Capitolo I

Spazi proiettivi numerici

1. *Spazi proiettivi su un campo.*

Prima di introdurre la nozione di spazio proiettivo numerico su un campo è utile richiamare alcuni risultati relativi ai sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita e costruito su un campo K assegnato.
Sia quindi V_n uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo K e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei suoi sottospazi. Indichiamo con $\underline{\mathbf{0}}$ il vettore nullo dello spazio V_n. Sussistono le seguenti proprietà già provate nei capitoli precedenti.

1. Il sottospazio $H = \{ \underline{\mathbf{0}} \}$ è l'unico sottospazio di dimensione zero e V_n è l'unico sottospazio di dimensione n.

2. Siano H e T due sottospazi .

$$H \subseteq T \Rightarrow \dim H \leq \dim T$$
$$H \subseteq T \ , \ \dim H = \dim T \Rightarrow H = T$$

3. l'intersezione di una famiglia di sottospazi è ancora un sottospazio.

4. Siano H e T due sottospazi . Sussiste la seguente relazione ***(formula di Grassmann):***

$$\dim H + \dim T = \dim (H \cap T) + \dim (H + T)$$

(dove H+T denota lo spazio congiungente H e T)

Vediamo ora la nozione di spazio proiettivo numerico su un campo.

Sia K un campo ed r un intero positivo. Sia K^{r+1} lo spazio vettoriale numerico di dimensione r+1 sul campo K. Gli elementi di K^{r+1} sono quindi le (r+1)-ple ordinate $(x_0, x_1,\dots, x_r)$ di elementi di K. Indicheremo con $\underline{0}$ =(0, 0,…, 0) il vettore nullo di K^{r+1} . Nell'insieme K^{r+1} -{ $\underline{0}$ } si definisca la seguente relazione binaria $\sim$

$$(y_0, y_1,\dots, y_r) \sim (z_0, z_1,\dots, z_r)$$

se e solo se esiste un elemento ρ non nullo di K tale che risulti

$$(z_0, z_1,\dots, z_r) = \rho (y_0, y_1,\dots, y_r)$$

Quindi due (r+1) –ple sono in relazione tra loro se e solo se esse sono proporzionali secondo un fattore ρ non nullo.

E' facile controllare che la relazione $\sim$ ora introdotta è una relazione di equivalenza che quindi ripartisce l'insieme K^{r+1} -{ $\underline{0}$ } in classi di equivalenza. Indicheremo in seguito con $\underline{\mathbf{X}} = [(x_0, x_1,\dots, x_r)]$ la classe di equivalenza determinata dalla (r+1)-pla $(x_0, x_1,\dots, x_r)$ di K^{r+1} -{ $\underline{0}$ }.

L' insieme quoziente K^{r+1} -{ $\underline{0}$ }/ $\sim$ sarà denotato con $\mathbf{P}_{r\,,\,K}$ ed esso è chiamato *sostegno dello spazio proiettivo numerico di dimensione r sul campo K.*

Nel seguito gli elementi di $\mathbf{P}_{r\,,\,K}$ cioè le classi di equivalenza , saranno chiamati ***punti*** dello spazio proiettivo. Useremo in seguito l'applicazione

(1.1) $$\boldsymbol{p} : K^{r+1} \text{-}\{ \underline{0} \} \to \mathbf{P}_{r,K}$$

(*proiezione canonica*) la quale fa corrispondere al vettore $(x_0, x_1,\dots, x_r)$ la sua classe di equivalenza $[(x_0, x_1,\dots, x_r)]$.

E' utile osservare che la funzione ha la seguente proprietà :

Se H è un sottospazio di K^{r+1} si ha , posto H' = H -{ $\underline{0}$ },

(1.2) $$\boldsymbol{p}^{-1}(\boldsymbol{p}(\mathbf{H'})) = \mathbf{H'}$$

Dimostrazione. Sia $\underline{\mathbf{x}}$ un vettore di $\boldsymbol{p^{-1}(p(H'))}$. Si ha $p(\underline{x}) \in p(H')$ e quindi è $p(\underline{x}) = [\,\underline{\mathbf{x}}\,] = p(\underline{y}) = [\,\underline{\mathbf{y}}\,]$ con $\underline{\mathbf{y}}$ vettore di H'. Da $[\,\underline{\mathbf{x}}\,] = [\,\underline{\mathbf{y}}\,]$ segue

$\underline{\mathbf{x}} = \rho\, \underline{\mathbf{y}}$ con $\rho \neq 0$. Ma poiché H è un sottospazio ed $y \in H$ allora anche $\underline{\mathbf{x}} = \rho\, \underline{\mathbf{y}} \in H$. e quindi ad H' essendo esso non nullo.
Avendo provato che risulta $\boldsymbol{p^{-1}(p(H'))} \subseteq \mathbf{H'}$ si ha l'asserto essendo ovvia l'altra inclusione.

Se $[\,\underline{\mathbf{x}}\,] = [(x_0, x_1,\dots, x_r)]$ è un punto di $\mathbf{P}_{r\,,\,K}$ gli elementi $x_0, x_1,\dots, x_r$ sono chiamati le *coordinate proiettive* del punto $[\,\underline{\mathbf{x}}\,]$.
Poichè una r+1-pla $(y_0, y_1,\dots, y_r)$ proporzionale ad $(x_0, x_1,\dots, x_r)$ determina lo stesso punto $[\,\underline{\mathbf{x}}\,]$ allora è bene precisare che le coordinate proiettive del punto $[\,\underline{\mathbf{x}}\,]$ sono r+1 numeri di K non tutti nulli e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.
Spesso per rendere più semplice e più breve la notazione , useremo il simbolo $\underline{\mathbf{y}}$ per rappresentare il vettore numerico $(y_0, y_1,\dots, y_r)$.

Siano

$$p_1= [\underline{y}_1]\ ,\ p_2= [\underline{y}_2]\ , \dots ,\ p_h= [\underline{y}_h]$$

h punti dello spazio proiettivo. I punti $p_1= [\underline{y}_1]\ ,\ p_2= [\underline{y}_2]\ , \dots ,\ p_h= [\underline{y}_h]$ si diranno ***proiettivamente indipendenti*** se i vettori $\underline{y}_1\ ,\ \underline{y}_2\ , \dots ,\ \underline{y}_h$ delle loro coordinate risultano ***linearmente indipendenti***.
Poiché le coordinate di un punto non sono uniche ma definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo per rendere lecita la definizione data occorre stabilire che l'indipendenza proiettiva dei punti $p_1,\ p_2\ , \dots ,\ p_h$ è indipendente dalla scelta delle coordinate $\underline{y}_1\ ,\ \underline{y}_2\ , \dots ,\ \underline{y}_h$ usate per

rappresentarli. Si scelga per rappresentare il punto p_i (i= 1.2,..h) anziché la r+1-pla $\underline{y}_i$ una ad essa proporzionale e sia z_i .

Risulta quindi per ogni i = 1,2,..h , $z_i = \rho_i \underline{y}_i$ con $\rho_i \neq 0$.

Dobbiamo controllare che se i punti $p_1, p_2, \ldots, p_h$ sono risultati indipendenti in quanto tali sono risultati i vettori numerici

$\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_h$ lo stesso accade anche se vengono usati i vettori

$\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_h$ in quanto come ora controlleremo anche tali vettori

$\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_h$ risulteranno linearmente indipendenti. Vediamo.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ scalari tali che risulti

$$\alpha_1 \underline{z}_1 + \alpha_2 \underline{z}_2 +, \ldots, + \alpha_h \underline{z}_h = \underline{0}$$

Si ha

$$\alpha_1 \underline{z}_1 + \alpha_2 \underline{z}_2 +, \ldots, + \alpha_h \underline{z}_h = \alpha_1(\rho_1 \underline{y}_1) + \alpha_2 (\rho_2 \underline{y}_2) +, \ldots, + \alpha_h (\rho_h \underline{y}_h) =$$
$$= (\alpha_1\rho_1) \underline{y}_1 + (\alpha_2 \rho_2) \underline{y}_2 +, \ldots, + (\alpha_h \rho_h) \underline{y}_h = \underline{0}$$

Poiché i vettori $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_h$ sono per ipotesi linearmente indipendenti si ha per ogni i=1..h , $\alpha_i \rho_i = 0$ ed essendo per ogni i = 1…..h $\rho_i \neq 0$ si ha per ogni i=1….h $\alpha_i = 0$ il che prova che anche i vettori $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_h$ sono linearmente indipendenti.

Osserviamo che se $[\,\underline{\mathbf{y}}\,] = [(y_0, y_1, \ldots, y_r)]$ e $[\,\underline{\mathbf{z}}\,] = [(z_0, z_1, \ldots, z_r)]$ sono due punti distinti allora le due (r+1) –ple $(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ e $(z_0, z_1, \ldots, z_r)$ sono non proporzionali e quindi linearmente indipendenti . Pertanto due punti distinti sono proiettivamente indipendenti .

Costruiremo ora nello spazio proiettivo, utilizzando la nozione data di punti indipendenti, dei sottoinsiemi speciali che saranno chiamati *sottospazi* a ciascuno dei quali sarà assegnato un intero che sarà chiamato la sua *dimensione.*

Vediamo.

Siano $[\,\underline{y}\,] = [(y_0, y_1,\ldots, y_r)]$ e $[\,\underline{z}\,] = [(z_0, z_1,\ldots, z_r)]$ due punti distinti chiameremo *retta* per essi l'insieme dei punti $[\,\underline{x}\,] = [(x_0, x_1,\ldots, x_r)]$ con

$$(1.3) \qquad (x_0, x_1,\ldots, x_r) = \lambda\,(y_0, y_1,\ldots, y_r) + \mu\,(z_0, z_1,\ldots, z_r)$$

combinazione lineare di $(y_0, y_1,\ldots, y_r)$ e $(z_0, z_1,\ldots, z_r)$ al variare dei parametri non entrambi nulli λ e μ .

La retta ora definita viene anche chiamata *sottospazio di dimensione uno* ed indicata con S_1.

Poiché $(y_0, y_1,\ldots, y_r)$ e $(z_0, z_1,\ldots, z_r)$ sono linearmente indipendenti una loro combinazione lineare darà luogo al vettore nullo solo se i parametri λ e μ sono entrambi nulli. Pertanto scegliendo i parametri λ e μ non entrambi nulli il vettore $(x_0, x_1,\ldots, x_r)$ è non nullo e pertanto definisce le coordinate di un punto dello spazio proiettivo. E' chiaro che se $[(x_0, x_1,\ldots, x_r)]$ è il punto della retta corrispondente ai parametri λ e μ lo stesso punto si otterrà scegliendo i parametri $\rho\lambda$ e $\rho\mu$ con $\rho \neq 0$. Pertanto interpretando la (1.3) come una relazione tra punti dello spazio proiettivo i punti della retta sono descritti tutti facendo si variare i parametri λ e μ ma tenendo conto che coppie di parametri tra loro proporzionali danno luogo allo stesso punto. Ciò detto possiamo calcolare quanti punti possiede una retta .

Proveremo ora che le rette sono tra loro equipotenti risultando per ognuna di esse

$$(1.4) \qquad |\,S_1\,| = |\,K\,| + 1$$

Abbiamo già detto che i punti della retta vengono descritti attraverso le coppie

(λ, μ) tenendo però conto che coppie proporzionali determinano lo stesso punto della retta. Si considerino tutte le coppie $(\lambda, 1)$ al variare di λ in K. Tali coppie sono evidentemente a due a due non proporzionali tra loro e quindi determinano $|K|$ punti distinti della retta. La coppia $(1, 0)$ non proporzionale a nessuna delle coppie $(\lambda, 1)$ determina un ulteriore punto della retta .La retta non ha però ulteriori punti in quanto ogni coppia (λ, μ) non nulla è proporzionale ad $(1, 0)$ se è $\mu = 0$ ed è proporzionale ad una delle coppie $(\lambda, 1)$ se è $\mu \neq 0$ risultando proporzionale alla coppia $(\lambda/\mu, 1)$. La (1.4) è così provata.
Poiché ogni campo ha cardinalità maggiore o eguale a due allora è provato che :

(V) ***ogni retta ha almeno tre punti.***

Osserviamo infine quanto segue. I vettori $\underline{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, \ldots, y_r)$ e $\underline{\mathbf{z}} = (z_0, z_1, \ldots, z_r)$ determinano nello spazio vettoriale K^{r+1} attraverso tutte le loro combinazioni lineari un sottospazio $V_2 = [\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}]$ di dimensione due ed i cui vettori non nulli sono le coordinate dei punti della retta per i punti $[\underline{\mathbf{y}}]$ e $[\underline{\mathbf{z}}]$. Pertanto i punti della nostra retta altro non sono che le classi determinate dai vettori non nulli del sottospazio
$V_2 = [\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}]$. Indicato con $V'_2 = V_2 - (\underline{\mathbf{0}})$ posiamo affermare che risulta

$$S_1 = \wp(V'_2)$$

(avendo al solito indicato con $\wp$ la proiezione canonica di $K^{r+1} - \{\underline{\mathbf{0}}\}$ in $\mathbf{P}_{r,k}$).

E' chiaro inoltre che se $\underline{\mathbf{y}}'$ e $\underline{\mathbf{z}}'$ sono due vettori indipendenti di $V_2 = [\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}]$ risulta $V_2 = [\underline{\mathbf{y}}', \underline{\mathbf{z}}'] = [\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}]$ e quindi la retta per i punti $[\underline{\mathbf{y}}]$ e $[\underline{\mathbf{z}}]$ non cambia se si sostituiscono questi due punti con altri due punti distinti della stessa retta.

Siano $A = [(a_0, a_1, \ldots, a_r)]$, $B = [(b_0, b_1, \ldots, b_r)]$, $C = [(c_0, c_1, \ldots, c_r)]$ tre punti proiettivamente indipendenti. Poiché i vettori $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_r)$,

$\underline{b}$ =($b_0, b_1,\ldots, b_r$), $\underline{c}$ =($c_0, c_1,\ldots, c_r$) sono linearmente indipendenti nessuno di essi è combinazione degli altri due e così nessuno dei tre punti dati appartiene alla retta determinata dagli altri due. L' indipendenza dei tre punti dati corrisponde quindi al fatto che essi sono tre punti non allineati. Possiamo considerare l'insieme dei punti $[\underline{\mathbf{x}}] = [(x_0, x_1,\ldots, x_r)]$ dello spazio con

$$(1.5) \qquad (x_0, x_1,\ldots, x_r) = \alpha\ (a_0, a_1,\ldots, a_r) + \beta\ (b_0, b_1,\ldots, b_r) + \gamma\ (c_0, c_1,\ldots, c_r)$$

al variare della terna (α, β, γ) in $K^3 - (0,0,0)$. Osserviamo ancora come già fatto per la retta che poiché i vettori ($a_0, a_1,\ldots, a_r$) , ($b_0, b_1,\ldots, b_r$) , ($c_0, c_1,\ldots, c_r$) sono indipendenti nella (1.5) il vettore ($x_0, x_1,\ldots, x_r$) sarà il vettore nullo solo scegliendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Pertanto per una scelta della terna (α, β, γ) in $K^3 - (0,0,0)$ si avrà che il vettore ($x_0, x_1,\ldots, x_r$) è non nullo e quindi determina un punto dello spazio proiettivo. Ancora una volta ribadiamo che due terne (α, β, γ) e (α', β', γ') di $K^3 - (0,0,0)$ che siano tra loro proporzionali determineranno lo stesso punto. L'insieme dei punti $[\underline{\mathbf{x}}] = [(x_0, x_1,\ldots, x_r)]$ dello spazio così ottenuto sarà chiamato ***piano*** o *sottospazio di dimensione due* ed è indicato col simbolo S_2.

Come già fatto per la retta , con le stesse argomentazioni, si riconosce che il nostro piano S_2 si può ritenere l'immagine tramite la proiezione canonica del sottospazio di dimensione tre (privato però del vettore nullo) generato dai vettori $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$. Detto $V_3 = [\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}]$ e posto $V'_3 = V_3 - (\underline{\mathbf{0}})$ si ha :

$$S_2 = \wp(V'_3)$$

Con le stesse argomentazioni già fatte per la retta è ovvio che il piano S_2 non cambia se si considerano su di esso altri tre punti non allineati.

Possiamo ora dare una definizione generale nella quale rientreranno quelle di retta e piano già date, date a parte solo per avvicinare gradualmente lo studente a questa definizione generale.

Siano quindi

$$P_0 = [\underline{y}_0]\ ,\ p_1 = [\underline{y}_1]\ ,\ \ldots.\ ,\ p_h = [\underline{y}_h]$$

h+1 punti ($1 \leq h \leq r$) dello spazio proiettivo proiettivamente indipendenti.

Possiamo considerare l'insieme dei punti $[\underline{\mathbf{x}}] = [(x_0, x_1, \ldots, x_r)]$ dello spazio con

$$(1.6) \qquad \underline{\mathbf{x}} = \alpha_0\, \underline{y}_0 + \alpha_1\, \underline{y}_1 + \ldots\ldots + \gamma\, \alpha_h\, \underline{y}_h$$

al variare della (h+1)-pla $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots., \alpha_h)$ in $K^{h+1} - (0,0,\ldots..0)$.

Osserviamo ancora come già fatto per la retta e per il piano che poiché i vettori $\underline{y}_0, \underline{y}_1, \ldots\ldots, \underline{y}_h$ sono linearmente indipendenti nella (1.6) il vettore $\underline{\mathbf{x}}$ sarà il vettore nullo solo scegliendo $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots =, \alpha_h = 0$. Pertanto per una scelta dei parametri $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots., \alpha_h)$ in $K^{h+1} - (0,0,\ldots..0)$. si avrà che il vettore $\underline{\mathbf{x}}$ è non nullo e quindi determina un punto dello spazio proiettivo. Ancora una volta ribadiamo che due (h+1)-ple $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots., \alpha_h)$ e $(\alpha'_0, \alpha'_1, \ldots., \alpha'_h)$ che siano tra loro proporzionali determineranno lo stesso punto. L'insieme dei punti $[\underline{\mathbf{x}}]$ dello spazio così ottenuti sarà chiamato *sottospazio di dimensione h* ed è indicato col simbolo S_h.

Come già fatto per la retta e per il piano , con le stesse argomentazioni, si riconosce che il nostro sottospazio S_h si può ritenere l'immagine tramite la proiezione canonica del sottospazio di dimensione h+1 (privato però del vettore nullo) generato dai vettori $\underline{y}_0, \underline{y}_1, \ldots\ldots, \underline{y}_h$.

Detto $V_{h+1} = [\underline{y}_0, \underline{y}_1, \ldots\ldots, \underline{y}_h]$ e posto $V'_{h+1} = V_{h+1} - (\underline{\mathbf{0}})$ si ha .

$$S_h = \not{p}\,(V'_{h+1})$$

Con le stesse argomentazioni già fatte per la retta e per il piano è ovvio che il sottospazio S_h non cambia se si considerano su di esso altri h+1 punti indipendenti .

I nostri sottospazi S_h di dimensione h con $1 \leq h \leq r$ (quindi di dimensione almeno uno) sono quindi le immagini tramite la proiezione canonica $\wp$ dei sottospazi di dimensione h+1 (quindi di dimensione almeno due) dello spazio vettoriale K^{r+1} . In tale visione vediamo chi sono i sottospazi di dimensione -1 e 0 dimensioni possibili essendoci nello spazio vettoriale K^{r+1} sia i sottospazi di dimensione uno e sia quelli di dimensione zero.

Vediamo

Sia ora $[\, \underline{y} \,]$ un punto dello spazio proiettivo e sia V_1 il sottospazio di dimensione uno generato dal vettore non nullo $\underline{\mathbf{y}}$.

Ovviamente risulta , posto $V'_1 = V_1 - (\, \underline{\mathbf{0}} \,)$

$$[\, \underline{y} \,] = \wp(V'_1)$$

e così i singoli punti possono essere considerati come sottospazi di dimensione zero risultando essi l'immagine tramite $\wp$ dei sottospazi di dimensione uno di K^{r+1} privati del vettore nullo.

I punti saranno quindi spesso anche indicati col simbolo S_0 .

Estendendo ulteriormente tale argomentazione poiché l'unico sottospazio di dimensione zero di K^{r+1} è $V_0 = \{\, \underline{\mathbf{0}} \,\}$ risulta $V'_0 = V_0 - \{\, \underline{\mathbf{0}} \,\} = \emptyset$ e così si ha

$$S_{-1} = \wp(V'_0) = \wp(\emptyset) = \emptyset$$

Il vuoto è quindi anch'esso un sottospazio ed è l'unico di dimensione -1. Ovviamente $P_{r,K}$ è l'unico sottospazio di dimensione r in quanto K^{r+1} è l'unico sottospazio di dimensione r+1.

Indichiamo con $\mathscr{P}_h$, $-1 \leq h \leq r$, la famiglia dei sottospazi di dimensione h dello spazio proiettivo $P_{r,K}$.

La coppia $\left(P_{r,K}\ , (\mathcal{P}_{-1}\,\mathcal{P}_0\,\mathcal{P}_1 \ldots\ldots \mathcal{P}_r)\right)$ è detta *spazio proiettivo numerico di dimensione r sul campo K.* Nel seguito però nomineremo solo il sostegno $P_{r,K}$ per indicare lo spazio proiettivo. I sottospazi di dimensione r-1 di $P_{r,K}$, cioè quelli generati da r punti indipendenti , sono chiamati *iperpiani.*

Vedremo in seguito come le rette e gli iperpiani giocano un ruolo importante nello spazio proiettivo. Proveremo tra poco che l'intersezione di una famiglia di sottospazi è un sottospazio. Tale proprietà consente di dare la seguente definizione. Siano S_h ed S_k due sottospazi . Si consideri il sottospazio che indicheremo con $S_h \underline{\cup} S_k$ e che chiameremo il loro *spazio congiungente* , ottenuto intersecando tutti i sottospazi che contengono entrambi .Si osservi che almeno $P_{r,K}$ contiene entrambi. Lo spazio $S_h \underline{\cup} S_k$ così ottenuto, è ovviamente (rispetto alla inclusione) il più piccolo sottospazio che contiene entrambi i sottospazi S_h ed S_k .

I sottospazi dello spazio proiettivo ,come ora proveremo, hanno le seguenti proprietà :

I. $\mathcal{P}_{-1} = \{ \emptyset \}$ $\mathcal{P}_0 = \{ \{ P \} \}_{P\,P_{r,K}}$ $\mathcal{P}_r = \{ P_{r,K} \}$

II. $$S_h \subseteq S_k \Rightarrow h \leq k$$
$$S_h \subseteq S_k \quad h = k \Rightarrow \quad S_h = S_k$$

III. L'intersezione di una famiglia di sottospazi è un sottospazio.

IV. Siano S_h ed S_k due sottospazi .

Posto $i = \dim (S_h \cap S_k)$ e $c = \dim (S_h \underline{\cup} S_k)$.

Sussiste la seguente relazione (*formula di Grassmann*)

$$h + k = i + c \,.$$

Dimostrazione . La I è già stata provata con le argomentazioni precedenti.

Proviamo la II. Siano S_h ed S_k due sottospazi. Siano V'_{h+1} e V'_{k+1} i sottospazi per i quali risulta $S_h = \wp(V'_{h+1})$ ed $S_k = \wp(V'_{k+1})$.

Da $S_h \subseteq S_k$ segue $\wp^{-1}(S_h) = V'_{h+1} \subseteq \wp^{-1}(S_k) = V'_{k+1}$.

