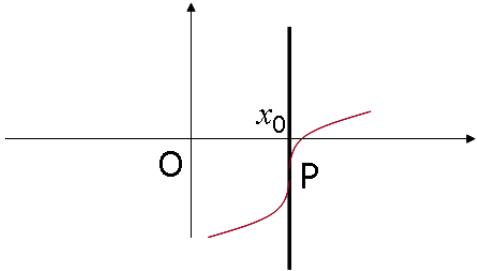
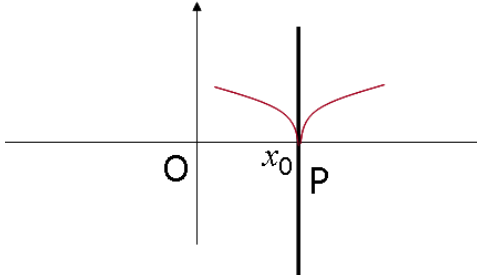


$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$$

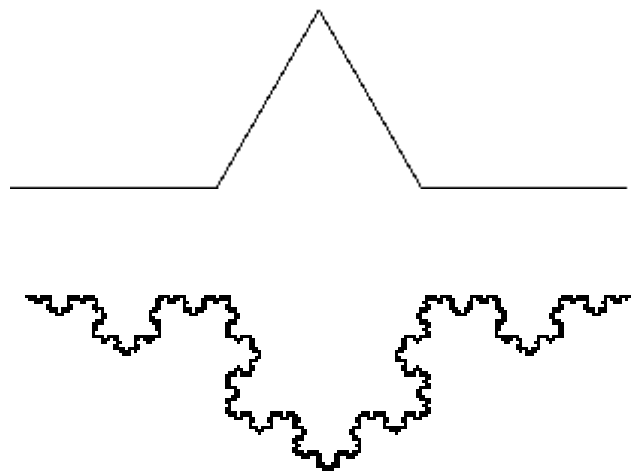
# Riepilogo

Tipo di punto	Definizione	grafico
Punto angoloso	Se $f$ ammette in $x_0$ derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro	
flesso a tangente verticale	Se $f$ ammette in $x_0$ limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale uguali tra loro ma infiniti (cioè entrambi uguali a $+\infty$ o a $-\infty$ ),	
cuspidi	Se $f$ ammette in $x_0$ limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale diversi tra loro ed infiniti (cioè l'uno uguale a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$ o viceversa),	

# Welcome to Matematica!!!!

In matematica esistono curve che non hanno nessun punto derivabile!!!

“Un frattale è un oggetto geometrico dotato di omotetia interna: si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse, ovvero non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento.”



Curva di Koch