Da $V'_{h+1} \subseteq V'_{k+1}$ segue $h+1 \leq k+1$ e quindi $h \leq k$.

Se $S_h \subseteq S_k$ ed è $h = k$ allora è $\wp^{-1}(S_h) = V'_{h+1} \subseteq \wp^{-1}(S_k) = V'_{k+1}$.

Poiché è $h+1 = k+1$ da $V'_{h+1} \subseteq V'_{k+1}$ segue $V'_{h+1} = V'_{k+1}$ e quindi $S_h = S_k$.

Proviamo la III. Sia $\mathscr{F} = \{ S_{h_i},\ i \in I \}$ una famiglia di sottospazi. Per ogni $i \in I$ sia V'_{h_i+1} il sottospazio per il quale si ha $S_{h_i} = \wp(V'_{h_i+1})$.

Si ha $\wp^{-1}(\cap S_{h_i}) = \cap \wp^{-1}(S_{h_i}) = \cap V'_{h_i+1}$ da cui segue

$$\cap S_{h_i} = \wp(\cap V'_{h_i+1}) \tag{1.7}$$

e ciò prova l'asserto in quanto $\cap V'_{h_i+1}$ è un sottospazio.

Proviamo la IV. Siano S_h ed S_k due sottospazi .

Sia $S_i = S_h \cap S_k$ e $S_c = S_h \underline{\cup} S_k$. Siano V'_{h+1} e V'_{k+1} i sottospazi per i quali risulta $S_h = \wp(V'_{h+1})$ ed $S_k = \wp(V'_{k+1})$. Per la (1.7) si ha

$$S_i = \wp(V'_{h+1} \cap V'_{k+1}) = \wp(V'_{i+1}) \,.$$

Proviamo che $\wp(V'_{h+1} + V'_{k+1}) = \wp(V'_{c+1})$ è il sottospazio $S_c = S_h \underline{\cup} S_k$.

Sia $S_t = \wp(V'_{h+1} + V'_{k+1})$. Poiché $V'_{h+1} + V'_{k+1}$ contiene V'_{h+1} e V'_{k+1} , allora S_t contiene sia S_h che S_k . Se $S_m = \wp(V'_{m+1})$ contiene S_h ed S_k allora , usando $\wp^{-1}$, si ha che V'_{m+1} contiene V'_{h+1} e V'_{k+1} e quindi $V'_{h+1} + V'_{k+1}$. Ma se V'_{m+1} contiene $V'_{h+1} + V'_{k+1}$ allora S_m contiene S_t . Così S_t risultando il più piccolo sottospazio che contiene S_h ed S_k coincide con il loro spazio congiungente.

Abbiamo così provato che

$$S_c = \wp(V'_{h+1} + V'_{k+1}) = \wp(V'_{c+1})$$

Poiché in K^{r+1} vale la formula di Grassmann si ha

$$(h+1) + (k+1) = (i+1) + (c+1)$$

da cui segue, come si voleva ,

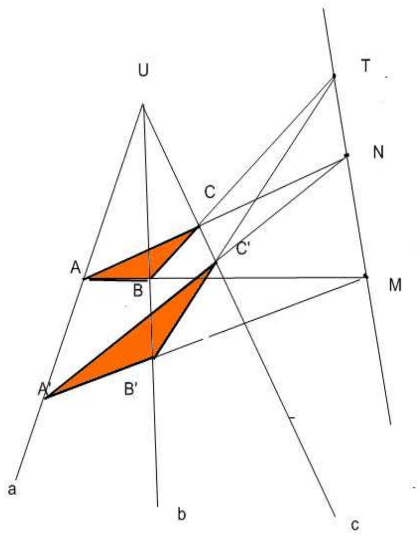
$$h + k = i + c.$$

Concludiamo tale numero mostrando una importante proprietà di cui godono gli spazi proiettivi numerici $P_{r.K}$, $r \geq 2$.

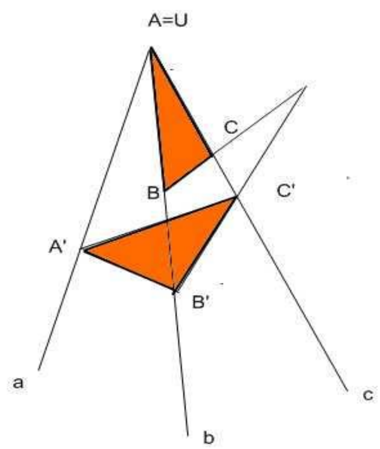
Gli spazi proiettivi numerici $P_{r.K}$, $r \geq 2$. sono *desarguesiani* cioè verificano la seguente proprietà configurazionale, che coinvolge punti e rette nota come

Teorema di Desargues.

Sia U un punto ed a , b , c tre rette distinte per il punto U. Si scelgano sulla retta a due punti distinti A ed A' , sulla retta b due punti distinti B e B' e sulla retta c due punti distinti C e C' in modo però che A , B , C non siano allineati ed A' , B' , C' non siano allineati. Allora la retta AB interseca la retta A'B' in un punto che chiameremo M , la retta BC interseca la retta B'C' in un punto che chiameremo T e la retta AC interseca la retta A'C' in un punto che chiameremo N . I punti M , N , T risultano allineati tra loro.



Dimostrazione. Possiamo supporre che il punto U sia distinto dai vertici A,B,C del primo triangolo e dai vertici A' , B' , C' del secondo triangolo. Infatti in tal caso il teorema è banalmente verificato . Supposto ad esempio U = A si ha che i punti d'incontro dei lati AB ed A'B' , AC ed A'C' sono B' e C' e quindi il terzo punto essendo quello comune alla retta B'C' e BC è allineato con B' e C'. Nella figura viene illustrata la situazione descritta.



Indichiamo con $\underline{\mathbf{u}}$ le coordinate di U= [$\underline{\mathbf{u}}$] con $\underline{\mathbf{a}}$ le coordinate di A = [$\underline{\mathbf{a}}$] ,con $\underline{\mathbf{b}}$ le coordinate di B= [$\underline{\mathbf{b}}$] e con $\underline{\mathbf{c}}$ le coordinate di C= [$\underline{\mathbf{c}}$] . Poiché U è sulla retta AA' , sulla retta BB' e sulla retta CC' si ha :

$$\underline{\mathbf{u}} = \alpha\,\underline{\mathbf{a}} + \alpha'\,\underline{\mathbf{a}}'$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \beta\,\underline{\mathbf{b}} + \beta'\,\underline{\mathbf{b}}'$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \gamma\,\underline{\mathbf{c}} + \gamma'\,\underline{\mathbf{c}}'$$

Poiché U è distinto dai vertici A , B , C ed A' , B' , C' gli scalari α , α', β , β', γ , γ' sono **tutti** non nulli. Poiché le coordinate proiettive sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo possiamo così supporre , pur di riformulare le coordinate dei punti , che risulti

(1.8)
$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}}'$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}}'$$
$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{c}}'$$

Da (1.8) segue allora eguagliando a due a due :

$$\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}' - \underline{\mathbf{a}}'$$
$$\underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}' - \underline{\mathbf{c}}'$$
$$\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{c}}' - \underline{\mathbf{b}}'$$

Posto

$$\underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}' - \underline{\mathbf{a}}'$$
$$\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}' - \underline{\mathbf{c}}'$$
$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{c}}' - \underline{\mathbf{b}}'$$

si ha che il punto M = [$\underline{\mathbf{m}}$] è quello comune alle rette AB ed A'B' , il punto N = [$\underline{\mathbf{n}}$] è quello comune alle rette AC ed A'C' e T = [$\underline{\mathbf{t}}$] è quello comune alle rette BC ed B'C'. Tali punti risultano allineati in quanto è

$$\underline{\mathbf{m}} + \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{0}}$$

e quindi

$$\underline{\mathbf{m}} = - \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{t}}$$

L' asserto è così provato.

Dalla formula di Grassmann segue subito che :

Proposizione 1.1 *Sia S_h un sottospazio e sia p un punto non appartenente ad esso. Lo spazio congiungente $S_h \underline{\cup} \{p\}$ ha dimensione $h+1$.*

Proposizione 1.2 *Sia π un iperpiano e sia S_h un sottospazio non contenuto in π. La dimensione dello spazio intersezione $S_h \cap \pi$ è $h-1$.*

La proprietà che l'intersezione di sottospazi è ancora un sottospazio , consente di introdurre in $P_{r,K}$ il seguente operatore di chiusura.
Se Y è un sottoinsieme di $P_{r,K}$ indichiamo con $[Y]$ il suo *spazio congiungente* ottenuto al solito intersecando tra loro tutti i sottospazi che contengono Y.
Per tale operatore sussistono le seguenti proprietà di facile dimostrazione :

a) $\qquad Y \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad [Y] \subseteq [Z]$

b) $\qquad [Y \cup Z] = [Y] \underline{\cup} [Z]$

Dalla b) segue questa utile proposizione .

Proposizione 1.3 *Siano $p_0, p_1, \ldots, p_h$ $h+1$ punti distinti di $P_{r,k}$ Lo spazio congiungente tali punti ha dimensione minore o eguale ad h.*

Dimostrazione. Se h = 0 o h=1 l'asserto è ovvio . Supponiamo quindi h >1 e vero l'asserto per h punti .Si ha per la b) :

$$[\, \underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] = [\, \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] \; \underline{\cup} \; \{ p_0 \} = S_t \; \underline{\cup} \; \{ p_0 \}$$

avendo posto $S_t = [\, \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,]$. Per l'ipotesi di induzione risulta $t \le h\text{-}1$ e quindi si ha, per la formula di Grassmann,
$\dim [\, \underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] = t + 0 - i \le h\text{-}1 - i \le h$
in quanto è $i=0$ se p_0 appartiene ad S_t ed $i= -1$ se p_0 non appartiene ad S_t .

Siano $p_0 = [\underline{\mathbf{x}}_0]$, $p_1 = [\underline{\mathbf{x}}_1]$, …., $p_h = [\underline{\mathbf{x}}_h]$ h+1 punti di $P_{r,k}$. Si ha facilmente che lo spazio congiungente tali punti è immagine tramite $\wp$ dello spazio $[\, \underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h \,]$ generato dai vettori $\underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h$ .In simboli

$$(1.9) \qquad [\, \underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] = \wp ([\, \underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h \,])$$

Si perviene così a questa utilissima equivalenza :

Proposizione 1.4. *h+1 punti $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h$ di $P_{r,k}$ sono indipendenti se e solo se risulta:*

$$\dim [\, \underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] = h.$$

Dimostrazione. Se i punti $p_0 = [\underline{\mathbf{x}}_0]$, $p_1 = [\underline{\mathbf{x}}_1]$, …., $p_h = [\underline{\mathbf{x}}_h]$ sono indipendenti allora i vettori $\underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h$ sono linearmente indipendenti e quindi risulta $\dim [\, \underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h \,] = h+1$ e cosi stante (1.9) è
$\dim [\, \underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] = h$.

Viceversa se $\dim [\, \underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h \,] = h$. allora è $\dim [\, \underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h \,] = h+1$ e così i vettori $\underline{\mathbf{x}}_0 , \underline{\mathbf{x}}_1 , \dots, \underline{\mathbf{x}}_h$ sono linearmente indipendenti e ciò assicura che i punti $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h$ sono indipendenti.

Usando questa equivalenza faremo ora vedere come molte proprietà sulla indipendenza dei punti , ovvie quando si fa uso delle coordinate, sono acquisibili per via grafica usando cioè solo le proprietà I-IV prima provate. Vediamo

Proposizione 1.5 *Siano* $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h$ *h+1 punti indipendenti di* $P_{r,k}$ *e sia* S_h *il loro spazio congiungente. Sia p un punto non appartenente ad* S_h *. I punti* $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h , p$ *sono ancora indipendenti.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.4 basta provare che risulta

$$\dim [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h , p] = h + 1.$$

Si ha

$$[\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h , p] = [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h] \,\underline{\cup}\, \{ p \}$$

e quindi risulta, per la formula di Grassmann, tenendo conto che per ipotesi è $\dim [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h] = h$,

$$\dim [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h , p] = \dim [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h] + 0 - (-1) = h +1.$$

Dalla proposizione ora provata segue :

Proposizione 1.6 *Siano* $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \ldots, \underline{p}_h$ *h+1 punti indipendenti di* $P_{r,k}$ *. Si possono aggiungere a tali punti altri r –h punti* $\underline{p}_{h+1} , \underline{p}_{h+2} , \ldots, \underline{p}_r$ *in modo che gli r+1 punti così ottenuti costituiscano un sistema massimo di punti indipendenti di* $P_{r,k}$ *.*

E’ molto utile la proposizione che segue :

Proposizione 1.7 *Siano* $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_h$ *h+1 punti indipendenti di* $P_{r,k}$ *Si suddividano tali punti in due gruppi il primo sia formato da* $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_m$ *ed il secondo formato dai rimanenti punti* $\underline{p}_{m+1} , \underline{p}_{m+2} , \dots, \underline{p}_h$ *. Allora i punti* $\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_m$ *ed i punti* $\underline{p}_{m+1} , \underline{p}_{m+2} , \dots, \underline{p}_h$ *sono ancora indipendenti.*

Dimostrazione. Siano S_t ed S_k i sottospazi $S_t = [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_m]$ e $S_k = [\underline{p}_{m+1} , \underline{p}_{m+2} , \dots, \underline{p}_h]$. e sia S_i il loro spazio intersezione. Ovviamente è

$$S_t \underline{\cup} S_k = [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_m] \underline{\cup} [\underline{p}_{m+1} , \underline{p}_{m+2} , \dots, \underline{p}_h] = [\underline{p}_0 , \underline{p}_1 , \dots, \underline{p}_m] = S_h$$

Si ha allora , tenendo conto della proposizione 1.3 ,

$$i = t + k - h \leq \mathbf{m + h - m -1 - h = -1}$$

Pertanto è $i = -1$ e necessariamente $t = m$ e $k = h-m-1$.

Ciò prova che i due gruppi di punti considerati sono anch'essi indipendenti cosa ovvia se avessimo fatto uso delle coordinate. Inoltre i due sottospazi da loro generati hanno intersezione vuota ed hanno come congiungente lo spazio S_h determinato da tutti i punti assegnati.

Due sottospazi S_t ed S_k dello spazio proiettivo $P_{r,k}$ si dicono *supplementari* se risulta :

$$S_t \cap S_k = \Phi \qquad \text{ed} \qquad S_t \underline{\cup} S_k = P_{r,k}$$

La proposizione 1.7 ora provata mostra come sia possibile costruire due spazi supplementari. Basterà infatti considerare r+1 punti indipendenti di tutto lo spazio e poi suddividerli in due gruppi (in base alle dimensioni che si vogliono ottenere) e considerare gli spazi generati da tali due gruppi.

Abbiamo già annunciato che le rette dello spazio giocano un ruolo cruciale nella teoria. Le proposizioni che seguono danno corpo a tale affermazione.

Proposizione 1.8 *Sia S_h un sottospazio di dimensione $h \geq 2$. Sia S_{h-1} un suo iperpiano ed p un punto di S_h non appartenete ad S_{h-1}. Allora S_h è l'unione delle rette [p, y] al variare di y in S_{h-1}.*

Dimostrazione. Ogni retta [p, y] al variare di y in S_{h-1} è contenuta in S_h in quanto S_h è un sottospazio e contenendo i punti p e y contiene il loro spazio congiungente che è appunto la retta [p, y]. Un punto z di S_h diverso da p e non appartenente ad S_{h-1} congiunto con p determina una retta contenuta in S_h che per la formula di Grassmann interseca S_{h-1} in un punto y di S_{h-1} . Pertanto ogni punto di S_h giace su una delle rette [p, y] con y in S_{h-1} e si ha così l'asserto.

Dalla proposizione ora provata segue che se il campo è finito di cardinalità q allora sussiste la seguente formula che fornisce la cardinalità dei sottospazi di $P_{r,K}$.

(1.10) $$|S_h| = q^h + q^{h-1} + \ldots + q + 1$$

Dimostrazione. Se h=1 l'asserto è vero come provato in precedenza. Possiamo supporre $h > 1$ e vero l'asserto per $h - 1$. Fissato in S_h un suo iperpiano S_{h-1} ed un punto p di S_h non appartenente ad S_{h-1} abbiamo visto che S_h consta di tutti punti delle rette [p , y] al variare di y in S_{h-1}. Tali rette private di p sono quindi una partizione dei punti di S_h privato di p . Si ha allora

$$|S_h| = q\ |S_{h-1}| + 1$$

Da cui segue l'asserto essendo per l'ipotesi di induzione, $|S_{h-1}| = q^{h-1} + \ldots + q + 1$.

Proposizione 1.9 *Un sottoinsieme X di $P_{r,k}$ è un sottospazio se e solo se gode della seguente proprietà :*

(*) *la retta che unisce due punti distinti e qualunque di X è contenuta in X.*

Dimostrazione. Se X è un sottospazio e p e p’ sono due suoi punti distinti allora X contiene ovviamente la retta [p, p’] essendo questa il loro spazio congiungente. Supponiamo quindi che valga la proprietà (*) e proviamo che X è un sottospazio.

Se X è vuoto o ha un singolo punto esso è un sottospazio. Possiamo quindi supporre che X possegga almeno due punti distinti e siano p e p’. Per ipotesi la retta S_1= [p, p’] è contenuta in X . Se S_1 = X allora l’asserto è provato. Possiamo supporre allora che S_1 sia contenuta strettamente in X ed esista quindi un punto y di X non appartenente ad S_1 . Sia S_2 lo spazio congiungente y ed S_1 . Proveremo ora che il piano S_2 è contenuto in X .

Per la proposizione precedente il piano S_2 è l’unione delle rette [p, y] al variare di p su S_1. Per la proprietà (*) tutte le rette [p, y] sono rette contenute in X e quindi S_2 è contenuto in X. S

Se S_2 = X allora l’asserto è provato. Possiamo supporre allora che S_2 sia contenuto strettamente in X ed esista quindi un punto y di X non appartenente ad . Lo spazio S_3 che congiunge S_2 con y è contenuto in X in quanto esso è l’unione di tutte le rette [p, y] al variare di p in S_2 .

Se S_3 = X allora l’asserto è provato altrimenti etc. etc.Si può iterare l’argomentazione e così dopo un numero finito di passi troveremmo X = S_h o al limite $P_{r.k}$ contenuto in X e cioè coincidente con X. L’asserto è così provato.

Daremo ora un ‘ altra possibile rappresentazione dei sottospazi delo spazio proiettivo. Fondamentale a tale scopo è la seguente

Proposizione 1.10 *Ogni sottospazio S_{r-h} ($1 \leq h \leq r$) è intersezione di h iperpiani.*

Dimostrazione . Ragioneremo per induzione su h. L'asserto è vero per $h = 1$. Possiamo supporre $h > 1$ e vero il teorema per h-1. Quindi per l'ipotesi di induzione ogni $S_{r-(h-1)} = S_{r-h+1}$ è intersezione di h-1 iperpiani.

Si consideri quindi un sottospazio S_{r-h} di dimensione r-h. Si fissino in esso r-h+1 punti indipendenti e siano $p_o , p_1 , \ldots, p_{r-h}$. Si aggiungano a tali punti ulteriori h punti $p_{r-h+1},\ldots, p_r$ in modo che tutti gli r+1 punti $p_o , p_1 , \ldots, p_r$ siano indipendenti. Si consideri lo spazio S_{r-h+1} ottenuto congiungendo S_{r-h} con il punto p_r e l'iperpiano π ottenuto congiungendo gli r punti indipendenti $p_o , p_1 , \ldots, p_{r-1}$. Entrambi tali spazi contengono S_{r-h} e d'altra parte il loro spazio intersezione, tenendo conto che S_{r-h+1} non è contenuto in π , per la formula di Grassmann, ha dimensione r-h. Pertanto è

$$S_{r-h} = S_{r-h+1} \cap \pi \ .$$

Ma S_{r-h+1} è per l'ipotesi di induzione intersezione di h-1 iperpiani $\pi_1 , \pi_2 ,\ldots, \pi_{h-1}$ e così è

$$S_{r-h} = S_{r-h+1} \cap \pi = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \ldots \cap \pi_{h-1} \cap \pi$$

e ciò prova l' asserto.

La proposizione ora provata mostra l'importanza degli iperpiani nella teoria.

Vediamo come si possono rappresentare gli iperpiani. Un iperpiano π è stato da noi definito come lo spazio generato da r punti indipendenti

$$[\, \underline{\mathbf{x}}_1 \,], \ \ldots , \ [\, \underline{\mathbf{x}}_r \,] \ .$$

I punti $[\, \underline{\mathbf{x}} \,]$ di π hanno quindi coordinate $\underline{\mathbf{x}}$ con $\underline{\mathbf{x}}$

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{x}}_1 + \ldots + \lambda_r \underline{\mathbf{x}}_r$$

al variare dei parametri $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ non tutti contemporaneamente nulli.

Si consideri ora una equazione omogenea non identica di primo grado in r+1 variabili $x_0 , x_1, \ldots , x_r$ del tipo

(1.11) $$a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_r x_r = 0$$

con $a_0 , a_1, \ldots , a_r$ non tutti nulli.

Poiché l'equazione (1.11) è omogenea allora se $(y_0 , y_1, \ldots ,y_r)$ è una sua soluzione non nulla anche la r +1 –pla $(\rho y_0 , \rho y_1, \ldots , \rho y_r)$ con $\rho \neq 0$ è una sua soluzione e così ha senso dire che un punto dello spazio $P_{r.k}$ verifica con le sue coordinate tale equazione. Consideriamo quindi l'insieme $\boldsymbol{\pi}$ dei punti dello spazio che soddisfano con le loro coordinate tale equazione. Si tratta quindi di determinare tutte le soluzioni non nulle di tale equazione e considerare i punti dello spazio $P_{r.k}$ corrispondenti a tali soluzioni.

Ma è ben noto che tali soluzioni sono un sottospazio di dimensione r di K^{r+1} e quindi per descriverle tutte è sufficiente determinarne r soluzioni indipendenti tra loro. Poichè l'equazione data non è identica uno dei coefficienti è non nullo e sia ad esempio a_0.

Allora

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = \left(\frac{-a_1}{a_0} , 1 , 0,\ldots,0 \right)$$

$$\underline{\mathbf{a}}_2 = \left(\frac{-a_2}{a_0} , 0 , 1 ,\ldots,0 \right)$$

…..

$$\underline{\mathbf{a}}_r = \left(\frac{-a_r}{a_0} , 0 , 0 ,\ldots, 1 \right)$$

sono r soluzioni linearmente indipendenti in grado di generare tutte le altre. I punti $[\underline{\mathbf{a}}_1]$, $[\underline{\mathbf{a}}_2]$, … , $[\underline{\mathbf{a}}_r]$ determinati da queste soluzioni sono proiettivamente indipendenti ed ogni altro punto $[\underline{\mathbf{x}}]$ dell'insieme $\boldsymbol{\pi}$ rappresentato dall'equazione data ha coordinate $\underline{\mathbf{x}}$ con $\underline{\mathbf{x}}$

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{a}}_1 + \ldots + \lambda_r \underline{\mathbf{a}}_r$$

L'insieme $\boldsymbol{\pi}$ è così un iperpiano.

Faremo ora vedere che inversamente , dato un iperpiano $\boldsymbol{\pi}$ c'è un'equazione del tipo

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_r x_r = 0$$

che lo rappresenta.

Osserviamo preliminarmente che due equazioni tra loro proporzionali avendo le stesse soluzioni rappresentano evidentemente lo stesso insieme di punti .

Sia quindi $\boldsymbol{\pi}$ un iperpiano e supponiamo che l'iperpiano $\boldsymbol{\pi}$ sia quello determinato dai punti indipendenti

$$[\underline{\mathbf{a}}_1], [\underline{\mathbf{a}}_2], \ \ldots , [\underline{\mathbf{a}}_r]$$

Per semplicità poniamo

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (\alpha_0 , \alpha_1, \ldots , \alpha_r)$$
$$\underline{\mathbf{a}}_2 = (\beta_0 , \beta_1, \ldots , \beta_r)$$
$$\ldots.$$
$$\underline{\mathbf{a}}_r = (\gamma_0 , \gamma_1, \ldots , \gamma_r)$$

Un'equazione $a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_r x_r = 0$ che rappresenti l'iperpiano $\boldsymbol{\pi}$ deve essere intanto soddisfatta dalle coordinate dei punti $A_1= [\underline{\mathbf{a}}_1]$, $A_2= [\underline{\mathbf{a}}_2]$, …. , $A_r= [\underline{\mathbf{a}}_r]$.
Pertanto deve aversi :

$$a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + \ldots + a_r \alpha_r = 0$$
$$a_0 \beta_0 + a_1 \beta_1 + \ldots + a_r \beta_r = 0$$
$$\ldots.$$
$$a_0 \gamma_0 + a_1 \gamma_1 + \ldots + a_r \gamma_r = 0$$

Questo sistema nelle incognite a_0 , $a_1,\ldots, a_r$ è omogeneo ed ha infinite soluzioni tutte proporzionali tra loro essendo l'insieme delle sue soluzioni un sottospazio di dimensione uno. Una volta determinati i coefficienti a_0 , $a_1,\ldots, a_r$ è chiaro che i punti rappresentati dall' equazione corrispondente sono esattamente i punti di π .

Quanto ora provato unito a quanto stabilito con la proposizione 1.10 porta ad una possibile diversa rappresentazione dei sottospazi . Infatti se $S_{r\text{-}h}$ è un sottospazio allora esistono h iperpiani che si intersecano esattamente nel sottospazio $S_{r\text{-}h}$ assegnato. Ciascuno di tali iperpiani è rappresentabile con una equazione di primo grado omogenea in r+1 incognite e pertanto il sistema formato da tali equazioni rappresenta evidentemente il nostro sottospazio $S_{r\text{-}h}$.

La proposizione 1.10 che afferma che $S_{r\text{-}h}$ è intersezione di h iperpiani

Un modo costruttivo per determinare tali iperpiani è il seguente :
si scelgano in $S_{r\text{-}h}$ r-h+1 punti indipendenti P_0 , P_1 , …, $P_{r\text{-}h}$ e si completi tale insieme di punti in un sistema massimo di punti indipendenti di tutto lo spazio $P_{r.k}$ aggiungendo h punti e siano M_1 , $M_2\ldots$, M_h
Si considerino gli h iperpiani $\pi_1 , \ldots, \pi_h$ ottenuti congiungendo i punti P_i con tutti i punti M_i escludendone uno , uno alla volta. Si abbia quindi

$$\boldsymbol{\pi}_i = [P_0 , P_1 , \ldots, P_{r\text{-}h}\ M_1 , M_2\ldots,\ \hat{M}_i \ldots.\ M_h] \qquad (i = 1,2, ..,h)$$

dove il simbolo $\hat{M}_i$ è usato per indicare quale sia il punto escluso.
Tali iperpiani come visto nella dimostrazione 1.10 si intersecano nel nostro sottospazio $S_{r\text{-}h}$.

*Concludiamo questo numero osservando che quanto è stato finora illustrato era possibile anche se avessimo usato inizialmente un corpo K anziché un campo. La nostra scelta ha avuto due motivazioni : la prima è la semplificazione del linguaggio e quindi dell'esposizione e la seconda è che lo scopo del corso " **Fondamenti di***

geometria combinatoria” *è trattare essenzialmente gli spazi di Galois cioè costruiti su campi finiti. E’ ben noto che ogni corpo finito è un campo.*

2. Il gruppo strutturale.

Un isomorfismo dello spazio proiettivo $P_{r,K}$ è una funzione biettiva tra i punti che trasforma con la sua inversa sottospazi in sottospazi della stessa dimensione. Vogliamo in tale numero dare una descrizione di tali speciali funzioni. Indichiamo con $\mathcal{G}$ = G ($P_{r,K}$) l’insieme di tutti gli isomorfismi di $P_{r,K}$. L’ insieme è ovviamente rispetto alla usuale composizione di applicazioni un gruppo con l’identità che funge da elemento neutro ed esso è chiamato il gruppo strutturale dello spazio proiettivo.

Al fine di determinare il gruppo $\mathcal{G}$ indichiamo con $\mathcal{A}(K^{r+1})$ il gruppo degli automorfismi dello spazio vettoriale numerico K^{r+1}.

Come già visto tale gruppo è determinato ed i suoi elementi sono le applicazioni di K^{r+1} in sé ottenute in corrispondenza delle matrici quadrate non degeneri ad elementi in K d’ordine r+1.

Il gruppo $\mathcal{A}(K^{r+1})$ è ,come già visto ,isomorfo al gruppo lineare GL(r+1, K) delle matrici quadrate non degeneri d’ordine r+1 costruite sul campo K.

Sia quindi A una matrice quadrata non degenere d’ordine r+1 . L’applicazione

$$A : K^{r+1} \to K^{r+1}$$

che al vettore $\underline{\mathbf{x}}$ fa corrispondere il vettore $\underline{\mathbf{y}} = A\underline{\mathbf{x}}$ è un automorfimo dello spazio vettoriale K^{r+1} . Esplicitamente :

$$A : \quad \begin{aligned} y_0 &= a_{00}\, x_0 + a_{01}\, x_1 + \ldots + a_{0r}\, x_r \\ y_1 &= a_{10}\, x_0 + a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1r}\, x_r \\ &\ldots\ldots \\ y_r &= a_{r0}\, x_0 + a_{r1}\, x_1 + \ldots + a_{rr}\, x_r \end{aligned}$$

Essendo tale applicazione un automorfismo essa trasforma un vettore non nullo in un vettore non nullo ed un vettore proporzionale ad $\underline{\mathbf{x}}$ in un vettore proporzionale ad $\underline{\mathbf{y}}$. Inoltre essa trasforma sottospazi dello spazio vettoriale K^{r+1} in sottospazi della stessa dimensione. Possiamo allora definire nello spazio proiettivo la seguente applicazione

$$\omega_A \quad : \quad [\,\underline{\mathbf{x}}\,] \in P_{r,k} \to [\,\underline{\mathbf{y}}\,] \in P_{r,k} \qquad \text{con } \underline{\mathbf{y}} = A\underline{\mathbf{x}}$$

che al punto p di coordinate $\underline{\mathbf{x}}$ fa corrispondere il punto p' di coordinate $\underline{\mathbf{y}}$ con $\underline{\mathbf{y}} = A\underline{\mathbf{x}}$. La definizione è ben posta in quanto il punto p' corrispondente a p non dipende dalla scelta delle coordinate scelte per rappresentare p, risultando $A(\rho\,\underline{\mathbf{x}}) = = \rho\, A\underline{\mathbf{x}}$.

L' applicazione ω_A ora definita è chiamata ***omografia*** corrisponedente all'automorfismo A. Indicheremo con $\Omega\,(P_{r,k})$ l'insieme delle omografie dello spazio proiettivo . L'insieme $\Omega\,(P_{r,k})$ delle omografie è manifestamente un gruppo ed analizzeremo ora di tale gruppo alcune importanti proprietà.

La prima importante proprietà è fornita dalla seguente

Proposizione 2.1. *Siano A e B due matrici non degeneri d'ordine r+1. Si ha :*

$$\omega_A \;=\; \omega_B \quad \Leftrightarrow \quad B = \rho A \quad \text{con} \quad \rho \neq 0.$$

Dimostrazione. Se $B = \rho A$ ovviamente risulta $\omega_A = \omega_B$. Infatti ω_A fa corrispondere al punto p di coordinate $\underline{\mathbf{x}}$ il punto p' di coordinate $\underline{\mathbf{y}} = A\underline{\mathbf{x}}$.

L' omografia ω_B allo stesso punto p fa corrispondere il punto di coordinate $B\,\underline{\mathbf{x}} = (\rho A)\,\underline{\mathbf{x}} = A\,(\rho\,\underline{\mathbf{x}}) = \rho\,(A\underline{\mathbf{x}}) = \rho\,\underline{\mathbf{y}}$ cioè lo stesso punto p'.

Viceversa supponiamo $\omega_A = \omega_B$ e proviamo che risulta $B = \rho A$ con $\rho \neq 0$.

Indichiamo con $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, …, $\mathbf{U_r}$, $\mathbf{U}$ i punti del riferimento fondamentale cioè i punti di coordinate

$\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} = (\,1.0\ldots\ldots 0)$

$\underline{\mathbf{u}}_1 = (0.1\ldots\ldots0)$

.....

$\underline{\mathbf{u}}_r = (0.0\ldots\ldots1)$

$\underline{\mathbf{u}} = (1.1\ldots\ldots1)$

Indichiamo inoltre con $\underline{\mathbf{a}}^0, \underline{\mathbf{a}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{a}}^r$ le colonne della matrice A e con $\underline{\mathbf{b}}^0, \underline{\mathbf{b}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{b}}^r$ le colonne della matrice B .

Per ogni i tra 0 ed r l' applicazione ω_A fa corrispondere al punto $\mathbf{U_i}$ di coordinate $\underline{\mathbf{u}}_i$ il punto A_i di coordinate $A\,\underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\mathbf{a}}^i$.

Analogamente, per ogni i tra 0 ed r , l' applicazione ω_B fa corrispondere al punto $\mathbf{U_i}$ di coordinate $\underline{\mathbf{u}}_i$ il punto B_i di coordinate $B\,\underline{\mathbf{u}}_i = \underline{\mathbf{b}}^i$.

Poiché $\omega_A = \omega_B$ si ha che per ogni i risulta $A_i = B_i$ e quindi è

(2.1) $$\underline{\mathbf{b}}^i = \rho_i\,\underline{\mathbf{a}}^i \qquad \text{con} \quad \rho_i \neq 0$$

L'omografia ω_A fa corrispondere al punto **U** di coordinate $\underline{\mathbf{u}}$ il punto **W** di coordinate

$$\underline{\mathbf{w}} = A\underline{\mathbf{u}} = A(\underline{\mathbf{u}}_o + \underline{\mathbf{u}}_1 + \ldots + \underline{\mathbf{u}}_r) = A\,\underline{\mathbf{u}}_o + A\,\underline{\mathbf{u}}_1 + \ldots + A\,\underline{\mathbf{u}}_r =$$
$$= \underline{\mathbf{a}}^0 + \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}^r$$

L'omografia ω_B fa corrispondere al punto **U** di coordinate $\underline{\mathbf{u}}$ il punto **W'** di coordinate

$$\underline{\mathbf{w'}} = B\underline{\mathbf{u}} = B(\underline{\mathbf{u}}_o + \underline{\mathbf{u}}_1 + \ldots + \underline{\mathbf{u}}_r) = B\underline{\mathbf{u}}_o + B\,\underline{\mathbf{u}}_1 + \ldots + B\,\underline{\mathbf{u}}_r =$$
$$= \underline{\mathbf{b}}^0 + \underline{\mathbf{b}}^1 + \ldots + \underline{\mathbf{b}}^r = \rho_0\,\underline{\mathbf{a}}^0 + \rho_1\,\underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \rho_r\,\underline{\mathbf{a}}^r$$

Poichè per ipotesi è $\omega_A = \omega_B$ si ha $\mathbf{W} = \mathbf{W}'$ e quindi

$$\rho_0\,\underline{\mathbf{a}}^0 + \rho_1\,\underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \rho_r\,\underline{\mathbf{a}}^r = \rho\,(\underline{\mathbf{a}}^0 + \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}^r) \quad \text{con} \quad \rho \neq 0$$

Da questa segue

$$(\rho_0 - \rho)\ \underline{\mathbf{a}}^0 + (\rho_1 - \rho)\ \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots.. + (\rho_r - \rho)\underline{\mathbf{a}}^r = \underline{\mathbf{0}}$$

Poiché i vettori $\underline{\mathbf{a}}^i$ sono indipendenti in quanto A è non degenere si ha

$$(\rho_0 - \rho) = (\rho_1 - \rho) = \ldots.. = (\rho_r - \rho) = 0$$

e così per ogni i = 0,1,…r è $\rho_i = \rho$ da cui, tenendo conto della (2.1) , segue $B = \rho A$.

L' asserto è così provato.

Sia ω_A una omografia e sia $\mathfrak{R} = (\mathbf{U_o} , \mathbf{U_1} , \ldots, \mathbf{U_r} , \mathbf{U})$ il riferimento fondamentale . Posto

$$A_{\mathbf{i}} = \omega_A (\mathbf{U_i}) \quad i=0,1,..,r \qquad \textbf{ed} \quad \mathbf{W} = \omega_A (\mathbf{U})$$

anche $\mathfrak{R}' = (\mathbf{A_o} , \mathbf{A_1} , \ldots, \mathbf{A_r} , \mathbf{W})$ è un riferimento in quanto A trasforma vettori indipendenti in vettori indipendenti.

Viceversa proveremo ora che ogni riferimento dello spazio si ottiene così cioè è l'immagine del riferimento fondamentale sotto l'azione di una omografia.

Precisamente sussiste la seguente :

Proposizione 2.2. *Sia $\mathfrak{R}' = (\boldsymbol{A_o} , \boldsymbol{A_1} , \ldots, \boldsymbol{A_r} , \boldsymbol{W})$ un riferimento dello spazio proiettivo $P_{r,k}$. Esiste una sola omografia ω_A che trasforma il riferimento fondamentale $\mathfrak{R} = (\boldsymbol{U_o} , \boldsymbol{U_1} , \ldots, \boldsymbol{U_r} , \boldsymbol{U})$ nel riferimento $\mathfrak{R}'$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\underline{\mathbf{a}}^0 , \underline{\mathbf{a}}^1 , \ldots.. , \underline{\mathbf{a}}^r$ le coordinate dei punti $\mathbf{A_o}$, $\mathbf{A_1} , \ldots, \mathbf{A_r}$ e con $\underline{\mathbf{w}}$ le coordinate di **W**. Poiché i vettori $\underline{\mathbf{a}}^0 , \underline{\mathbf{a}}^1 , \ldots.. , \underline{\mathbf{a}}^r$ sono indipendenti mentre $\underline{\mathbf{a}}^0 , \underline{\mathbf{a}}^1 , \ldots.. , \underline{\mathbf{a}}^r\ \underline{\mathbf{w}}$ sono dipendenti si ha :

$$\underline{\mathbf{w}} = \alpha_0\ \underline{\mathbf{a}}^0 + \alpha_1\ \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots.. + \alpha_r\ \underline{\mathbf{a}}^r$$

Poiché i vettori $\underline{\mathbf{a}}^0$, $\underline{\mathbf{a}}^1$, ….. , $\underline{\mathbf{a}}^r$ $\underline{\mathbf{w}}$ sono ad r+1 ad r+1 indipendenti risulta per ogni i = 0,1,..,.r $\alpha_i \neq 0$. Pertanto scegliendo opportunamente le coordinate dei punti A_i si può supporre che W abbia come coordinate

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{a}}^0 + \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots.. + \underline{\mathbf{a}}^r$$

Sia ora $A = (\underline{\mathbf{a}}^0 , \underline{\mathbf{a}}^1 , \ldots.. , \underline{\mathbf{a}}^r)$ la matrice che ha per colonne le coordinate dei punti A_i . Poiché i punti A_i sono indipendenti le colonne di A sono indipendenti e quindi A è non degenere. L'omografia ω_A corrispondente a tale matrice A trasforma ogni punto U_i nel punto A_i i=0,1,..,r ed il punto U nel punto di coordinate

$$A\underline{\mathbf{u}} = A (\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} + \ldots.. + \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}) = A\,\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + A\,\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} + \ldots.. + A\,\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} =$$
$$= \underline{\mathbf{a}}^0 + \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots.. + \underline{\mathbf{a}}^r = \underline{\mathbf{w}}$$

cioè nel punto **W**. Pertanto l'omografia ω_A trasforma il riferimento fondamentale $\mathfrak{R}$ nel riferimento $\mathfrak{R}'$ .Bisogna ora solo provare che tale omografia ω_A è unica. Supponiamo quindi esista un'altra omografia ω_B che trasforma anch'essa il riferimento $\mathfrak{R}$ nel riferimento $\mathfrak{R}'$.

Denotiamo con $\underline{\mathbf{b}}^0$, $\underline{\mathbf{b}}^1$, ….. , $\underline{\mathbf{b}}^r$ le colonne della matrice B .

Per ogni i tra 0 ed r l' applicazione ω_A fa corrispondere al punto $\mathbf{U_i}$ di coordinate $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}$ il punto $A_{\mathbf{i}}$ di coordinate $A\,\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{a}}^i$.

Analogamente, per ogni i tra 0 ed r , l' applicazione ω_B fa corrispondere al punto $\mathbf{U_i}$ di coordinate $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}$ il punto $B_{\mathbf{i}}$ di coordinate $B\,\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{b}}^i$.

Poiché per ogni i risulta $A_{\mathbf{i}} = B_{\mathbf{i}}$ si ha :

(2.1) $$\underline{\mathbf{b}}^i = \rho_i\,\underline{\mathbf{a}}^i \qquad \text{con} \quad \rho_i \neq 0$$

L'omografia ω_A fa corrispondere al punto **U** di coordinate $\underline{\mathbf{u}}$ il punto **W** di coordinate

$$\underline{\mathbf{w}} = A\underline{\mathbf{u}} = A(\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} + \ldots + \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}) = A\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + A\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} + \ldots + A\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} =$$
$$= \underline{\mathbf{a}}^0 + \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}^r$$

L'omografia ω_B fa corrispondere al punto **U** di coordinate $\underline{\mathbf{u}}$ il punto **W'** di coordinate

$$\underline{\mathbf{w}}' = B\underline{\mathbf{u}} = B(\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} + \ldots + \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}) = B\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{o}} + B\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} + \ldots + B\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} =$$
$$= \underline{\mathbf{b}}^0 + \underline{\mathbf{b}}^1 + \ldots + \underline{\mathbf{b}}^r = \rho_0\underline{\mathbf{a}}^0 + \rho_1\underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \rho_r\underline{\mathbf{a}}^r$$

Poichè è **W** = **W'** si ha :

$$\rho_0\underline{\mathbf{a}}^0 + \rho_1\underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \rho_r\underline{\mathbf{a}}^r = \rho\,(\underline{\mathbf{a}}^0 + \underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + \underline{\mathbf{a}}^r) \quad \text{con} \quad \rho \neq 0$$

Da questa segue

$$(\rho_0 - \rho)\,\underline{\mathbf{a}}^0 + (\rho_1 - \rho)\,\underline{\mathbf{a}}^1 + \ldots + (\rho_r - \rho)\underline{\mathbf{a}}^r = \underline{\mathbf{0}}$$

Poiché i vettori $\underline{\mathbf{a}}^i$ sono indipendenti in quanto si ha :

$$(\rho_0 - \rho) = (\rho_1 - \rho) = \ldots = (\rho_r - \rho) = 0$$

e così per ogni i è $\rho_i = \rho$ da cui segue B = ρ A. Per la proposizione 2.1 è allora $\omega_A = \omega_B$ e l'asserto è così provato.

Al fine di determinare tutti gli isomorfismi dello spazio proiettivo sono utili le considerazioni che ora faremo.

Sia $\theta : K \rightarrow K$ un automorfismo del campo $K = (K , + , \cdot)$ cioè una biezione tra gli elementi di K che abbia le seguenti due proprietà :

$$\theta (a + b) = \theta (a) + \theta (b)$$
$$\theta (a \cdot b) = \theta (a) \cdot \theta (b)$$

Si prova facilmente che è

(2.2) $\theta (0) = 0$ e $\theta(1) = 1$.

Inoltre poiché è iniettiva se $a \neq 0$ allora $\theta (a) \neq 0$.

Possiamo definire in K^{r+1} la seguente applicazione che indicheremo con lo stesso simbolo θ ma in grassetto

$$\boldsymbol{\theta} : K^{r+1} \rightarrow K^{r+1}$$

che al vettore $\underline{\mathbf{x}} = (x_o, x_1,\ldots, x_r)$ fa corrispondere il vettore

$$\underline{\mathbf{x}}' = (\theta(x_o), \theta(x_1),\ldots, \theta(x_r)).$$

L'applicazione $\boldsymbol{\theta}$ è ovviamente biettiva e trasforma il vettore nullo nel vettore nullo e quindi un vettore non nullo in un vettore non nullo. Inoltre essa è *semilineare* cioè ha le seguenti due proprietà di facile dimostrazione :

j) $\boldsymbol{\theta} (\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}') = \boldsymbol{\theta} (\underline{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\theta} (\underline{\mathbf{x}}')$

jj) $\boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\alpha}\underline{\mathbf{x}}) = \theta (\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\theta} (\underline{\mathbf{x}})$.

Facilmente si prova inoltre che vettori linearmente indipendenti sono trasformati in vettori linearmente indipendenti e che sottospazi sono trasformati in sottospazi della stessa dimensione.

Partendo dall'applicazione $\boldsymbol{\theta}$ possiamo allora definire nello spazio proiettivo $P_{r,k}$ la seguente applicazione che , con abuso di notazione , continueremo ad indicare con $\boldsymbol{\theta}$.

$$\boldsymbol{\theta} : P_{r,k} \rightarrow P_{r,k}$$

associando al punto p di coordinate $\underline{\mathbf{x}} = (x_o, x_1,\dots, x_r)$ il punto p' di coordinate $\underline{\mathbf{x}}' = (\theta(x_o), \theta(x_1),\dots, \theta(x_r))$.

Tale definizione , stante la jj) è ben posta in quanto p' non dipende dal vettore $\underline{\mathbf{x}}$ scelto per rappresentare p.

Le proprietà dell'applicazione semilineare $\boldsymbol{\theta} : K^{r+1} \rightarrow K^{r+1}$ comportano che l'applicazione $\boldsymbol{\theta} : P_{r,k} \rightarrow P_{r,k}$ che abbiamo definito è un isomorfismo di $P_{r,k}$. Tale isomorfismo lo diremo *inerente all'automorfismo θ del campo.*

Tale isomorfismo trasforma un riferimento in un riferimento e ***lascia fisso il riferimento fondamentale.***

Osserviamo esplicitamente che quando θ è l'identità anche l'isomorfismo $\boldsymbol{\theta}$ è l'identità.

Si può provare il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione :

Proposizione 2.3. *Un isomorfismo $\omega : P_{r,k} \rightarrow P_{r,k}$ che lasci fisso il riferimento fondamentale è inerente ad un automorfismo del campo.*

La proposizione 2.3 ci aiuta a descrivere gli isomorfismi dello spazio proiettivo. Vediamo perché.

Sia $\omega : P_{r,k} \rightarrow P_{r,k}$ un isomorfismo dello spazio proiettivo e supponiamo che esso no sia inerente ad un automorfismo del campo. Poiché ω non è inerente ad un automorfismo del campo , per la proposizione 2.3, il riferimento fondamentale $\mathfrak{R}$ è trasformato in un altro riferimento $\mathfrak{R}'$. Indichiamo ora con ω_A l' unica omografia che trasforma $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}'$ (cfr.prop.2.2).

L'applicazione $(\omega_A)^{-1} \circ \omega$ è un isomorfismo che lascia fisso il riferimento fondamentale $\Re$. Per la proposizione 2.3 si ha allora che esso è inerente ad un automorfismo del campo e quindi esiste un automorfismo $\theta : K \to K$ del campo K tale che risulti :

$$(\omega_A)^{-1} \circ \omega = \boldsymbol{\theta} \tag{2.3}$$

Dalla (2.3) segue allora

$$\omega = \omega_A \circ \boldsymbol{\theta} \tag{2.4}$$

la quale descrive la natura dell'isomorfismo ω .

Abbiamo così stabilito la seguente :

Proposizione 2.4 *Gli unici isomorfismi di* $P_{r,k}$ *sono le omografie , quelli inerenti agli eventuali automorfimi del campo e le loro composizioni.*

Come corollario di tale proposizione si ha che se lo spazio proiettivo è costruito sul campo reale esso ha come unici isomorfismi le omografie in quanto il campo reale non ha automorfismi diversi dall'identità.

Capitolo II

Spazi grafici proiettivi

1. Spazi grafici proiettivi

In questo numero daremo la nozione di spazio grafico riconoscendo che questa struttura geometrica è una generalizzazione degli spazi proiettivi numerici da noi trattati nei capitoli precedenti. Vediamo la definizione.

Uno spazio grafico di dimensione r (r è un intero positivo) è una struttura geometrica così composta. E' assegnato un insieme non vuoto di cardinalità almeno due che indichiamo con S_r . In tale insieme si scelgano dei sottoinsiemi che vengono chiamati *sottospazi* e si assegni ad ognuno di essi un intero compreso tra -1 ed r che viene chiamato la sua *dimensione*. Indichiamo con S_h un sottospazio di dimensione h e con con $\mathcal{P}_h$ la famiglia di tutti i sottospazi di dimensione h . La struttura geometrica (S_r , ($\mathcal{P}_{-1}$, $\mathcal{P}_o$,……… ,$\mathcal{P}_r$)) è chiamata *spazio grafico di dimensione r* se sono soddisfatte le seguenti proprietà :

I. *L'unico sottospazio di dimensione -1 è la parte vuota di S_r.*
   I sottospazi di dimensione zero sono tutti e soli i singoli punti di S_r.
   L'unico sottospazio di dimensione r è lo spazio intero S_r .

II. $$S_h \subseteq S_k \;\Rightarrow\; h \leq k$$
$$S_h \subseteq S_k \;,\; h = k \;\Rightarrow\; S_h = S_k$$

III. *L'intersezione di un numero qualsiasi di sottospazi è ancora un sottospazio.*

La proprietà III consente di definire lo *spazio congiungente* due sottospazi S_h ed S_k . Si definisce spazio congiungente S_h ed S_k e viene denotato col simbolo $S_c = S_h \,\underline{\cup}\, S_k$ il sottospazio che si ottiene intersecando tutti i sottospazi che contengono i due sottospazi S_h ed S_k .

Dati due sottospazi S_h ed S_k e denotato con $S_i = S_h \cap S_k$ il loro spazio intersezione e con $S_c = S_h \,\underline{\cup}\, S_k$ il loro spazio congiungente , si richiede come ultima proprietà , che :

IV. $h + k = i + c$ *(formula di Grassmann)* .

Ovviamente la proprietà II comporta che

$$S_h \subset S_k \Rightarrow \dim S_h < \dim S_k$$

Chiameremo *rette* i sottospazi di dimensione uno , *piani* i sottospazi di dimensione due ed *iperpiani* i sottospazi di dimensione r-1.

Un *isomorfismo* tra due spazi grafici $(S_r\ ,\ (\mathcal{P}_{-1}, \mathcal{P}_o, \ldots\ldots\ldots, \mathcal{P}_r))$ e $(S'_r\ ,\ (\mathcal{P}'_{-1}, \mathcal{P}'_o, \ldots\ldots\ldots, \mathcal{P}'_r))$ è una biezione tra i sostegni S_r ed S'_r che trasforma con la sua inversa sottospazi in sottospazi della stessa dimensione.

Per ogni sottoinsieme X di S_r denoteremo con [X] lo spazio congiungente X il quale si ottiene intersecando tra loro tutti i sottospazi che contengono X (tra i sottospazi che contengono X c'è almeno l'intero spazio S_r). Lo spazio [X] è quindi il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio che contiene X.

Il passaggio allo spazio congiungente ha la seguente proprietà :

(1.1) $$Y \subseteq Z \Rightarrow [\,Y\,] \subseteq [\,Z\,] .$$

Infatti poichè $[\,Z\,] \supseteq Z \supseteq Y$ allora $[\,Z\,] \supseteq [\,Y\,]$ in quanto se il sottospazio $[\,Z\,]$ contiene Y esso contiene il sottospazio $[\,Y\,]$ che è il più piccolo sottospazio che contiene Y.

Facilmente usando la (1.1) si ha allora attraverso una facile doppia inclusione, la seguente proprietà :

$$(1.2) \qquad [\,Y \cup Z\,] = [\,Y\,] \;\underline{\cup}\; [\,Z\,]\,.$$

Concludiamo questo numero osservando che ogni retta di uno spazio grafico ha almeno due punti , un piano almeno tre e così via induttivamente.

2. ***I primi esempi di spazio grafico.***

Esempio I. Abbiamo già visto che se K è un campo lo spazio proiettivo $\mathbf{P}_{r,K}$ ha le proprietà I, II ,III , IV e pertanto esso è uno spazio grafico. Lo spazio $\mathbf{P}_{r,K}$ ha inoltre , come già visto , queste ulteriori due proprietà :

V . *Ogni retta ha almeno tre punti.*

VI. *In* $\boldsymbol{P}_{r,K}$ *vale il teorema di Desargues qualunque sia* $r \geq 2$.

Esempio II. Sia S un insieme finito di cardinalità r+1 ($r \geq 1$). Scegliamo come sottospazi tutti i possibili sottoinsiemi di S ed assumiamo come dimensione del sottospazio X l'intero $h = \dim X = |X| - 1$. Con tale scelta le rette sono le coppie di punti , i piani le terne , gli S_3 i sottoinsiemi di cardinalità quattro e cosi via.

E' facile controllare , tenendo conto che se X ed Y sono due sottoinsiemi si ha

$| X \cup Y | = |X| + |Y| - | X \cap Y |$, che l'insieme S con tali sottospazi è uno spazio grafico di dimensione r.

3. ***Prime proprietà di uno spazio grafico.***

Sia $(S_r , (\mathcal{P}_{-1}, \mathcal{P}_o, \ldots\ldots\ldots, \mathcal{P}_r))$ uno spazio grafico di dimensione r.

Sono importanti queste due proprietà immediata conseguenza della formula di Grassmann.

(3.1) *Sia S_h un sottospazio e p un punto non appartenente ad S_h . Lo spazio congiungente S_h e p ha dimensione h+1.*

(3.2) *Sia π un iperpiano e sia S_h un sottospazio non contenuto in π . Lo spazio intersezione $S_h \cap \pi$ ha dimensione h-1.*

Dalla (3.2) segue quindi che due rette contenute in un piano hanno un punto in comune.

Dalla (3.1) segue che due punti distinti sono congiunti da una retta. Tre punti , tenendo conto della (1.2) , sono congiunti da una retta o da un piano. Quattro punti sono congiunti da una retta (se sono tutti allineati) o da un piano (se sono tutti complanari) o da un S_3. Queste considerazioni sono casi particolari di questa importante

Proposizione 3.1 *Siano assegnati h+1 punti distinti $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h$. Lo spazio congiungente tali punti ha una dimensione che non supera h. In simboli*

$$dim\, [p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h] \leq h.$$

Dimostrazione. Per h=1 il teorema è vero in quanto due punti distinti sono congiunti da una retta. Supponiamo quindi $h > 1$ e vero il teorema per h punti. Per la (1.2) si ha $[p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h] = \{p_o\} \underline{\cup} [p_1, \ldots\ldots, p_h]$ per cui

$$\dim [p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h] = \dim[\{p_o\} \underline{\cup} [p_1, \ldots\ldots, p_h]].$$

Detta $t = \dim [p_1, \ldots\ldots, p_h]$ per l'ipotesi di induzione è $t \leq h-1$ e per la formula di Grassmann , indicando con i la dimensione dello spazio intersezione $\{p_o\} \cap [p_1, \ldots\ldots, p_h]$, si ha :

$$\dim[\{p_o\} \underline{\cup} [p_1, \ldots\ldots, p_h]] = o + t - i \leq h-1 - i$$

Poiché l'intero i è zero se p_o appartiene allo spazio $[p_1, \ldots\ldots, p_h]$ e vale -1 in caso contrario si ha $\dim[\{p_o\} \underline{\cup} [p_1, \ldots\ldots, p_h]] = h-1 - i \leq h$ e quindi l'asserto.

La proposizione ora provata consente di dare la seguente importante definizione.

h+1 punti $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h$ li diremo ***indipendenti*** se il loro spazio congiungente ha la massima dimensione h. In simboli

$$\{p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h\} \text{ sono indipendenti} \quad \Leftrightarrow \quad \dim [p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h] = h.$$

Due punti distinti sono quindi indipendenti, tre punti non allineati sono indipendenti, quattro punti non complanari sono indipendenti e così via.

Le proposizioni che seguono mostrano che questa nozione di indipendenza ha molte proprietà , del tutto analoghe a quelle relative alla dipendenza lineare incontrate nello studio degli spazi vettoriali.

Proposizione 3.2 *Siano* $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h$ *h+1 punti indipendenti e sia p un punto non appartenente allo spazio congiungente* $[p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h]$. *I punti* $p, p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h$ *sono ancora indipendenti.*

Dimostrazione. Occorre provare quindi che lo spazio $[p, p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h]$ ha dimensione h+1. Poiché

$$[p, p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h] = \{p\} \underline{\cup} [p_o, p_1, \ldots\ldots, p_h]$$

dalle ipotesi fatte e dalla formula di Grassmann segue l'asserto.

Per la definizione data h+1 punti indipendenti determinano un sottospazio di dimensione h (il loro spazio congiungente) ma ogni spazio di dimensione h è lo spazio congiungente h+1 punti indipendenti come mostra la seguente

Proposizione 3.3 *In ogni sottospazio* S_h *di dimensione h ci sono h+1 punti indipendenti . Tali punti sono ovviamente il massimo numero di punti indipendenti di* S_h .

Dimostrazione. Siano $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_k$ k+1 punti indipendenti di S_h e siano essi ,come punti indipendenti di S_h , in numero massimo. Sia S_k lo spazio congiungente i punti $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_k$. Si ha ovviamente $S_k \subseteq S_h$ e però risulta $S_k = S_h$. Infatti se fosse $S_k \subset S_h$ preso p in $S_h - S_k$, per la proposizione 3.2 i punti $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_k$ p sarebbero ancora indipendenti contro il fatto che $p_o, p_1, \ldots\ldots, p_k$ erano indipendenti ed in numero massimo. Da $S_k = S_h$ segue allora k = h e si ha l'asserto.

Nello spazio S_r r+1 è quindi il massimo numero di punti indipendenti di Sr. La proposizione 3.2 suggerisce come completare un gruppo di punti indipendenti in un sistema massimo di r+1 punti indipendenti.

Molto utile è la seguente

Proposizione 3.4 *Sia $T = \{ p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_h \}$ un insieme di $h+1$ punti indipendenti. Ogni sottoinsieme di T è costituito ancora da punti indipendenti.*

Dimostrazione. Sia S_h lo spazio congiungente i punti $p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_h$.
Si considerino i primi $m+1$ punti $p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_m$ $(m < h)$ e poi i rimanenti punti $p_{m+1} ,,\ldots\ldots,p_h$. Siano

$$S_t = [p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_m] \qquad \text{ed} \qquad S_k = [p_{m+1} ,,\ldots\ldots,p_h] \ .$$

Sappiamo già che $t \le m$ e $k \le h\text{-}m\text{-}1$ ma se mostriamo che è $t = m$ e $k = h\text{-}m\text{-}1$ allora i due sottoinsiemi considerati sono costituiti anch'essi da punti indipendenti. Si ha

$$S_t \underline{\cup} S_k = [p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_m] \underline{\cup} [p_{m+1} ,,\ldots\ldots,p_h] = [p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_h] = S_h$$

Detta $i = \dim S_t \cap S_k$ per la formula di Grassmann si ha

$$i = t + k - h \le m + h\text{-}m\text{-}1 - h = -1$$

Si ha quindi $i = -1$ e la relazione

$$-1 = i = t + k - h \le m + h\text{-}m\text{-}1 - h = -1$$

comporta necessariamente $t = m$ e $k = h\text{-}m\text{-}1$. Si ha così l'asserto.

Importante per il seguito è la seguente nozione. Due sottospazi S_h ed S_k di S_r si dicono *supplementari* se hanno intersezione vuota e sono congiunti da S_r.

Per la formula di Grassmann si ha allora che se S_h ed S_k sono supplementari si ha :

$$h+k = r-1.$$

Ripercorrendo la dimostrazione della proposizione 3.4 si ha allora che se $p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_r$ sono r+1 punti indipendenti suddividendo tale gruppo di punti in due parti disgiunte si generano attraverso gli spazi congiungenti tali gruppi di punti, due sottospazi supplementari.

Si ha allora facilmente la seguente

Proposizione 3.5 *Dato un sottospazio S_h si può sempre costruire un sottospazio ad esso supplementare.*

Dimostrazione . Si scelgano in S_h h+1 punti indipendenti $p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_h$ .Si aggiungano ad essi opportuni r-h punti $p_{h+1} ,\ldots\ldots,p_r$ in modo che i punti $p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_r$ siano un sistema di r+1 punti indipendenti. Per quanto già osservato i due sottospazi $S_h = [p_o ,p_1,\ldots\ldots,p_h]$ ed $S_{r-h-1}=[p_{h+1} ,\ldots\ldots,p_r]$ sono tra loro supplementari.

Dalla proposizione 3.5 segue la seguente

Proposizione 3.6 . *Un sottospazio S_h è un iperpiano se e solo se esso è intersecato da ogni retta.*

Dimostrazione. Se S_h è un iperpiano per la formula di Grassmann esso è intersecato da ogni retta . Viceversa se S_h è intersecato da ogni retta è necessariamente $h = r-1$. Infatti se fosse $h < r-1$ un suo supplementare avrebbe almeno dimensione 1 e quindi esisterebbe una retta disgiunta da S_h.

I sottospazi supplementari hanno questa importante proprietà :

Proposizione 3.7 *Siano S_h ed S_{r-h-1} due sottospazi di S_r tra loro supplementari. Per ogni punto p non appartenente ad entrambi esiste una unica retta per p che incide sia l'uno che l'altro.*

Dimostrazione. Cominciamo col provare l'unicità. Supponiamo per assurdo esistano due rette distinte t e t' per p le quali intersecano sia S_h che S_{r-h-1} . Siano a e b i due punti che t ha in comune rispettivamente con S_h e con S_{r-h-1} e siano a' e b' i due punti che t' ha in comune rispettivamente con S_h e con S_{r-h-1} . Sia π il piano determinato dalle rette t e t' . Tale piano contiene quindi le rette L=[a , a'] ed L'=[b , b'] . Le rette L ed L' essendo rette di uno stesso piano hanno un punto y in comune . Poiché la retta L è contenuta in S_h e la retta L' è contenuta in S_{r-h-1} il punto y è allora un punto comune ad S_h ed S_{r-h-1} il che è assurdo essendo essi ad intersezione vuota.

Proviamo ora l'esistenza.

Consideriamo gli spazi $S_{h+1} = S_h \underline{\cup} \{p\}$ ed $S_{r-h}= S_{r-h-1} \underline{\cup} \{p\}$. Tali spazi hanno il punto p in comune e contenendo S_h ed S_{r-h-1} hanno come spazio congiungente lo spazio S_r . La dimensione del loro spazio intersezione è allora $i = h+1 + r\text{-}h - r = 1$. Tali spazi hanno quindi in comune una retta per p . Tale retta contenendo p non è contenuta né in S_h né in S_{r-h-1} ed interseca, per la formula di Grassmann, in un punto sia S_h che S_{r-h-1} .

La proposizione ora provata mette in risalto il ruolo svolto dalle rette di uno spazio grafico. Infatti possiamo ora provare la seguente :

Proposizione 3.8 *Lo spazio congiungente due sottospazi S_h ed S_k di S_r si ottiene come unione di tutte le rette [x , y] con x punto di S_h ed y punto di S_k.*

Dimostrazione. Sia S_m lo spazio congiungente $S_m = S_h \underline{\cup} S_k$. Se S_h ed S_k sono disgiunti essi sono spazi supplementari di S_m e l'asserto segue allora facilmente dalla proposizione 3.6 ora provata. Se S_h interseca S_k sia S_i il loro spazio intersezione. Sia S_t uno spazio supplementare di S_i nello spazio S_h. Sia ha facilmente $S_m = S_h \underline{\cup} S_k = S_t \underline{\cup} S_k$. Si ha inoltre

$$S_m = \bigcup_{\substack{x\in S_t \\ y\in S_k}} [x,y] \subseteq \bigcup_{\substack{x\in S_h \\ y\in S_k}} [x,y] \subseteq S_m$$

e quindi $\bigcup_{\substack{x\in S_h \\ y\in S_k}} [x,y] = S_m$ e ciò prova l'asserto.

Concludiamo tale numero con una utile proposizione che caratterizza i sottospazi di uno spazio grafico.

Proposizione 3.9 *Un sottoinsieme X di S_r è un sottospazio se e solo se esso ha la seguente proprietà:*

(*) *Per ogni $x,y \in X$ la retta $[x,y]$ è contenuta in X.*

Dimostrazione. Se X è un sottospazio ed x ed y sono due suoi punti allora X contiene la retta [x,y] che è lo spazio congiungente x ed y. Viceversa supponiamo che X abbia la proprietà (*) e verifichiamo che X è un sottospazio. Se X è vuoto o si riduce ad punto allora X è un sottospazio. Possiamo quindi supporre che X abbia almeno due punti x ed y. Per ipotesi la retta $S_1 =[x,y]$ è contenuta in X. Se $S_1=X$ allora X è un sottospazio. Possiamo quindi supporre che S_1 sia una parte propria di X. Sia y un punto di X e non appartenente ad S_1 . Consideriamo il piano S_2 che congiunge y e la retta S_1. Proviamo che tale piano è contenuto in X. Sia x un punto di S_2 diverso da y e non appartenente alla retta S_1. La retta t= [y,x] interseca la retta S_1 in un punto z. Pertanto la retta t contenendo i due punti y e z di X è contenuta in X. Il punto x è quindi un punto di X e così il piano S_2 è contenuto in X. Se S_2 = X allora X è un sottospazio.

Possiamo quindi supporre che S_2 sia una parte propria di X. Sia y un punto di X e non appartenente ad S_2 . Consideriamo lo spazio S_3 che congiunge y ed il piano S_2.

Proviamo che tale spazio S_3 è contenuto in X. Sia x un punto di S_3 diverso da y e non appartenente al piano S_2. La retta t= [y,x] interseca il piano S_2 in un punto z. La retta t contenendo i due punti y e z di X è contenuta in X. Il punto x è quindi un punto di X e così lo spazio S_3 è contenuto in X. Se S_3= X allora si ha l'asserto in caso contrario si procede come in precedenza . Dopo un numero finito di passi si perverrà ,come ultima eventualità , a concludere che S_r è contenuto in X e cioè S_r = X. L'asserto è così provato.

4. ***Spazi grafici irriducibili.***

In questo numero daremo la nozione di irriducibilità analizzando l'importanza di tale proprietà e le sue conseguenze.

Abbiamo già visto che S_r possiede r+1 punti indipendenti ma non sempre esso contiene r+2 punti ad r+1 ad r+1 indipendenti.

Quando lo spazio grafico possiede r+2 punti ad r+1 ad r+1 indipendenti esso è detto *irriducibile*.

Lo spazio descritto nell'esempio II non ha tale proprietà.

Lo spazio proiettivo $P_{r,k}$ costruito a partire da un campo K possiede questa proprietà . Infatti i punti

O_o (1,0,0,…..,0)

O_1 (0,1,0,…..,0)

…

..

O_r (0,0,0,…..,1)

U (1,1,1,…..,1)

sono r+2 punti ad r+1 ad r+1 indipendenti.

Un sottospazio S_h di S_r rispetto a tutti i sottospazi in esso contenuti è ovviamente esso stesso uno spazio grafico di dimensione h.

Pertanto lo spazio S_h è irriducibile se possiede h+2 punti ad h+1 ad h+1 indipendenti.

Una retta quindi è irriducibile se possiede almeno tre punti. Un piano è irriducibile se possiede quattro punti a tre a tre indipendenti cioè a tre a tre non allineati. Un S_3 è irriducibile se possiede cinque punti a quattro a quattro indipendenti e così via.

I due teoremi che seguono sono importanti perché forniranno una condizione molto semplice che è necessaria e sufficiente per valutare se lo spazio grafico è irriducibile. Vediamo.

Proposizione 4.1 *Sia S_r uno spazio grafico. Se tutti i suoi sottospazi di dimensione h+1 ($1 \leq h \leq r-1$) sono irriducibili lo stesso accade per tutti i suoi sottospazi di dimensione h.*

Dimostrazione. Dobbiamo considerare un qualsiasi sottospazio S_h di dimensione h e mostrare che esso è irriducibile cioè che contiene h+2 punti ad h+1 ad h+1 indipendenti. Sia quindi S_h un sottospazio di dimensione h. Poiché $h \leq r-1$ esso al massimo è un iperpiano quindi è possibile scegliere un punto p in S_r non appartenente ad S_h. Sia S_{h+1} lo spazio congiungente S_h ed il punto p.

Poiché per ipotesi ogni sottospazio di dimensione h+1 è irriducibile nello spazio S_{h+1} da noi costruito esistono h+3 punti ad h+2 ad h+2 indipendenti. Denotiamo tali punti con p_o , $p_1,\dots,p_{h+1}$, p_{h+2} . Poiché S_h non può contenere più di h+1 punti indipendenti almeno uno di tali punti non appartiene ad S_h. Non è restrittivo supporre che p_o non appartenga ad S_h. Le rette

$L_1 = [p_o,p_1]$, $L_2 = [p_o ,p_2]$,…., $L_{h+2}= [p_o, p_{h+2}]$

Sono contenute in S_{h+1} e non contenute in S_h e pertanto ognuna di esse interesca S_h in un punto.

Denotiamo con

$q_1 = L_1 \cap S_h$, $q_2 = L_2 \cap S_h$,………., $q_{h+2} = L_{h+2} \cap S_h$

tali punti di intersezione. Mostreremo ora che tali h+2 punti sono ad h+1 ad h+1 indipendenti e ciò proverà l'asserto. Dobbiamo escludere uno di tali punti e mostrare che i rimanenti sono indipendenti. Per semplicità escludiamo q_{h+2} e vediamo se i rimanenti sono indipendenti. Sia $S_t = [q_1, q_2, \dots, q_{h+1}]$ lo spazio congiungente i punti $q_1, q_2, \dots, q_{h+1}$. Dobbiamo far vedere, per provare la loro indipendenza, che tale spazio S_t ha dimensione h e quindi che è $t=h$. Poiché S_h contiene i punti $q_1, q_2, \dots, q_{h+1}$ esso contiene il loro spazio congiungente e quindi da $S_t \subseteq S_h$ segue $t \leq h$. Il punto p_o non appartenendo ad S_h non appartiene ad S_t che è contenuto in S_h. Lo spazio congiungente S_t e p_o ha allora dimensione $t+1$.

Tale spazio contiene le rette $[p_o, q_1]$, $[p_o, q_2]$, …, $[p_o, q_{h+1}]$, e quindi i punti $p_o, p_1, p_2, \dots, p_{h+1}$. Tali punti sono h+2 punti degli h+3 iniziali e quindi sono indipendenti . Lo spazio S_{t+1} contenendo tali punti contiene il loro spazio congiungente . Da

$S_{t+1} \supseteq [p_o, p_1, p_2, \dots, p_{h+1}] = S_{h+1}$ segue $t+1 \geq h+1$ e quindi $t \geq h$. Si ha quindi $t=h$ e l'asserto è provato.

Proposizione 4.2 *Sia S_r uno spazio grafico. Se tutti i suoi sottospazi di dimensione h ($1 \leq h \leq r-1$) sono irriducibili lo stesso accade per tutti i suoi sottospazi di dimensione h+1.*

Dimostrazione. Per la proposizione 4.1 ogni retta è irriducibile e quindi ogni retta ha almeno tre punti. Sia S_{h+1} un sottospazio qualsiasi di dimensione h+1. Dobbiamo provare che è irriducibile e che quindi possiede h+3 punti ad h+2 ad h+2 indipendenti. Nello spazio S_{h+1} ci sono h+2 punti indipendenti e siano $p_o, p_1, p_2, \dots, p_h, p$ Consideriamo i primi h+1 punti $p_o, p_1, p_2, \dots, p_h$ e sia S_h il loro spazio congiungente. Tale spazio è contenuto in S_{h+1} e non contiene l'ultimo punto p in quanto in S_h non possono esserci più di h+1 punti indipendenti. Poiché S_h è irriducibile in esso esistono h+2 punti e siano

$q_o, q_1, q_2, .., q_h, q_{h+1}$ che sono ad h+1 ad h+1 indipendenti.
Consideriamo la retta L= $[p, q_{h+1}]$. Poiché tale retta ha almeno tre punti c'è su di essa un punto q diverso da p e da q_{h+1}. Proveremo ora che gli h+3 punti $q_o, q_1, q_2, .., q_h, , p, q$ sono punti ad h+2 ad h+2 indipendenti. Se si esclude il punto q i rimanenti punti sono $q_o, q_1, q_2, .., q_h, p$ sono indipendenti.
Infatti

$$[q_o, q_1, q_2, .., q_h, p] = [q_o, q_1, q_2, .., q_h] \underline{\cup} \{p\} = S_h \underline{\cup} \{p\}$$

e tale spazio ha dimensione h+1 in quanto p non appartiene ad S_h.
La stessa argomentazione si può ripetere se escludiamo il punto p.
Escludiamo uno dei punti $q_o, q_1, q_2, .., q_h$ ad esempio q_o.
Consideriamo lo spazio $S_t = [q_1, q_2, .., q_h, p, q]$ congiungente i punti $q_1, q_2, .., q_h, p, q$. Per controllare che gli h+2 punti $q_1, q_2, .., q_h, p, q$ sono indipendenti dobbiamo verificare che lo spazio congiungente S_t ha dimensione h+1. Ovviamente essendo S_t contenuto in S_{h+1} risulta $t \leq h+1$. Lo spazio S_t contenendo i punti p e q contiene la retta [p,q] e quindi il punto q_{h+1}. Pertanto S_t contiene i punti $q_1, q_2, .., q_h, q_{h+1}, p$ e quindi il loro spazio congiungente

$$[q_1, q_2, .., q_h, q_{h+1}, p] = [q_1, q_2, .., q_h, q_{h+1}] \underline{\cup} \{p\} = S_h \underline{\cup} \{p\}$$

Ma tale spazio ha dimensione h+1, perché p non appartiene ad S_h, e quindi si ha $t \geq h+1$. Si ha allora $t = h+1$ e l' asserto è così provato.

Le due proposizioni ora provate conducono insieme alla seguente importante caratterizzazione.

Proposizione 4.3 *Uno spazio grafico S_r è irriducibile se e solo se ogni sua retta ha almeno tre punti.*

5. ***Spazi grafici irriducibili.***

In questo numero tratteremo gli spazi grafici irriducibili analizzando le loro proprietà e le eventuali caratterizzazioni.

La prima importante proprietà è fornita dalla seguente

Proposizione 5.1 *Le rette di uno spazio grafico irriducibile sono tra loro equipotenti.*

Dimostrazione. Siano L ed L' due rette e supponiamo dapprima che siano tra loro incidenti. Sia π il piano che le contiene. Sia O il punto comune ad L ed L'. Siano p e p' due punti diversi da O e scelti rispettivamente su L ed L'. Consideriamo la retta t per i punti p e p'. Poiché ogni retta ha almeno tre punti possiamo considerare su t un punto **u** distinto da p e p'. Il punto **u** non appartiene quindi né ad L né ad L' e consente di porre tra le due rette la seguente funzione manifestamente biettiva

$$x \in L \quad \to x' \in L'$$

con x' punto di intersezione di L' con la retta [x, **u**].

Siano ora L ed L' due rette sghembe tra loro cioè che abbiano intersezione vuota. Sia p un punto di L e p' un punto di L' e sia t la retta [p, p']. Per ciò che precede poiché t interseca sia L che L' si ha $|t| = |L|$ e $|t| = |L'|$ e così è $|L| = |L'|$.

La proprietà ora provata consente di introdurre la nozione di ordine di uno spazio grafico finito. Sia quindi S_r uno spazio grafico finito (l'insieme S_r è un insieme finito). Le rette di tale spazio hanno essendo sottoinsiemi di S_r, hanno ciascuna un numero finito di punti. Poiché le rette sono equipotenti esse hanno tutte la stessa cardinalità che indichiamo con q+1. L'intero q è detto l'***ordine*** dello spazio S_r.
Poiché ogni retta ha almeno tre punti è $q \geq 2$. Vedremo più avanti che tipo di intero è il numero q.

Uno spazio grafico finito ed irriducibile viene anche indicato spesso col simbolo $S_{r,q}$ facendo quindi apparire in questo simbolo sia la sua dimensione sia il suo ordine.

Per uno spazio grafico Sr,q è possibile determinare tutti gli aspetti aritmetici conteggiando sia il numero di punti che ha un sottospazio di dimensione h e sia il numero dei sottospazi di fissata dimensione. Per il primo aspetto possiamo subito dare risposta attraverso la proposizione che segue, mentre per il computo dei sottospazi di fissata dimensione daremo una risposta più tardi aiutandoci con strumenti che acquisiremo più avanti.

Proposizione 5.2 *Ogni sottospazio di dimensione h di uno spazio grafico $S_{r,q}$ finito irriducibile e d'ordine q ha la seguente cardinalità :*

(5.1) $$| S_h | = q^h + q^{h-1} + \ldots + q+1.$$

Dimostrazione. Se h = 1 il teorema è vero perché ogni retta ha q+1 punti. Supponiamo quindi h > 1 e vero il teorema per i sottospazi di dimensione h-1. Sia S_h un sottospazio di dimensione h e siano $p_o, p_1, \ldots p_h$ h+1 punti indipendenti di S_h. Consideriamo il sottospazio S_{h-1} di dimensione h-1 che si ottiene congiungendo i punti $p_1, p_2, .., p_h$. Il sottospazio S_{h-1} è contenuto in S_h ed il punto p_o non appartiene ad S_{h-1}. I punti dello spazio S_h diversi da p_o, come ora faremo vedere, si ripartiscono sulle rette $[p_o, x]$, private di p_o, con x variabile in S_{h-1}. In simboli

$$S_h = \bigcup_{x \in S_{h-1}} [p_0, x]$$

Ogni retta $[p_o, x]$ con x in S_{h-1} è contenuta in S_h e quindi $\bigcup_{x \in S_{h-1}} [p_0, x]$ è contenuta in S_h. Viceversa sia y un punto di S_h diverso da p_o e non appartenente ad S_{h-1}. La retta $[p_o, y]$ è contenuta in S_h ed interseca, per la formula di Grassmann, lo spazio S_{h-1} in un punto x_o. Pertanto y appartiene alla retta $[p_o, x_o]$ e quindi S_h è contenuto in $\bigcup_{x \in S_{h-1}} [p_0, x]$. Si ha allora utilizzando l'ipotesi d'induzione

$$| S_h | = q \, | S_{h-1} | + 1 = q \, (q^{h-1} + \ldots + q+1) + 1 = q^h + q^{h-1} + \ldots + q+1.$$

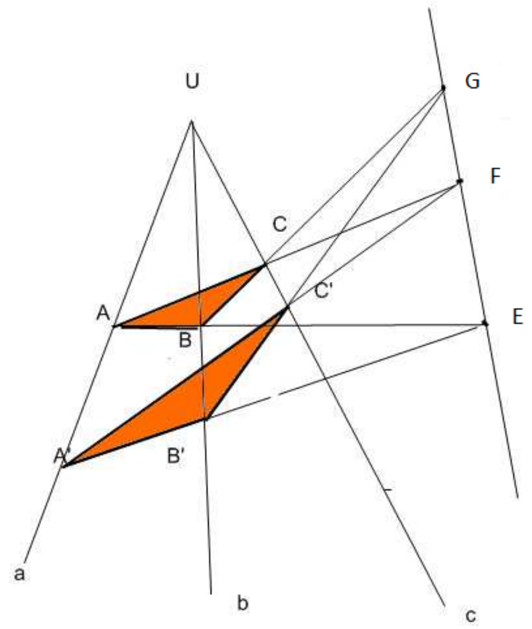
e quindi l'asserto.

Molto importante è la seguente

Proposizione 5.3 *Ogni spazio grafico S_r irriducibile di dimensione r con $r \geq 3$ è desarguesiano.*

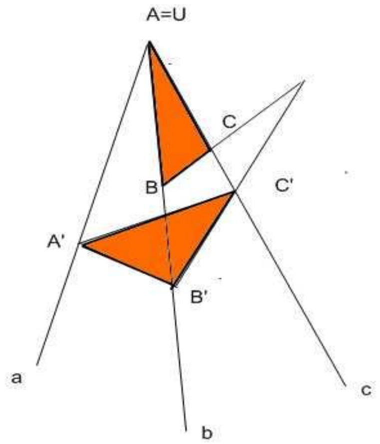
Dimostrazione. Dobbiamo controllare che nello spazio vale il teorema di Desargues che afferma quanto segue :

Sia U un punto dello spazio e siano a, b , c tre rette distinte passanti per U. Si scelgano due punti distinti A ed A' sulla retta a , due punti distinti B ed B' sulla retta b, due punti distinti C ed C' sulla retta c in modo che ABC siano non allineati ed A'B'C' siano non allineati. Allora la retta [A, B] interseca la retta [A', B'] , la retta [A, C] interseca la retta [A', C'], la retta [B, C] interseca la retta [B', C'] e questi tre punti di incontro sono allineati.



Possiamo supporre sempre che il punto U sia distinto dai punti A,B,C ed A',B',C' altrimenti il teorema è manifestamente verificato.

Supposto infatti A=U si ha $AB \cap A'B' = B'$, $AC \cap A'C' = C'$ e quindi il terzo punto $BC \cap B'C'$ è allineato con B' e C'.



Lo spazio congiungente le rette a ,b ,c avrà dimensione tre se le tre rette non sono complanari ed avrà dimensione due se giacciono in uno stesso piano. Possiamo quindi esaminare separatamente i due casi possibili.

Caso1 *Le tre rette a, b , c sono congiunte da uno spazio di dimensione tre.*

Denotiamo con S_3 lo spazio congiungente a,b,c. I punti A,B,C sono nello spazio S_3 e quindi il piano π da essi determinato è contenuto in S_3. Analogamente il piano π' determinato da A', B' , C' è contenuto in S_3. I due piani π e π' sono distinti , essendo le rette a, b, c non complanari , e quindi, essendo piani di uno stesso S_3 , hanno una retta in comune che denotiamo con ℓ. Le due rette [A, B] e [A',B'] giacciono in uno stesso piano , il piano determinato dalle rette a e b , e quindi hanno un punto **E** in comune. La retta [A, B] è su π e la retta [A',B'] è su π' e quindi il loro punto comune sta su entrambi i piani e quindi sulla retta ℓ.

Per le stesse ragioni :

le rette [A, C] e [A',C'] hanno un punto **F** in comune e tale punto appartiene ad ℓ.

le rette [B, C] e [B',C'] hanno un punto **G** in comune e tale punto appartiene ad ℓ.

Nel **Caso 1** esaminato il teorema di Desargues è quindi manifestamente vero. Esaminiamo ora l'altro caso possibile

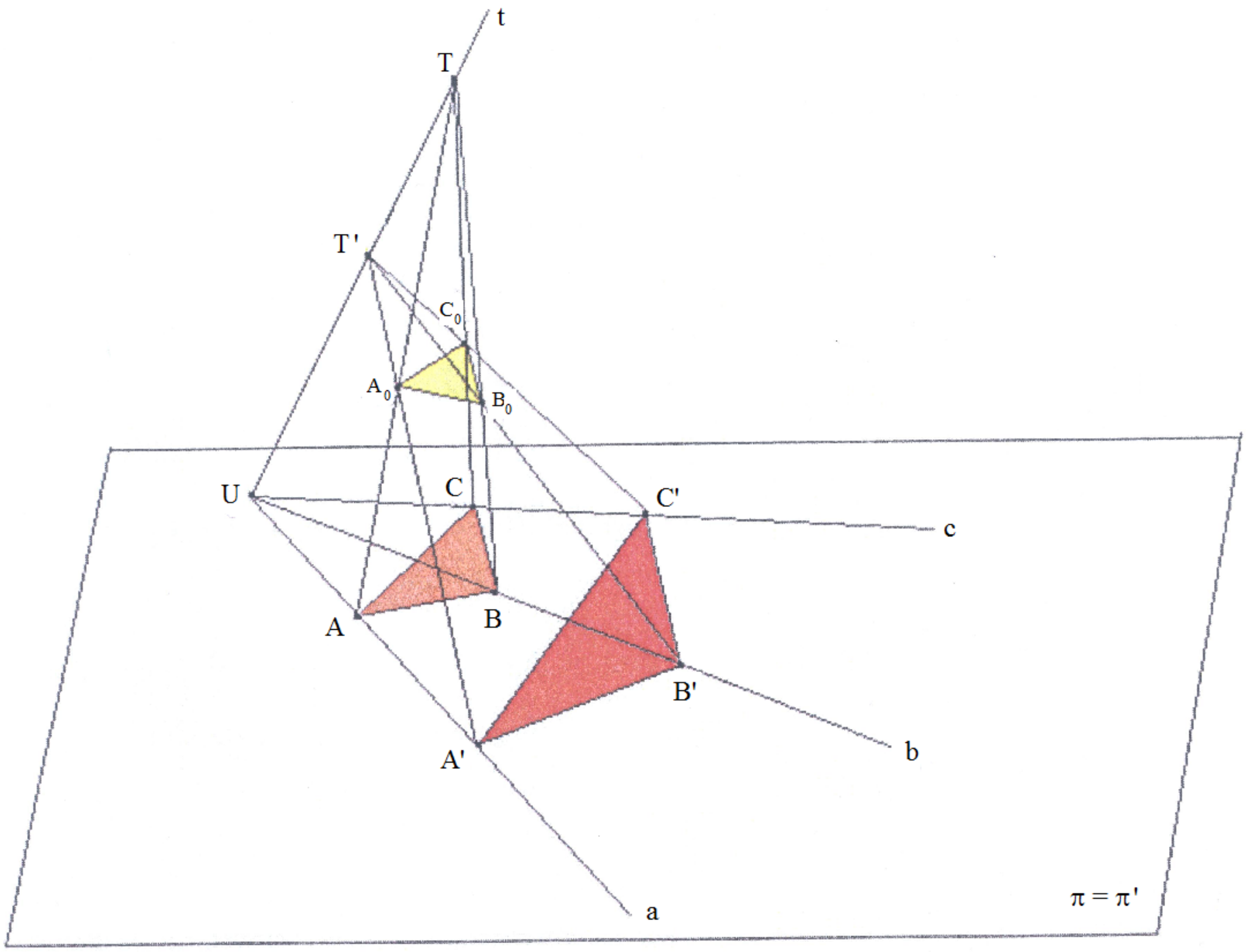
Caso 2. *Le rette a,b,c giacciono in uno stesso piano.*

Sia π il piano in cui giacciono le rette a , b , c. Poiché la dimensione dello spazio S_r è almeno tre tale piano è una parte propria di S_r e quindi è possibile trovare un punto T in S_r non appartenente al piano π . Sia t la retta [U , T]. Poiché lo spazio è irriducibile sulla retta t ci sono almeno tre punti e quindi è possibile scegliere su di essa un ulteriore punto T' diverso da U e T.

Le rette [A,T] ed [A' T'] giacciono nel piano determinato dalle rette a e t ed hanno quindi un punto in comune che denotiamo con A_o.

Le rette [B,T] e [B' T'] giacciono nel piano determinato dalle rette b e t ed hanno quindi un punto in comune che denotiamo con B_o.

Le rette [C,T] e [C' T'] giacciono nel piano determinato dalle rette c e t ed hanno quindi un punto in comune che denotiamo con C_o.



Essendo A,B,C non allineati lo stesso accade per i punti A_o , B_o, C_o ora costruiti. Il piano π_o determinato dai punti A_o , B_o, C_o è distinto dal piano π in quanto la retta t è non contenuta in π . I due triangoli A,B,C ed A_o , B_o, C_o si trovano quindi nella situazione già esaminata nel **Caso 1** e così , detta ℓ la retta comune ai piani π_o e π :

le rette [A_o, B_o] e [A, B] hanno un punto **E** in comune e tale punto appartiene ad ℓ

le rette [A_o, C_o] e [A, C] hanno un punto **F** in comune e tale punto appartiene ad ℓ

le rette [B_o, C_o] e [B, C] hanno un punto **G** in comune e tale punto appartiene ad ℓ

Analogamente i due triangoli A_o , B_o, C_o ed A' ,B', C' si trovano nella situazione già esaminata nel **Caso 1** e così :

le rette $[A_o, B_o]$ e $[A', B']$ hanno un punto **E'** in comune e tale punto appartiene ad ℓ

le rette $[A_o, C_o]$ e $[A', C']$ hanno un punto **F'** in comune e tale punto appartiene ad ℓ

le rette $[B_o, C_o]$ e $[B', C']$ hanno un punto **G'** in comune e tale punto appartiene ad ℓ

Il punto **E** è un punto di $[A_o, B_o]$ e di π. Il punto **E'** è un punto di $[A_o, B_o]$ e di π. Poiché è unico il punto in cui $[A_o, B_o]$ interseca π si ha **E=E'**.
Per analoghe ragioni è **F=F'** e **G=G'**.
Il punto **E** è quindi il punto comune alle rette $[A, B]$ e $[A',B']$
Il punto **F** è quindi il punto comune alle rette $[A, C]$ e $[A',C']$
Il punto **G** è quindi il punto comune alle rette $[B, C]$ e $[B', C']$
e tali punti essendo punti della retta ℓ sono allineati. L'asserto è così provato.

La grande importanza del teorema di Desargues è evidenziata dal seguente teorema del quale non daremo la dimostrazione .

Teorema fondamentale . *Uno spazio grafico S_r irriducibile è isomorfo allo spazio proiettivo numerico $P_{r,K}$ costruito su un opportuno corpo K se e soltanto se esso è desarguesiano.*

Tenendo conto della proposizione 5.3 si ha allora il seguente corollario.

Proposizione 5.4 *Ogni spazio grafico irriducibile di dimensione almeno tre è isomorfo ad uno spazio proiettivo numerico $P_{r,K}$ costruito su un opportuno corpo.*

Possiamo ora considerare uno spazio grafico S_r finito, irriducibile e che sia desarguesiano (ciò accade sempre se la sua dimensione è almeno tre) . Abbiamo già visto che essendo irriducibile le sue rette sono equipotenti e se q+1 è la loro cardinalità l'intero q è detto l'ordine dello spazio. Avevamo annunciato che avremmo valutato che tipo di intero è il numero q. Dopo i teoremi enunciati siamo in grado di dare una risposta. Vediamo.

Poiché lo spazio S_r è desarguesiano per il teorema fondamentale esiste un opportuno corpo K ed un isomorfismo φ tra $P_{r,K}$ ed S_r. La biezione φ essendo un isomorfismo trasforma una retta L di $P_{r,K}$ in una retta L' di S_r ponendo tra esse una biezione. Si ha allora $|L| = |L'| = q+1$. Ma come abbiamo già visto $|L| = |K| +1$ e quindi è $q = |K|$. Ne segue allora che K è un corpo finito e quindi è un campo che, come è noto, ha per cardinalità la potenza di un numero primo . Ne segue allora $q = |K| = p^h$ con p numero primo.

Abbiamo così provato la seguente

Proposizione 5.5 *L'ordine q di uno spazio grafico $S_{r,q}$ finito irriducibile e desarguesiano è un numero primo o la potenza di un numero primo.*

Sia S_2 uno spazio grafico irriducibile e dimensione due. Tale spazio ha come suoi sottospazi solo punti e rette e quindi lo si denota semplicemente come una coppia $(\pi, \mathcal{L})$ indicando con π l'insieme dei suoi punti e con $\mathcal{L}$ la famiglia delle sue rette.

Quando la dimensione è due le proprietà di spazio grafico insieme alla sua supposta irriducibilità possono essere enunciate in modo equivalente al seguente modo

I. ***Due punti sono congiunti da una retta***

II. ***Due rette hanno un punto in comune***

III. ***Ogni retta ha almeno tre punti.***

Uno **spazio grafico irriducibile di dimensione due** viene chiamato anche ***piano proiettivo.***

Quando il piano è finito ha per ordine un intero q che è un numero primo o potenza di un numero primo se esso è desarguesiano come abbiamo sopra provato.

Esistono però piani proiettivi finiti e non desarguesiani e per tali piani non è noto che tipo di intero sia l'ordine q di tali piani.

Tratteremo in avanti questo problema e vedremo alcune risposte finora note.

Riassumendo abbiamo visto che a meno di isomorfismi se la dimensione è almeno tre c'è un solo spazio grafico irriducibile ed esso è $P_{r,K}$ (spazio proiettivo numerico costruito a partire da un corpo K).

Restano quindi solo da classificare gli spazi grafici irriducibili di dimensione due cioè i piani proiettivi.

6. ***Spazio duale di uno spazio grafico.***

In questo numero vedremo come dato uno spazio grafico S_r di dimensione r se ne può costruire un altro anch'esso di dimensione r che è detto ***spazio duale*** .

Prima della sua costruzione sono utili alcune considerazioni.

Abbiamo già visto come le rette di S_r possono generare con le loro unioni tutti gli altri sottospazi. Allo stesso modo mostriamo ora come gli iperpiani possono generare con le loro intersezioni tutti gli altri sottospazi . Sussiste infatti la seguente

Proposizione 6.1 *Sia S_r uno spazio grafico di dimensione r. Ogni sottospazio S_{r-h} di dimensione r-h è intersezione di h iperpiani.*

Dimostrazione . Ragioniamo per induzione su h. Se h=1 il teorema è banalmente vero. Supponiamo quindi h > 1 e vero il teorema per i sottospazi $S_{r-(h-1)}$ di dimensione r-h+1. Sia quindi assegnato il sottospazio S_{r-h} (con h >1). Scegliamo in tale sottospazio r-h+1 punti indipendenti e siano $p_o,p_1,\dots,p_{r-h}$. Scegliamo altri h punti $q_1,q_2,\dots,q_h$ in modo che essi insieme ai punti

$p_o, p_1, \ldots, p_{r-h}$ diano luogo ad r+1 punti indipendenti di S_r.

Sia π l'iperpiano che si ottiene come spazio congiungente gli r punti indipendenti $p_o, p_1, \ldots, p_{r-h}, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}$ e sia S_{r-h+1} lo spazio congiungente S_{r-h} col punto q_h.

$$\pi = [\, p_o, p_1, \ldots, p_{r-h}, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1} \,] = [\, p_o, p_1, \ldots, p_{r-h} \,] \,\underline{\cup}\, [\, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1} \,] =$$

$$= S_{r-h} \,\underline{\cup}\, [q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}]$$

$$S_{r-h+1} = S_{r-h} \,\underline{\cup}\, \{q_h\}$$

Il punto q_h non appartiene all' iperpiano π e quindi lo spazio S_{r-h+1} costruito non è contenuto in π . Si ha allora $S_{r-h} \subseteq \pi \cap S_{r-h+1} = S'_{r-h}$. Si ha così

$S_{r-h} = \pi \cap S_{r-h+1}$.

Poiché per l'ipotesi di induzione $S_{r-h+1} = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \ldots \cap \pi_{h-1}$ è intersezione di h-1 iperpiani si ha che

$$S_{r-h} = \pi \cap S_{r-h+1} = \pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 \cap \ldots \cap \pi_{h-1}$$

è l'intersezione di h iperpiani e quindi si ha l'asserto.

Procediamo ora alla costruzione dello spazio duale dello spazio grafico S_r.

Sia quindi assegnato uno spazio grafico $(\, S_r\,,\, (\mathcal{P}_{-1}, \mathcal{P}_o, \ldots, \mathcal{P}_r)\,)$ di dimensione r. Denotiamo con S^*_r l'insieme di tutti gli iperpiani di S_r.

Sceglieremo ora nell'insieme S^*_r alcuni suoi sottoinsiemi che saranno quindi i suoi sottospazi ed attribuiremo ad ognuno di essi un intero , compreso tra -1 ed r , che definirà la sua dimensione . Controlleremo successivamente che le scelte fatte danno luogo ad uno spazio grafico di dimensione r. Vediamo.

Sia S_h un sottospazio di S_r col simbolo $(\, S_h)$ intenderemo rappresentare il sottoinsieme di S^*_r costituito dagli iperpiani che contengono il sottospazio S_h.

$$(\, S_h) = \{\, \pi \in S^*_r \;:\; \pi \supseteq S_h \,\}$$

Questo sottoinsieme è chiamato ***stella di iperpiani di asse*** $\boldsymbol{S_h}$ ed ad esso viene attribuito come sua dimensione l'intero **r-h-1**. Indicheremo il sottoinsieme $(\, S_h)$ anche col simbolo S^*_{r-h-1} .

Per familiarizzare bisogna quindi ricordarsi che la **somma tra la dimensione dell'asse e la dimensione attribuita alla stella è r-1.**

Denotiamo con $\mathcal{P}_h^*$ la famiglia di tutti i sottospazi di dimensione h di S_r^*.

Quando h (dimensione dell' asse) varia tra -1 ed r l'intero r-h-1 varia anch'esso tra -1 ed r .

Proveremo ora, come annunciato ,che la struttura (S_r^* , $\mathcal{P}_{-1}^*$ $\mathcal{P}_0^*$ .... $\mathcal{P}_r^*$) è uno spazio grafico. Prima di controllare che sono soddisfatte le proprietà di spazio grafico è utile qualche osservazione .

a) Se si intersecano tutti gli iperpiani della stella (S_h) si ottiene S_h .

Infatti abbiamo già provato che esistono r-h iperpiani $\pi_1 \cap \pi_2 \cap .... \cap \pi_{r-h}$ contenenti S_h e la cui intersezione è S_h. Pertanto si ha

$$S_h \subseteq \bigcap_{\pi \in (S_h)} \pi \subseteq \pi_1 \cap \pi_2 \cap .... \cap \pi_{r-h} = S_h$$

da cui segue $S_h = \bigcap_{\pi \in (S_h)} \pi$.

Proviamo che sussiste tale equivalenza :

b) $\quad \mathbf{S_h \subseteq S_k \Leftrightarrow (S_h) \supseteq (S_k)}$

Se S_h è contenuto in S_k ogni iperpiano che contiene S_k contiene S_h e quindi è $(S_k) \subseteq (S_h)$.

Viceversa se $(S_k) \subseteq (S_h)$ allora $\bigcap_{\pi \in (S_h)} \pi \subseteq \bigcap_{\pi \in (S_k)} \pi$ e quindi è $S_h \subseteq S_k$.

Ciò premesso possiamo ora verificare che la struttura geometrica (S_r^* , $\mathcal{P}_{-1}^*$ $\mathcal{P}_0^*$ .... $\mathcal{P}_r^*$) è uno spazio grafico.

Proviamo la prima proprietà.

Un sottospazio S_{-1}^* di dimensione -1 si ottiene come stella di iperpiani di asse S_r.

Si ha cioè : $\quad S_{-1}^* = (S_r)$.

Ma la stella (S_r) è unica perché unico è l'asse S_r ed è vuota in quanto nessun iperpiano contiene S_r. Pertanto c'è un solo sottospazio di dimensione -1 e questo è la parte vuota di S_1^* .

Un sottospazio S_0^* di dimensione zero si ottiene in corrispondenza di un iperpiano S_{r-1} di Sr , considerando la stella avente tale iperpiano come asse.

$$S_0^* = (S_{r-1})$$

La stella (S_{r-1}) consiste del solo iperpiano S_{r-1} . Pertanto i sottospazi di dimensione zero sono i singoli iperpiani e quindi i singoli punti di S_r^* .

L' unico sottospazio di dimensione r di S_r^* si ottiene come stella di iperpiani avente per asse l'unico sottospazio di dimensione -1 di S_r .

$$S_r^* = (S_{-1}) = (\varnothing)$$

Ma la stella $(\varnothing)$ è costituita da tutti gli iperpiani di S_r e quindi tale stella coincide con l'intero spazio S_r^* .

Dalla proprietà **b)** sopra provata segue facilmente la seconda proprietà di spazio grafico

2.
$$S_h^* \subseteq S_k^* \;\Rightarrow\; h \le k$$
$$S_h^* \subseteq S_k^* \;,\; h = k \;\Rightarrow\; S_h^* = S_k^*$$

Proviamo ora che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio. Dobbiamo far vedere quindi che l'intersezione di stelle di iperpiani è ancora una stella di iperpiani.

Sussiste infatti questa eguaglianza

3.
$$\bigcap_{i\in I} (S_{h_i}) = (\underline{\cup}\, S_{h_i})$$

La quale afferma che **l'intersezione delle stelle (S_{h_i}) aventi per asse i sottospazi S_{h_i} è la stella di iperpiani avente per asse lo spazio congiungente tali assi.**

Per verificare la verità di tale eguaglianza basta far vedere che ogni iperpiano appartenente all' intersezione $\bigcap_{i\in I} (S_{h_i})$ appartiene alla stella $(\underline{\cup}\, S_{h_i})$ e viceversa.

Infatti si ha :

$$\pi \in \bigcap_{i\in I} (S_{h_i}) \Leftrightarrow \pi \in (S_{h_i}) \textit{ per ogni } i \Leftrightarrow \pi \supseteq S_{h_i} \textit{ per ogni } i \Leftrightarrow \pi \supseteq \cup\, S_{h_i} \Leftrightarrow$$

$$\pi \supseteq \underline{\cup}\, S_{h_i} \Leftrightarrow \pi \in (\underline{\cup}\, S_{h_i}).$$

Ovviamente avendo controllato che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio si può considerare lo spazio congiungente due sottospazi.

Faremo ora vedere che si può determinare lo spazio congiungente i due sottospazi $S^*_h = (S_{r-h-1})$ ed $S^*_k = (S_{r-k-1})$ mostrando che si ha :

3') $$S^*_h \underline{\cup} S^*_k = (S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1})$$

La quale afferma che **lo spazio congiungente due stelle, rispettivamente di asse S_{r-h-1} e S_{r-k-1} , è la stella che ha per asse l'intersezione degli assi.**

Per provare la 3') bisogna far vedere che la stella $(S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1})$ è la più piccola stella che contiene sia (S_{r-h-1}) che (S_{r-k-1}) .

Essendo $S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1} \subseteq S_{r-h-1}, S_{r-k-1}$ da **b)** segue

$$(S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1}) \supseteq (S_{r-h-1}) , (S_{r-k-1})$$

Sia (S_m) una stella che contiene (S_{r-h-1}) e (S_{r-k-1}) . Sempre per la **b)** si ha allora

$$S_m \subseteq S_{r-h-1} , S_{r-k-1}$$

Quindi $S_m \subseteq S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1}$ e sempre per la **b)** si ha

$$(S_m) \supseteq (S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1}).$$

Avendo provato che la stella $(S_{r-h-1} \cap S_{r-k-1})$ è la più piccola stella a contenere (S_{r-h-1}) e (S_{r-k-1}) la 3') è verificata.

Proviamo infine che sussiste la formula di Grassmann. Siano quindi assegnati due sottospazi (S_h) ed (S_k) dello spazio duale. Sia

$$S_i = S_h \cap S_k \qquad \text{ed} \qquad S_c = S_h \underline{\cup} S_k.$$

Poiché S_r è uno spazio grafico

$$h + k = i + c.$$

Ora per quanto visto

$(S_h) \underline{\cup} (S_k) = (S_h \cap S_k) = (S_i)$

$(S_h) \cap (S_k) = (S_h \underline{\cup} S_k) = (S_c)$

E quindi si ha $\dim (S_h) = r\text{-}h\text{-}1$, $\dim (S_k) = r\text{-}k\text{-}1$

$\dim[(S_h) \underline{\cup} (S_k)] = r\text{-}i\text{-}1$ e $\dim[(S_h) \cap (S_k)] = r\text{-}c\text{-}1.$

Da $h+k = i+c$ segue sommando r-1 due volte sia al primo membro che al secondo membro si ha allora che è soddisfatta la formula di Grassmann , avendosi

$$\dim (S_h) + \dim (S_k) = \dim[(S_h) \underline{\cup} (S_k)] + \dim[(S_h) \cap (S_k)] .$$

Rileggendo con attenzione quanto fatto in questo paragrafo 6, si osserva che :

a) ogni spazio S_h di S_r dà luogo ad uno spazio di dimensione r-h-1 nel duale

b) la parola contenuto in S_r diventa contenente nel duale

c) per congiungere nel duale occorre intersecare nello spazio S_r

d) per intersecare nello spazio duale bisogna congiungere in S_r

Usando lo spazio duale si può provare la sussistenza di un principio detto **Principio di dualità**. Tale principio afferma quanto segue

Se una proposizione P è vera in uno spazio grafico risulta altrettanto vera nello stesso spazio la proposizione P che si ottenga sostituendo nell'enunciato della proposizione P la parola punto con la parola iperpiano la parola sottospazio S_h con la parola S_{r-h-1} , la parola incluso con include , la parola intersecare con congiungere e congiungere con intersecare.*

Vediamo un esempio che illustri la verità di detto principio.

P : *due punti distinti sono congiunti da una retta .*

La duale di tale proposizione è :

P* : *due iperpiani si intersecano in un S_{r-2}.*

La proposizione ***P**** è vera perchè conseguenza della formula di Grassmann. Ma il principio afferma che essa è vera perché è vera la ***P***.

Infatti poiché ***P*** è vera in ogni spazio grafico essa è vera anche nello spazio duale. Se quindi prendiamo due punti distinti (S_{r-1}) e (S'_{r-1}) nel duale il loro spazio congiungente è una retta . Quindi

$$\dim [(S_{r-1}) \underline{\cup} (S'_{r-1})] = \dim (S_{r-1} \cap S'_{r-1}) = 1$$

il che comporta che lo spazio $S_{r-1} \cap S'_{r-1}$ ha dimensione r-2.

Una ultima ma importante osservazione è la seguente.

Sia S_r uno spazio grafico e siano S_1 ed S_{r-2} due sottospazi tra loro supplementari .
Abbiamo già visto come sia possibile costruire due siffatti spazi. Infatti se prendiamo r+1 punti indipendenti di S_r la retta che unisce due di essi e lo spazio S_{r-2} determinato dagli altri r-1 punti sono tra loro supplementari.

Quando si ha una coppia (S_1 , S_{r-2}) di questo tipo si può costruire una applicazione biettiva tra S_1 e la stella di iperpiani di asse S_{r-2} al seguente modo :

$$\varphi : \ p \in S_1 \ \rightarrow S_{r-1} = S_{r-2} \ \underline{\cup} \ \{ p \}$$

Essendo tale applicazione biettiva ci sono tanti iperpiani passanti per S_{r-2} quanti sono i punti della retta S_1 e viceversa ci sono tanti punti su S_1 quanti gli iperpiani per S_{r-2}.
Ma gli iperpiani per S_{r-2} costituiscono i punti della retta $S^*_1 = (S_{r-2})$ dello spazio duale determinata dal sottospazio S_{r-2}. Quindi queste due rette S_1 ed $S^*_1 = (S_{r-2})$ sono tra loro equipotenti.

Tenendo conto che per ogni S_1 si può trovare un sottospazio S_{r-2} ad esso supplementare e viceversa dato un sottospazio S_{r-2} si può determinare un sottospazio S_1 ad esso supplementare , è facile dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 6.2 *Lo spazio grafico S_r è irriducibile se e solo se tale risulta il suo spazio duale.*

In particolare se **S_r è finito ed irriducibile ed ha ordine q allora anche lo spazio duale che ha la stessa dimensione, è irriducibile ed ha lo stesso ordine q.**

Vediamo nel numero successivo l'utilità di queste proprietà acquisite.

7. ***Proprietà aritmetiche di uno spazio grafico finito irriducibile di dimensione r e d'ordine q.***

Procediamo per passi in base alla dimensione per familiarizzare con alcuni utili meccanismi che si ripetono in ogni dimensione.

Prima di procedere è molto importante osservare che ogni sottospazio di dimensione h di S_r determina un sottospazio di dimensione r-h-1 nel duale e viceversa e così si ha

(7.1) $$| \mathcal{P}_h | = | \mathcal{P}^*_{r-h-1} | = | \mathcal{P}_{r-h-1} |$$

Pertanto conteggiando il numero dei sottospazi di dimensione h si conteggia anche il numero di quelli di dimensione r-h-1. Nei primi passi che seguono useremo volutamente poco questa formula (7.1) che è molto utile per le dimensioni alte perché riduce di molto il numero dei conteggi da fare.

Passo 1 . r =2.

Se la dimensione è due nello spazio ci sono solo punti e rette. Per due punti passa una sola retta e due rette hanno un punto in comune , Inoltre ogni retta ha q+1 punti, essendo q l'ordine.

Quante rette passano per un punto ? Vediamo .

Sia p un punto e sia L una retta non passante per p . Un punto x di L congiunto con p dà luogo ad una retta per p. Viceversa una retta per p interseca L in un punto. Pertanto le rette per p sono tante quanti i punti di L e quindi q+1.

Poiché ogni punto del piano distinto da p si trova su una retta per p si ha che

$$| S_2 | = q(q+1) +1 = q^2 + q + 1.$$

Consideriamo le coppie ordinate punto-retta (p, L) con p su L. Possiamo conteggiare il loro numero in doppio modo alla maniera seguente : fissato p si hanno q+1 coppie del tipo richiesto affiancando ad esso le q+1 rette che passano per esso. Poiché p si può scegliere in $q^2 + q + 1$ modi le coppie (p, L) con p su L sono $(q^2 + q + 1)(q+1)$.

Fissata una retta L si possono costituire con tale retta q+1 coppie (p, L) con p su L affiancando ad essa i q+1 punti p che ad essa appartengono. Quindi le coppie (p,L) sono in numero di $|\mathcal{L}|(q + 1)$. Eguagliando i due valori trovati

$$|\mathcal{L}|(q + 1) = (q^2 + q + 1)(q+1).$$

Si ha $|\mathcal{L}| = q^2 + q + 1$.

Passo 2 . r =3.

Se lo spazio ha dimensione tre in esso ci sono *punti , rette e piani*.

Al solito quante rette passano per un punto ? Vediamo .

Sia p un punto e si consideri un piano π non passante per p . Un punto x di tale piano congiunto con p determina una retta per p. Viceversa una retta per p interseca il piano π e quindi determina un punto x di tale piano. Le rette per p sono quindi tante quanti i punti di π e cioè $q^2 + q +1$. Ogni punto di S_3 distinto da p giace su una retta per p e quindi si ha :

$$|S_3| = q (q^2 + q +1) + 1= q^3 + q^2 + q +1.$$

Quante rette ci sono ? Vediamo

Conteggiando in doppio modo le coppie punto-retta (p, L) con p su L si ha

$$(q^3 + q^2 + q +1)(q^2 + q +1) = |\mathcal{L}|(q + 1)$$

Da cui segue :

$$|\mathcal{L}| = (q^2 + 1)(q^2 + q +1)$$

Quanti piani ci sono ?

I piani costituiscono i punti dello spazio duale il quale ha dimensione tre ed ordine q .Pertanto i piani sono in numero di $q^3 + q^2 + q +1$.

Passo 3. r =4.

Se lo spazio ha dimensione quattro in esso ci sono *punti , rette , piani* , *iperpiani.*

Intanto per ogni punto quante rette passano ? Vediamo .

Si consideri un punto p e sia S_3 un iperpiano non passante per esso . Un punto x di S_3 congiunto con p dà luogo ad una retta per p . Viceversa una retta per p interseca l'iperpiano S_3 in punto x. Quindi le rette per p sono tante quanti i punti di S_3 che sono in numero di q^3+q^2+q+1 . Poiché ogni punto di S_4 distinto da p giace su una retta per p si ha :

$$|S_4| = q(q^3+q^2+q+1)+1 = q^4+q^3+q^2+q+1.$$

Quante sono le rette **?**

Conteggiando in doppio modo le coppie ordinate (p, L) punto – retta con p su L si ha : $(q^4+q^3+q^2+q+1)(q^3+q^2+q+1) = |\mathscr{L}|(q+1)$

Da cui dividendo per q+1 si ha

$$\text{(J)} \qquad |\mathscr{L}| = (q^4+q^3+q^2+q+1)(q^2+1)$$

Quanti sono i piani ?

Una piano di S_4 determina una retta del duale e viceversa una retta del duale determina un piano di S_4. Pertanto i piani sono tanti quante le rette dello spazio duale che però ha la stessa dimensione e lo stesso ordine q e quindi il numero determinato in (j) fornisce anche il numero dei piani dello spazio.

Quanti sono gli iperpiani ?

Gli iperpiani sono i punti dello spazio duale . Lo spazio duale ha dimensione quattro ed ordine q e quindi esso ha $q^4+q^3+q^2+q+1$ punti.

Per esercizio si lasciano i casi successivi **r=5 , r=6 ed r=7** al lettore.

Per valutare l'importanza della (7.1) facciamo il calcolo per la dimensione **r = 8**. In questo calcolo ci saranno le idee da seguire per svolgere agevolmente l'esercizio lasciato al lettore.

Sia quindi S_8 uno spazio grafico finito irriducibile di dimensione otto e di ordine q. I suoi iperpiani , sottospazi di dimensione sette , sono i punti del duale e quindi in numero di $q^8+q^7+\ldots+q+1$.

Per la (7.1)

I sottospazi di dimensione sei sono tanti quanto quelli di dimensione uno.

I sottospazi di dimensione cinque sono tanti quanto quelli di dimensione due.

I sottospazi di dimensione quattro sono tanti quanto quelli di dimensione tre.

Pertanto calcolando il numero delle rette , il numero dei piani ed il numero di S_3 si ha una informazione completa.

Useremo per semplificare la scrittura il simbolo θ_i per rappresentare l'intero

$$q^i + q^{i-1} + \dots + q + 1$$

ed il simbolo Δ_i per la cardinalità della famiglia $\mathcal{P}_i$.

Per un punto p passano θ_7 rette (quanto i punti di un iperpiano non passante per p) e quindi col doppio conteggio delle coppie punto-retta (p, L) con p su L si ha :

$$\theta_8\,\theta_7 = \Delta_1\,(q+1)$$

e quindi $\Delta_1 = \theta_8\,\theta_7 / (q+1)$

I piani per una retta sono tanti quanto i punti di uno spazio S_6 supplementare della retta . Pertanto conteggiando le coppie retta-piano (L ,π) con L contenuta in π si ha

$$\Delta_1\,\theta_6 = \Delta_2\,\theta_2$$

Dalla quale segue $\Delta_2 = \Delta_1\,\theta_6 / \theta_2$.

Gli S_3 per un piano sono tanti quanto i punti di un spazio S_5 supplementare col piano. Pertanto conteggiando in doppio modo le coppie piano-S_3 , (π , S_3) con π contenuto in S_3 si ha :

$$\Delta_2\,\theta_5 = \Delta_3\,\theta_3$$

Da cui segue $\Delta_3 = \Delta_2\,\theta_5 / \theta_3$

Questo esercizio svolto suggerisce un modo per determinare i caratteri aritmetici di uno spazio grafico finito irriducibile d'ordine q di dimensione r qualsiasi.

8. ***Spazi lineari e spazi proiettivi.***

Uno *spazio lineare* finito è una coppia (S, $\mathcal{L}$), dove S è un insieme finito non vuoto, i cui elementi sono chiamati *punti* ed $\mathcal{L}$ è una famiglia di parti proprie di S ciascuna di cardinalità almeno due i cui elementi sono chiamate *rette* tale che :

(i) Due punti distinti appartengono ad un'unica retta.

Per ogni punto p denoteremo con [p] il *grado* di p, cioè il numero di rette passanti per p e per ogni retta ℓ denoteremo con [ℓ] o con k_ℓ la sua *lunghezza*, cioè la sua cardinalità . Si denota di solito con **v** la cardinalità di S e con **b** la cardinalità di $\mathcal{L}$.

Se n + 1 è il massimo dei gradi dei punti di S l'intero n è detto l'*ordine* dello spazio lineare. Evidentemente se lo spazio lineare ha ordine n per ogni retta ℓ risulta [ℓ] $\leq$ n + 1 e conseguentemente conteggiando i punti di S attraverso le rette per un punto di grado n + 1 si ha:

$$v \leq (n+1)\, n + 1 = n^2 + n + 1.$$

Un sottoinsieme X di S è detto *sottospazio* se X contiene la retta congiungente due suoi qualsiasi punti .

Lo spazio lineare (S , $\mathcal{L}$) è detto ***irriducibile*** se ogni sua retta ha almeno tre punti.

Siano L ed L' due rette incidenti tra loro di uno spazio lineare (S , $\mathcal{L}$) irriducibile.

Sia O il punto comune ad L ed L'. Una retta t che incide L in un punto a diverso da O ed L' in punto a' di L' diverso da O è detta una ***trasversale*** delle due rette L ed L'.

Lo spazio lineare irriducibile è detto ***proiettivo*** se verifica la seguente proprietà, detta di **Veblen-Young**

(V.Y) *due trasversali due rette incidenti sono tra loro incidenti.*

Si può dimostrare il seguente

Teorema [6] *Se uno spazio lineare (S , $\mathcal{L}$) finito irriducibile ha la proprietà (V.Y) allora i punti e le rette di (S , $\mathcal{L}$) sono i punti e le rette di uno spazio proiettivo $S_{r,q}$.*

Uno *spazio planare finito* è una terna (S, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) di *punti , rette e piani* dove la coppia (S, $\mathcal{L}$) è uno spazio lineare finito e $\mathcal{P}$ è una famiglia di sottospazi propri di (S, $\mathcal{L}$) detti *piani* verificante le seguenti proprietà .

I. Ogni piano ha tre punti non allineati

II. Ogni terna di punti non allineati appartiene ad un unico piano.

Di solito si denota con **v** la cardinalità dell'insieme S con **b** quella dell'insieme $\mathcal{L}$ e con **c** quella dell'insieme $\mathcal{P}$. L'insieme delle rette passanti per un punto p e contenute in un piano π per p è chiamato *fascio di rette di centro p* ed . Se n+1 è la massima cardinalità dei fasci di rette , l'intero n è detto l'*ordine* dello spazio planare. Lo spazio planare (S, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) è detto *irriducibile* se tale è lo spazio lineare (S, $\mathcal{L}$).

Sia (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) uno spazio planare irriducibile. E' evidente quanto segue :

Se ogni piano dello spazio planare (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) è un piano proiettivo allora lo spazio lineare irriducibile (S, $\mathcal{L}$) ha la proprietà di Veblen-Young e quindi i punti , le rette ed i piani di (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) sono i punti , le rette ed i piani di uno spazio proiettivo Sr,q.

Uno spazio proiettivo $S_{r,q}$ di dimensione r (r ≥ 3) e d'ordine q insieme alla famiglia $\mathcal{L}$ delle sue rette costituisce uno spazio lineare . I piani sono sottospazi di questo spazio lineare e se si considera oltre alla famiglia $\mathcal{L}$ delle sue rette anche la famiglia $\mathcal{P}$ dei suoi i piani si ottiene uno spazio planare. I piani di $S_{r,q}$ sono proiettivi e quindi per le rette di $S_{r,q}$ vale la proprietà di Veblen-Young.

Pertanto la proprietà di Veblen-Young caratterizza gli spazi proiettivi quando essi sono pensati come spazi lineari e la proprietà

($\wp$) ***ogni piano è un piano proiettivo.***

caratterizza gli spazi proiettivi di dimensione almeno tre quando essi sono pensati come spazi planari.

Sussistono cioè queste due proposizioni.

Teorema I . *I punti e le rette di uno spazio lineare finito irriducibile sono i punti e le rette di uno spazio proiettivo se e solo se le rette verificano la proprietà di Veblen-Young.*

Teorema II. *I punti e le rette ed i piani di uno spazio planare finito irriducibile sono i punti e le rette ed i piani di uno spazio proiettivo se e solo se i suoi piani sono piani proiettivi.*

9. Il disegno dei punti e degli iperpiani di $S_{r,q}$.

In questo numero introdurremo la nozione di ***disegno a blocchi*** .
Riconosceremo successivamente che i punti e gli iperpiani di uno spazio grafico finito irriducibile costituiscono un particolare disegno a blocchi . Riusciremo a caratterizzare attraverso una semplice proprietà tale disegno.

Un ***disegno a blocchi*** è una coppia $D = (S , \mathcal{B})$ dove S è un insieme finito i cui elementi chiameremo ***punti*** e $\mathcal{B}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S chiamati ***blocchi*** verificante le seguenti proprietà :

1. *Ogni blocco ha cardinalità* ***k*** .

2. *Per due punti distinti passano* λ *blocchi.*

Indichiamo con **v** la cardinalità di S e con **b** la cardinalità di $\mathcal{B}$.
Dalle proprietà 1. e 2. segue :

Proposizione 9.1 *Per ogni punto passa un numero r costante di blocchi.*

Dimostrazione. Sia p un punto. Indichiamo con r(p) il numero di blocchi passanti per p. Si considerino le coppie ordinate (p' , B) punto-blocco , con p' punto distinto da p e B blocco per i punti p e p'.

Fissato p' ci sono λ coppie del tipo richiesto affiancando ad esso i λ blocchi B che passano per p e p'. Poiché p' possiamo sceglierlo in v-1 modi le coppie (p' , B) sono (v-1) λ. Fissato B passante per p ci sono k-1 coppie (p' , B) ottenute affiancando a B i k-1 punti p' distinti da p che esso contiene. Le coppie sono quindi

r(p)(k-1) . Eguagliando i due valori trovati si ha allora

3. $$r(p) = \frac{(v-1)\lambda}{k-1}$$

La 3. mostra che l'intero r(p) non dipende da p e quindi sarà denotato semplicemente con r.

Se p è un punto denoteremo con $\mathcal{B}$ (p) l'insieme dei blocchi passanti per p e tale insieme è chiamato *stella di blocchi di centro p.*

Gli interi (v , k , λ , r , b) sono chiamati i ***parametri*** del disegno. Conteggiando in doppio modo le coppie (p , B) punto-blocco con p su B si ha :

4. $$vr = bk$$

Conteggiando in doppio modo le coppie ordinate ({x,y}, B) con x ed y punti distinti e B blocco contenente tali punti si ha :

5. $$v(v-1)\lambda = k(k-1)b$$

Un disegno di parametri (v , k , λ , r , b) è detto ***simmetrico*** se risulta v=b o equivalentemente r = k .

Si prova che in un **disegno simmetrico due blocchi distinti hanno λ punti in comune**.

Se D= (S , $\mathcal{B}$) è un disegno simmetrico di parametri (v , k , λ) si può costruire un altro disegno D* = (S* , $\mathcal{B}$*) detto *duale di D* al modo seguente. Si assumano come punti di S* i blocchi di D e come blocchi di D* le stelle di blocchi $\mathcal{B}$(p) al variare di p in S.

Se B e B' sono due punti di S* i blocchi $\mathcal{B}(p)$ contenenti entrambi sono quelli il cui centro p è un punto di $B \cap B'$ e pertanto sono in numero di λ .

Denotiamo con (v^* , k^* , λ^*) i parametri di D*.

Si ha allora $v^* = b = v$, $k^*= r = k$, $\lambda^* = \lambda$

Inoltre due blocchi $\mathcal{B}(p)$ e $\mathcal{B}(p')$ hanno λ punti in comune corrispondenti ai λ blocchi di D che passano per i punti p e p'.

Utile è la seguente osservazione.

Un caso speciale si ha quando il disegno (S , $\mathcal{B}$) è simmetrico ed è $\lambda =1$. In tal caso i blocchi possono essere chiamati rette e la coppia (S , $\mathcal{B}$) è uno spazio lineare.

Dalla 5. Essendo b=v e $\lambda =1$ si ha

6. $v = k^2 - k +1 = (k-1)^2 + (k-1) +1.$

Per ogni punto p di S si ha

$$[p]=\frac{v-1}{k-1}=\frac{k^2-k}{k-1}=k$$

Pertanto i punti hanno grado k e le rette lunghezza k e quindi due rette hanno sempre un punto in comune. Se k=2 è v=3 e lo spazio lineare è un triangolo se $k \geq 3$ allora (S , $\mathcal{B}$) è un piano proiettivo.

Abbiamo ritrovato in modo più semplice il teorema fondamentale sugli spazi lineari grazie alla circostanza che oltre ad essere b=v le rette sono equipotenti.

Abbiamo così stabilito la seguente

Proposizione 9 .2 *Un disegno simmetrico con parametri (v , k , 1) è un triangolo se k=2 ed è un piano proiettivo d'ordine k-1 se è $k \geq 3$.*

Vediamo qualche esempio di disegno a blocchi.

Esempio I. Sia S un insieme di cardinalità r+1 ($r \geq 2$) . Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti i suoi sottoinsiemi di cardinalità r . Denotiamo con a_0 ,a_2 ,…., a_r . gli elementi di S e con B_i il sottoinsieme ottenuto privando S del punto a_i. L'insieme S con la famiglia di blocchi B_0 , B_1,…, B_r è un disegno simmetrico di parametri (r+1 , r, r-1). Infatti se consideriamo due punti ad esempio a_0 ed a_1 i blocchi che contengono tali due punti sono B_2,B_3,…,B_r e sono quindi r-1 inoltre la loro intersezione è esattamente la coppia { a_0,a_1} in quanto per ogni altro punto aj distinto da a_0,ed a_1 c'è tra i blocchi B_2,B_3,…,B_r un blocco, che è Bj, che non contiene tale punto. Se chiamiamo retta per i punti a_0, ed a_1 la coppia { a_0,a_1} tale retta incontra ogni blocco.

Quanto detto sulla coppia { a_0,a_1} si può ovviamente ripetere su ogni altra coppia di punti. Si riconosce così che le rette sono le coppie di punti ed il disegno costruito è il disegno dei punti e degli iperpiani dello spazio grafico di dimensione r avente per sostegno S e come sottospazi di dimensione h tutti i suoi sottoinsiemi di cardinalità h+1.

Esempio II . I punti e le rette di un piano proiettivo finito d'ordine q sono punti e blocchi di un disegno simmetrico i cui parametri sono (q^2+q+1 , q+1, 1).

Esempio III . *Sia $S_{4,q}$ lo spazio proiettivo di dimensione quattro e di ordine q*. Se assumiamo come blocchi i suoi piani si ottiene un disegno a blocchi. Infatti ogni piano ha q^2+q+1 punti . Siano p e p' due punti distinti . Un piano contiene i due punti se e solo se contiene la retta che li congiunge. Pertanto il parametro λ di tale disegno corrisponde a calcolare il numero di piani passanti per una retta. I piani per una retta L sono tanti quanti i punti di un piano supplementare della retta L. Pertanto è $\lambda = q^2+q+1$. Il parametro b cioè il numero dei piani di $S_{4,q}$ lo abbiamo precedentemente calcolato esso è $(q^4 + q^3+ q^2 + q +1) (q^2 +1)$.I piani per un punto p sono tanti quante le rette di uno spazio S_3 non passante per p. Tale disegno è non simmetrico ed i suoi parametri sono quindi :

$v = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$

$k = q^2 + q + 1$

$\lambda = q^2+q+1$

$r = (q^2+1)(q^2 + q + 1)$

$b = (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) (q^2 + 1)$.

Se avessimo assunto come blocchi di $S_{4,q}$ i suoi iperpiani allora avremmo ottenuto un disegno simmetrico e sarebbe stato un caso particolare di questo esempio **V** del tutto generale.

Esempio IV. Sia $S_{r,q}$ lo spazio proiettivo di dimensione r e di ordine q. Se assumiamo come blocchi i suoi iperpiani si ottiene un disegno a blocchi. Possiamo assumere $r > 2$ perché per r=2 si ottiene l'esempio II.

Si ha $v = q^r + q^{r-1} + \ldots + q + 1$

Ogni iperpiano ha

$k = q^{r-1}+q^{r-2}+ \ldots q+1$ punti .

Siano p e p' due punti distinti . Se un iperpiano contiene i due punti allora esso contiene la retta L che li congiunge.Viceversa se un iperpiano contiene la retta L allora contiene i due punti . Pertanto calcolare quanti piani passano per i punti p e p' equivale a calcolare quanti piani contengono la retta L. Il parametro λ di tale disegno è quindi il numero degli iperpiani passanti per una retta. Gli iperpiani per una retta ℓ sono tanti quanti i sottospazi di dimensione r-3 di uno spazio S_{r-2} supplementare della retta ℓ. I sottospazi di dimensione r-3 di S_{r-2} sono i suoi iperpiani e quindi sono tanti quanti i punti di S_{r-2}. Pertanto è

$\lambda = q^{r-2} + q^{r-3} + \ldots + q + 1$

Tale disegno è simmetrico in quanto il numero di iperpiani eguaglia il numero dei punti.

Osserviamo che si considerano due punti p e p' e si intersecano tutti gli iperpiani che passano per questi due punti si ottiene la retta ℓ che congiunge tali punti. Inoltre

* *Ogni retta incontra ogni blocco*

e ciò accade perché ogni blocco è un iperpiano. Quindi attraverso gli iperpiani con le loro intersezioni potremmo ricostruire le rette e queste hanno la proprietà *. Questa idea è la linea guida della dimostrazione del teorema di Dembowski – Wagner che ora presentiamo il quale fornisce una caratterizzazione del disegno dei punti e degli iperpiani di $S_{r,q}$ ora descritto.

Sia $(S , \mathcal{B})$ un disegno simmetrico di parametri (v, k, λ). Possiamo costruire una famiglia $\mathcal{L}$ di sottoinsiemi di S che chiameremo *rette* e mostreremo che la coppia $(S , \mathcal{L})$ è uno spazio lineare. Siano x ed y due punti distinti di S. Denotiamo con $[x , y]$ il sottoinsieme di S che si ottiene intersecando i λ blocchi passanti per i punti x ed y. Chiamiamo retta tale sottoinsieme . In simboli

$$[x , y] = B_1 \cap B_2 \cap \ldots\ldots \cap B_\lambda$$

Siano z , z' due punti della retta [x , y] . Tali punti appartengono ai blocchi $B_1 , B_2 ,\ldots\ldots, B_\lambda$ e quindi i blocchi per i punti z e z' sono gli stessi che contengono x ed y. Cosi la retta

$$[z , z'] = \bigcap_{z,z' \in B} B = [x , y]$$

Denotiamo con $\mathcal{L}$ la famiglia di tutte le rette [x , y] al variare di x ed y in S. E' evidente ora che la coppia $(S , \mathcal{L})$ è uno spazio lineare. Inoltre ogni blocco è un **sottospazio** di tale spazio lineare.

Supporremo ora che sia verificata la seguente proprietà

(9.1) ***Ogni retta incontra ogni blocco*** .

Possiamo per la proposizione 9.1 supporre che sia $\lambda > 1$ e valutare le conseguenze della proprietà (9.1).

Proviamo che :

Proposizione 9.3 *Per ogni punto p esiste un blocco B non contenente p. Ne segue che ogni punto ha grado k.*

Dimostrazione. Sia p un punto e sia p' un punto distinto da p . Poiché $r=k > \lambda$

c' è un blocco B per p' non contenente p . Poiché ogni retta incontra ogni blocco le rette per p sono tante quanti i punti di B e quindi il grado di p è k.

Proposizione 9.4 *Le rette dello spazio lineare (S , $\mathcal{L}$) sono equipotenti.*

Dimostrazione. Sia ℓ una retta **.** Ci sono λ blocchi che contengono tale retta mentre gli altri blocchi intersecano ℓ in un punto. Per ogni punto p di ℓ ci sono quindi $r - \lambda$ blocchi che intersecano ℓ esattamente nel punto p. Si ha allora

$$b = \lambda + |\ell|(r - \lambda). \tag{9.2}$$

Tenendo conto che $b=v$ ed $r=k$ si ha

$$|\ell| = \frac{v - \lambda}{k - \lambda} \tag{9.3}$$

e tale formula prova che le rette hanno tutte la stessa cardinalità .

Possiamo ora esaminare separatamente i due casi possibili :

1. *Tutte le rette hanno lunghezza due*

2. *Ogni retta ha almeno tre punti.*

Caso 1. *Tutte le rette hanno lunghezza due.*

Se tutte le rette hanno lunghezza due , calcolando v attraverso le rette per un punto p si ha $v = k+1$. Poiché è $b = v$ i blocchi sono tutti i possibili sottoinsiemi di cardinalità k di S . Il disegno (S ,$\mathcal{B}$) è quindi quello descritto nell'esempio I. Pertanto i punti ed i blocchi del disegno sono i punti e gli iperpiani di uno spazio grafico di dimensione k.

Caso 2. *Tutte le rette hanno lunghezza almeno tre.*

Denotiamo con $n + 1$ ($n \geq 2$) la cardinalità comune alle rette. Osserviamo intanto che , essendo , $k > \lambda$ in ogni blocco ci sono almeno tre punti non allineati.

Proveremo ora che se a,b,c sono tre punti non allineati è costante il numero u di blocchi contenenti tali punti. Vediamo . Sia L la retta [a , b] e siano $B_1,B_2,\dots,B_u$ i blocchi contenenti i punti a,b,c . Un blocco per il punto c che non contenga la retta L interseca L in un punto. Per ogni punto x di L i blocchi per c che intersecano L nel solo punto x sono $\lambda - u$. Pertanto è

$$(9.4) \qquad r = u + (n+1)(\lambda - u).$$

Tenendo conto che $r = k$ dalla (9.4) segue

$$(9.5) \qquad u = \lambda - \frac{k - \lambda}{n}.$$

La formula (9.5) mostra che l'intero u non dipende dalla scelta dei punti a, b , c ed inoltre che è $u < \lambda$. Inoltre poiché in ogni blocco ci sono tre punti non allineati è $u \geq 1$.

Per ogni terna a,b,c di punti non allineati chiamiamo *piano* il sottospazio π che si ottiene come intersezione degli u blocchi $B_1,B_2,\dots,B_u$ che contengono a,b,c.

$$\pi = [\, a , b , c \,] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_u \ .$$

Se a' , b' c' sono tre punti non allineati del piano [a , b , c] allora gli u blocchi che contengono a' , b' c' sono gli stessi che contengono a, b, c e quindi è

$$[\, a' , b', c'] = [\, a , b , c \,] .$$

Se denotiamo con $\mathcal{P}$ la famiglia dei piani così definiti si ha allora che la terna (S, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) è uno spazio planare.

Sia ora π un piano determinato intersecando i blocchi $B_1,B_2,\dots,B_u$ e siano ℓ ed ℓ' due sue rette. Poiché è $\lambda > u$ c'è almeno un blocco B_0 per la retta ℓ diverso dai blocchi $B_1,B_2,\dots,B_u$. Tale blocco interseca il piano π esattamente nella retta ℓ altrimenti coinciderebbe con uno dei blocchi $B_1,B_2,\dots,B_u$. Poiché ogni retta interseca ogni blocco , la retta ℓ' interseca B_o in punto p. Tale punto essendo un punto di ℓ' è un punto di π ed essendo punto di B_o è un punto di $\ell = \pi \cap B_o$.

Pertanto le due rette ℓ ed ℓ' hanno il punto p in comune.

Abbiamo così mostrato , tenendo conto che ogni retta ha almeno tre punti, che ogni piano dello spazio planare (S, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) è un piano proiettivo. Ne segue allora che (S, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) è uno spazio proiettivo ed i blocchi essendo sottospazi intersecati da ogni retta sono suoi iperpiani e sono **tutti** essendo b = v.
Abbiamo così provato il seguente

Teorema [3] *Un disegno simmetrico (S, $\mathcal{B}$) di parametri (v, k, λ) è il disegno dei punti e degli iperpiani di uno spazio grafico proiettivo se e solo se ogni sua retta incontra ogni blocco.*

10 . Spazi lineari finiti. Il teorema fondamentale.

Per rendere autosufficiente questo paragrafo richiamiamo alcune definizioni già date nei numeri precedenti.

Uno *spazio lineare* finito è una coppia (S, $\mathcal{L}$), dove S è un insieme finito non vuoto, i cui elementi sono chiamati *punti* ed $\mathcal{L}$ è una famiglia di parti proprie di S ciascuna di cardinalità almeno due i cui elementi sono chiamate *rette* tale che :

(ii) Due punti distinti appartengono ad un'unica retta.

Per ogni punto p denoteremo con [p] il *grado* di p, cioè il numero di rette passanti per p e per ogni retta ℓ denoteremo con [ℓ] la sua *lunghezza*, cioè la sua cardinalità . Denoteremo inoltre con v la cardinalità di S e con b la cardinalità di $\mathcal{L}$.

Il *quasi-fascio* è lo spazio lineare con v – 1 punti su una retta. In un quasi fascio risulta ovviamente b = v.

Se n + 1 è il massimo dei gradi dei punti di S l'intero n è detto l'*ordine* dello spazio lineare. Evidentemente se lo spazio lineare ha ordine n per ogni retta ℓ risulta

$[\ell] \leq n + 1$ e conseguentemente conteggiando i punti di S attraverso le rette per un punto di grado n + 1 si ha:

$$v \leq (n+1)\,n + 1 = n^2 + n + 1.$$

Tale relazione induce a pensare che ogni spazio lineare finito d'ordine n possa ottenersi privando un piano proiettivo finito d'ordine n di un suo sottoinsieme. Quando tale circostanza si verifica lo spazio lineare $(S, \mathcal{L})$ è detto *immergibile* in un piano proiettivo d'ordine n. Molti lavori sono inerenti a tale problematica ed in essi si hanno alcune risposte .

Osserviamo che se v =3 lo spazio lineare è un triangolo ed in tal caso è b=v e lo spazio lineare è un quasi fascio.

Sono facili da provare le seguenti equivalenze .

a) $(S, \mathcal{L})$ è un piano proiettivo d'ordine n.

b) $(S, \mathcal{L})$ è uno spazio lineare d'ordine n i cui punti hanno tutti lo stesso grado $n+1$ $(n \geq 2)$ e tutte le rette hanno lunghezza $n + 1$.

c) $(S, \mathcal{L})$ è uno spazio lineare d'ordine n con $v = n^2 + n + 1$.

Conteggiando in doppio modo le coppie (x, ℓ) punto-retta con x appartenente ad ℓ si ha la seguente relazione fondamentale:

$$\sum_{p \in S} [p] = \sum_{l \in L} [l]$$

Il teorema fondamentale degli spazi lineari finiti dovuto ad de Bruijn-Erdös #
[1] afferma quanto segue :

Teorema. *In uno spazio lineare finito* $(S, \mathcal{L})$ *con v punti e b rette risulta $b \geq v$ l'uguale avendosi se e solo se* $(S, \mathcal{L})$ *è un piano proiettivo o un quasi-fascio.*

La dimostrazione

Nel seguito $(S, \mathcal{L})$ denota uno spazio lineare finito d'ordine n. Supporremo $b \leq v$ e mostreremo che è $b = v$ ed $(S, \mathcal{L})$ è un piano proiettivo o un quasi fascio.

Denotiamo con k la massima lunghezza delle rette di $(S, \mathcal{L})$.
Se $k=2$ le rette sono tante quante le coppie di punti e quindi è $b = v(v-1)/2$.
Da $b \leq v$ segue $b=v=3$ e lo spazio lineare è un triangolo quindi un quasifascio .
Possiamo quindi supporre $k \geq 3$. Denoteremo con L_0 una retta di lunghezza k.
Possiamo separare i due casi possibili .

Caso 1. *$b \leq v$ e tutti i punti hanno grado $n + 1$.*
In tale ipotesi risulta

$$v(n+1) = \sum_{p \in S}[p] = \sum_{l \in L}[l] \leq bk \leq vk$$

da cui segue $k \geq n + 1$ e quindi $k = n + 1$. Poiché tutte le rette intersecano L_0 si ha $b = n^2+n+1$ e quindi $v \geq b = n^2+n+1$. Si ha allora $v = n^2+n+1$, e ciò comporta che $(S, \mathcal{L})$ è un piano proiettivo d'ordine n.

Caso 2. *$b \leq v$ ed esistono punti di grado diverso.*

Sia $s + 1$ il minimo grado dei punti di S . Denoteremo ancora con L_0 una retta di lunghezza massima k e con q_0 un punto di grado s+1. Supponiamo dapprima che sia $s = 1$ e siano L ed L' le due rette per il punto q_0. Denotiamo con $h+1$ la cardinalità di L e con $m+1$ la cardinalità di L'.
Si ha $v = h + m +1$ e $b = hm + 2$. Da $b \leq v$ segue allora

$$hm + 2 \leq h + m +1$$

e quindi
$$h (m-1) \leq m-1$$
la quale comporta $m = 1$ oppure $h = 1$ e quindi in ogni caso lo spazio lineare è un quasi-fascio.
Mostreremo ora che risulta necessariamente $s =1$ e che quindi lo spazio lineare è un quasi- fascio.

Sia t il numero dei punti di grado massimo $n + 1$, si ha

$$t(n+1) + (v - t)(s+1) \leq \sum_{p \in S}[p] = \sum_{l \in L}[l] \leq bk \leq vk$$

Da cui segue $vk \geq t(n-s) + v(s+1) > v(s+1)$, essendo $n > s$ e $t \geq 1$ e così è :

$$k > s + 1. \tag{10.1}$$

Ciò mostra che tutti i punti di grado $s + 1$ appartengono ad L_o .

Mostriamo che esistono almeno due punti di grado $s+1$.

Supponiamo sia q_0 l'unico punto di grado $s+1$. Conteggiando la cardinalità di S attraverso le rette per il punto q_0 risulta

$$v \leq 1 + (s+1)(k-1)$$

e conteggiando b attraverso le rette che incidono L_o si ha :

$$s+1 + (k-1)(s+1) \leq b \leq v \leq 1 + (s+1)(k-1).$$

Tale relazione comporta $s \leq 0$ il che è assurdo.

Esistono pertanto almeno due punti q_0 e q_0' di grado $s + 1$.

In tal caso L_o è l'unica retta di lunghezza k. Conteggiando v da q_o si ha $v \leq k + s^2$. D'altra parte conteggiando b attraverso le rette che incidono Lo si ha $b \geq 1 + ks$. Si ha allora

$$1+ks \leq b \leq v \leq k + s^2.$$

e quindi

$$k(s-1) \leq s^2 - 1$$

Tale diseguaglianza comporta $s=1$ altrimenti avremmo $k \leq s + 1$ contro la (10.1).

Riassumendo abbiamo provato che se è $b \leq v$ risulta $b = v$ e lo spazio lineare è un piano proiettivo se tutti i suoi punti hanno grado $n+1$ ed è un quasi-fascio se ci sono punti di grado diverso.

Capitolo III

Piani proiettivi

1. *Piani proiettivi . Ordine di un piano proiettivo finito.*

Uno spazio grafico irriducibile di dimensione due viene anche chiamato ***piano proiettivo*** . Un piano proiettivo può anche definirsi al seguente modo.

Sia π un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti* e sia $\mathcal{L}$ una famiglia di sottoinsiemi propri di π detti *rette*. La coppia (π , $\mathcal{L}$) è un piano proiettivo se sono soddisfatte le seguenti proprietà :

I. Due punti distinti appartengono ad una unica retta.

II. Due rette distinte hanno un punto in comune.

III. Ogni retta ha almeno tre punti.

Le proprietà I,II,III sono equivalenti a :

I. Due punti distinti appartengono ad una unica retta.

II. Due rette distinte hanno un punto in comune.

III'. Esistono quattro punti a tre a tre non allineati

Infatti supponiamo siano verificate le proprietà I ,II, III . Siano L ed L' due rette distinte e sia O il punto comune. Siano A e B due punti di L diversi da O e siano C e D due punti di L' diversi da O. I punti A , B ,C, D sono quattro punti a tre a tre non allineati. Viceversa supponiamo siano verificate le proprietà I,II,III' .
Siano A , B ,C, D quattro punti a tre a tre non allineati esistenti per la III'. Sia L una retta . Poiché L può contenere al più due dei punti A , B ,C, D almeno uno di essi non appartiene ad L e sia ad esempio il punto A. Le rette AB , AC , AD sono distinte ed intersecano L in tre punti distinti. Pertanto L ha almeno tre punti.
Le proprietà I,II,III sono quindi equivalenti alle proprietà I,II,III' e sono altresì equivalenti alle seguenti

I. Due punti distinti appartengono ad una unica retta.

II. Due rette distinte hanno un punto in comune.

III'' Esistono almeno due rette con almeno tre punti.

Le proprietà I e II traducono la validità della formula di Grassmann mentre le proprietà III , III' , III'' traducono tutte e tre in modo differente l'irriducibilità dello spazio.

Supponiamo ora che la coppia (π , $\mathscr{L}$) verifichi solo le proprietà I e II e cioè sia uno spazio grafico di dimensione due che non sia irriducibile. In tal caso è chiamato *piano grafico.*

Dalla non validità della III'' al più una retta ha almeno tre punti.

Se ogni sua retta ha lunghezza due allora tre punti sono sempre non allineati e quindi π consta di soli tre punti altrimenti esistono quattro punti a tre a tre non allineati. In tale ipotesi lo spazio è un triangolo.

Supponiamo quindi esista una retta con almeno tre punti e sia L tale retta. Poiché L è un sottoinsieme proprio di π esiste almeno un punto p di π non appartenente ad L.

Se esistesse un ulteriore punto fuori di L e distinto da p la retta L'= [p ,p'] avrebbe anch'essa almeno un terzo punto dato da $L \cap L'$.

Quindi l'insieme π è costituito dai punti di L e dal solo p e le rette sono L e tutte le coppie (p,x) al variare di x su L.

In conclusione un piano grafico è un *quasi-fascio* cioè ha tutti suoi punti tranne uno su una stessa retta ed in letteratura viene anche chiamato *piano proiettivo degenere.*

Quando l'insieme π è finito e possiede v punti allora v-1 sono su una stessa retta mentre le altre rette hanno lunghezza due. In questo caso ci sono v punti e v rette.

Tratteremo nel seguito solo i piani proiettivi finiti. Come abbiamo già visto per gli spazi grafici irriducibili è facile provare che le rette del piano proiettivo (π , $\mathscr{L}$) sono tra loro equipotenti.

Detta n+1 la cardinalità comune alle rette del piano , l'intero n è detto l'***ordine*** del piano. Si ha facilmente che

i) *Per ogni punto passano n+1 rette*

ii) Il piano ha n^2+n+1 punti ed n^2+n+1 rette.

Un esempio importante di piano proiettivo finito si ottiene come già visto nel primo capitolo in corrispondenza di un fissato campo finito K.

Ricordiamo che i *punti* di tale piano, detto *piano proiettivo numerico*, indicato con $\mathbf{P}_{2,k}$ sono le classi di equivalenza $\underline{\mathbf{x}} = [(x_1, x_2, x_3)]$ determinate dalle terne (x_1, x_2, x_3) di K^3-$\{\underline{0}\}$ e le rette i sottoinsiemi ℓ di punti le cui coordinate sono soluzione di un'equazione omogenea non nulla di primo grado

$$\ell \quad : \quad ax_1+ bx_2 +cx_3 =0.$$

Abbiamo visto altresì che i punti $\underline{\mathbf{x}}$ della retta ℓ si possono anche descrivere attraverso le coordinate di due punti distinti $\underline{\mathbf{y}}$ e $\underline{\mathbf{z}}$ di ℓ. Risulta infatti

$$\ell \quad : \quad \underline{\mathbf{x}} = \lambda\, \underline{\mathbf{y}} + \eta\, \underline{\mathbf{z}}$$

al variare dei parametri λ e η non entrambi nulli. Abbiamo visto che questa descrizione parametrica mostra facilmente che ogni retta del piano ha cardinalità $n+1 = |K| + 1$. Questo piano , essendo $n = |K|$, ha quindi per **ordine un numero primo o la potenza di un numero primo.**

Il piano $\mathbf{P}_{2,k}$, come già visto, verifica il teorema di Desargues . Per il teorema fondamentale se un piano proiettivo finito (π , $\mathcal{L}$) d'ordine n è desarguesiano esiste un campo K ed un isomorfismo $\varphi : \pi \rightarrow \mathbf{P}_{2,K}$. L'isomorfismo trasforma rette in rette ponendo tra esse una biezione pertanto se ℓ è una retta di π ed L è la sua trasformata si ha $|\ell| =|L|$ e quindi $n+1 = |K| + 1$. Pertanto è $n =|K| =p^h$ con p primo. Abbiamo così provato il seguente risultato :

Proposizione 1.1 *L'ordine di un piano proiettivo finito e desarguesiano è un numero primo o la potenza di un numero primo.*

Poiché esistono piani proiettivi finiti e non desarguesiani ci si può domandare se anche l'ordine di tali piani sia sempre la potenza di un numero primo.

Ad oggi non è noto se esistono piani proiettivi finiti (necessariamente non desarguesiani) che abbiano un ordine che non sia la potenza di numero primo.

Si può quindi porre il seguente :

Problema . ***Fissato un intero n ($n \geq 2$) esiste un piano proiettivo finito d'ordine n ?***

Ci sono risposte parziali al quesito posto.

1.- *Se l'intero n è potenza di un numero primo la risposta al problema è positiva. Infatti in tal caso esiste un campo finito K di cardinalità n ed il piano $\mathbf{P}_{2,K}$ ha ordine n.*

Risposte negative si hanno nel caso che l'intero n sia quello descritto dal seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

2. (**Teorema di Bruck-Ryser**) *Se l'intero n è congruo ad 1 o a 2 modulo 4 e se non è somma di due interi quadrati allora non esiste il piano proiettivo d'ordine n.*

La ricerca di risposte definitive al quesito posto ha promosso nel tempo lo sviluppo di una serie di teoremi .Tali teoremi , e noi ne mostreremo alcuni , traducono che c'è equivalenza tra l'esistenza di un piano proiettivo finito d'ordine n e l'esistenza di altri tipi di strutture anch'esse dipendenti da n .

L'idea di fondo era che magari fosse più semplice verificare l'esistenza di tali strutture equivalenti.

Vediamo alcuni di questi teoremi.

2. ***Piani affini.***

Un piano affine è una coppia (α , $\Re$) dove α è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti* ed $\Re$ una famiglia di sottoinsiemi di α detti *rette*. La coppia (α , $\Re$) è un piano affine se sono soddisfatte le seguenti proprietà :

i. *Due punti distinti appartengono ad una unica retta.*

ii. *Data una retta ℓ ed un punto p non appartenente ad ℓ esiste una sola retta per p ad intersezione vuota con ℓ.*

iii. *Esistono tre punti non allineati.*

Due rette le diremo *parallele* se coincidono o hanno intersezione vuota.

Si ha subito che .

Proposizione 2.1 *Le rette di un piano affine sono equipotenti.*

Dimostrazione . Siano L ed L' due rette distinte. Supponiamo dapprima siano parallele. Sia p un punto di L e p' un punto di L' e sia ℓ la retta [p,p']. Per ogni x di L sia ℓ_x la retta per x parallela ad ℓ. La retta ℓ_x interseca L' in un punto x' e la corrispondenza $x \to x'$ è biettiva onde è $| L | = | L'|$.

Se L interseca L' in un punto O siano p un punto di L distinto da O e p' un punto di L' distinto da O. Sia ancora ℓ la retta [p,p']. Per ogni x di L sia ℓ_x la retta per x parallela ad ℓ. La retta ℓ_x interseca L' in un punto x' e la corrispondenza $x \to x'$ è biettiva onde è $| L | = | L'|$.

Se l'insieme α è finito il piano affine $(\alpha , \mathfrak{R})$ è detto *finito*.

Se il piano affine è finito sia n la cardinalità comune alle sue rette . L'intero n è detto l'*ordine* del piano affine. Per un piano affine d'ordine n si hanno le seguenti equivalenze :

1. *$(\alpha , \mathfrak{R})$ piano affine d'ordine n.*

2. *$(\alpha , \mathfrak{R})$ è uno spazio lineare con rette di lunghezza n e punti di grado n+1.*

3. *$(\alpha , \mathfrak{R})$ è uno spazio lineare con rette di lunghezza n e con n^2 punti.*

4. *$(\alpha , \mathfrak{R})$ è uno spazio lineare con rette di lunghezza n e n^2+n rette.*

$1 \Leftrightarrow 2$ è evidente.

$2 \Leftrightarrow 3$. Poiché un punto ha grado n+1 e tutti gli altri punti si ripartiscono sulle sue rette si ha: $|\alpha| = (n+1)(n-1) + 1 = n^2$. Viceversa se $v = n^2$ ogni punto p ha grado $\frac{v-1}{n-1} = \frac{n^2-1}{n-1} = n+1$.

$3 \Leftrightarrow 4$. Conteggiando in doppio modo le coppie (p, ℓ) punto –retta con p su ℓ si ha

$$n^2(n+1) = n\,|\mathfrak{R}| \quad \text{da cui} \quad |\mathfrak{R}| = n^2 + n.$$

Viceversa poiché le rette hanno tutte lunghezza n ogni punto ha grado $\frac{v-1}{n-1}$.

Conteggiando in doppio modo le coppie (p, ℓ) punto –retta con p su ℓ si ha allora

$$v\,\frac{v-1}{n-1} = n\,(n^2 + n).$$

Da

$$v(v-1) = n^2\,(n^2-1)$$

segue, essendo v un intero positivo, $v = n^2$.

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema I. *Esiste un piano proiettivo d'ordine n se e solo se esiste un piano affine d'ordine n.*

Dimostrazione. Sia $(\pi, \mathcal{L})$ un piano proiettivo d'ordine n e sia L una sua retta. Privando l'insieme π dei punti della retta L si ottiene uno spazio lineare con n^2 punti e con tutte le rette di lunghezza n e quindi un piano affine d'ordine n.

Viceversa sia $(\alpha, \mathfrak{R})$ un piano affine d'ordine n. Ad ogni retta ℓ aggiungiamo un nuovo punto che indicheremo con O_ℓ con la seguente condizione

$$O_\ell = O_r \quad \text{se e solo se la retta } \ell \text{ è parallela alla retta } r$$

Tali nuovi punti sono chiamati *punti impropri* e sono n+1 per la seguente ragione. Se p è un punto i punti impropri delle n+1 rette passanti per esso sono tutti distinti essendo tali rette a due a due incidenti. Ogni altra retta del piano è ampliata con uno di tali punti. Infatti se r' è una retta non passante per p ed r è la retta per p parallela ad r' si ha $O_r = O_{r'}$.

Denotato con Δ l'insieme di tutti i punti impropri. Consideriamo l'insieme π ottenuto aggiungendo all'insieme α l'insieme dei punti impropri. Le rette di π sono le rette di α ciascuna ampliata col suo punto improprio e l'insieme Δ. La retta Δ è detta *retta impropria.* L'insieme π rispetto alla famiglia di tali rette è ,come ora proveremo, uno spazio lineare con tutte le rette di cardinalità n+1 e poiché ha n^2+n+1 punti ed n^2+n+1 rette esso è un piano proiettivo d'ordine n.

Proviamo quindi che lo spazio ottenuto aggiungendo all'insieme α i punti impropri è uno spazio lineare. Siano p e p' due punti distinti di π. Se p e p' appartengono ad α ed ℓ è la retta di $(\alpha, \mathfrak{R})$ per essi la stessa retta ℓ ampliata col suo punto improprio è la retta di π per essi. Se p e p' sono entrambi punti impropri la retta Δ è l'unica retta per essi. Se p è un punto di α e $p' = O_r$ è un punto improprio la retta per p parallela ad r ampliata col suo punto improprio contiene p e p'.

3. Piani affini numerici.

In questo numero faremo vedere come assegnato un campo K si può costruire un piano affine che chiameremo *piano affine numerico* . Tale piano, se K è finito e di cardinalità n, è un piano affine d'ordine n. Vediamo come si procede.

Supporremo per gli scopi che abbiamo che K sia finito e di cardinalità n, (n è potenza di un numero primo) anche se la costruzione che faremo si può fare qualunque sia il campo K.

Sia α l'insieme K^2 delle coppie ordinate di elementi d K. Chiameremo *punti* gli elementi di α . Se p= (a, b) è un punto chiameremo i numeri a e b le sue coordinate . Più precisamente il numero a sarà l' *ascissa* di p e b l'*ordinata* di p.

Sceglieremo ora alcuni sottoinsiemi dell'insieme α che chiameremo *rette* e proveremo che l'insieme α con tali rette è un piano affine d'ordine n.

Le rette saranno di tre tipi :

rette verticali - ognuna determinata da un elemento di K .

rette orizzontali - ognuna determinata da un elemento di K.

rette oblique - ognuna determinata da una coppia ordinata (m, h) di elementi di K con $m \neq 0$.

Col simbolo [a] denoteremo il sottoinsieme di α costituito da tutte le coppie (a , y) al variare di y in K , cioè da tutti i punti di ascissa a.

In simboli

$$[\, a \,] = \{ (a, y),\ y \in K \}$$

Il sottoinsieme [a] sarà chiamato *retta verticale* . Ci sono quindi n rette verticali ed ognuna di esse ha ovviamente n punti.

Col simbolo < b > denoteremo il sottoinsieme di α costituito da tutte le coppie (x , b) al variare di x in K , cioè da tutti i punti di ordinata b.

In simboli

$$< b > = \{ (x, b),\ x \in K \}$$

Il sottoinsieme < b > sarà chiamato *retta orizzontale* . Ci sono quindi n rette orizzontali ed ognuna di esse ha ovviamente n punti.

Fissata una coppia ordinata (m , h) di elementi di K con $m \neq 0$ denoteremo col simbolo [m , h] il sottoinsieme di α costituito da tutte le coppie (x , mx+h) al variare di x in K . In simboli

$$[\, m, h \,] = \{ (x, mx+h),\ x \in K \}$$

Il sottoinsieme [m , h] sarà chiamato retta *obliqua*. Le rette oblique sono quindi n^2-n ed ognuna ha n punti. Le rette scelte sono quindi ognuna di cardinalità n e sono in tutto n^2 +n. Se mostriamo che l'insieme α con tali rette è uno spazio lineare esso per quanto già visto, è un piano affine d'ordine n.

Siano quindi $p_1=(x_1,y_1)$ e $p_2=(x_2,y_2)$ due punti distinti di α .

Se $x_1 = x_2 = a$ la retta per essi è la retta verticale [a].

Se $y_1 = y_2 = b$ la retta per essi è la retta orizzontale < b >.

Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ allora una retta obliqua [m , h] conterrà i due punti se

$$\begin{cases} mx_1 + h = y_1 \\ mx_2 + h = y_2 \end{cases}$$

Tale sistema nelle incognite m ed h ha una sola soluzione essendo det $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0$ e quindi esiste una sola retta, che è obliqua , che contiene i punti p_1 e p_2.

Sia S un insieme finito di cardinalità n. Una biezione $T : S \to S$ è chiamata anche una *permutazione* dell'insieme S . Tutte le possibili permutazioni di S costituiscono un gruppo che indicheremo con G(S) detto *gruppo simmetrico* ed esso è noto che ha cardinalità $n!$.

Ogni permutazione $T : S \to S$ di S in sé definisce un sottoinsieme di $S \times S$, il suo *grafico* , considerando tutte le n coppie ordinate $(x, T(x))$. Una famiglia $\mathcal{F}$ di permutazioni dell'insieme S si dice che agisce su S in *modo strettamente 2-transitivo* se vale la seguente proprietà

date due coppie (x_1, x_2) *ed* (y_1, y_2) *con* $x_1 \neq x_2$ *e* $y_1 \neq y_2$ *esiste una sola permutazione* T *di* $\mathcal{F}$ *che trasforma* x_1 *in* y_1 *ed* x_2 *in* y_2.

Quante permutazioni ha la famiglia $\mathcal{F}$? Vediamo. Fissata una coppia ordinata (x_1 , x_2) ed una trasformazione T di $\mathcal{F}$ essa determina una coppia ordinata (y_1, y_2) con $y_1 \neq y_2$ dove è $y_1 = T(x_1)$ ed $y_2 = T(x_2)$ .Viceversa una coppia ordinata (y_1 , y_2) con $y_1 \neq y_2$ determina una sola T della famiglia $\mathcal{F}$. Pertanto le trasformazioni T sono tante quante le coppie ordinate (y_1 , y_2) con $y_1 \neq y_2$ e quindi in numero di $n^2 - n$.

Consideriamo ora un campo K.

Se (m , h) è una coppia ordinata di elementi di K ed è $m \neq 0$ si può considerare l'applicazione

$$F_{m,h} : \quad x \in K \to mx + h \in K.$$

Tale funzione è una biezione di K in sé. Abbiamo così determinato nell'insieme di tutte le possibili permutazioni di K alcune di esse , le funzioni $F_{m,h}$, che sono n^2-n e queste hanno la seguente proprietà :

date due coppie (x_1, x_2) *ed* (y_1, y_2) *con* $x_1 \neq x_2$ *e* $y_1 \neq y_2$ *esiste una sola permutazione* T *di* $\mathcal{F}$ *che trasforma* x_1 *in* y_1 *ed* x_2 *in* y_2.

Infatti il sistema nelle incognite m ed h

$$\begin{cases} mx_1 + h = y_1 \\ mx_2 + h = y_2 \end{cases}$$

ha una sola soluzione essendo det $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0$.

La famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le permutazioni $F_{m,h}$ agisce quindi su K in modo strettamente 2-transitivo. Osserviamo infine che ognuna delle permutazioni $F_{m,h}$ ha permesso di determinare attraverso il suo grafico una retta obliqua del piano affine numerico da noi costruito avente come sostegno $\alpha = K^2$.

Che un campo K dia la possibilità di costruire un piano affine viene ribadita dal seguente

Teorema II. *Se un insieme S di cardinalità n ha una famiglia* $\mathcal{F}$ *di permutazioni che agisce su S in modo strettamente 2-transitivo allora è possibile costruire un piano affine d'ordine n. Viceversa se esiste un piano affine d'ordine n ed S è un insieme di cardinalità n allora è possibile determinare una famiglia* $\mathcal{F}$ *di permutazioni di S che agisce su S in modo strettamente 2-transitivo.*

Dimostrazione. Supponiamo che S sia un insieme di cardinalità n e supponiamo esista una famiglia $\mathcal{F}$ di permutazioni di S che agisce su S in modo strettamente 2-transitivo. Faremo vedere che questa ipotesi consente di costruire un piano affine d'ordine n. Vediamo come. Sia α l'insieme S x S delle coppie ordinate di elementi di S. I punti del nostro piano sono quindi le coppie ordinate (a , b) di elementi di S. Sceglieremo ora una famiglia $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi dell'insieme α che chiameremo *rette* e poi proveremo che la coppia $(\alpha , \mathcal{R})$ è un piano affine d'ordine n. Le rette che ora definiremo saranno chiamate *verticali , orizzontali ed oblique*.

Col simbolo [a] denoteremo il sottoinsieme di α costituito da tutte le coppie (a , y) al variare di y in S

$$[\,a\,] = \{\, (a , y) \ , y \in S \,\}$$

Il sottoinsieme [a] sarà chiamato *retta verticale* . Ci sono quindi n rette verticali ed ognuna di esse ha ovviamente n punti.

Col simbolo $< b >$ denoteremo il sottoinsieme di α costituito da tutte le coppie (x , b) al variare di x in S .

In simboli

$$< b > = \{ (x, b), x \in S \}$$

Il sottoinsieme $< b >$ sarà chiamato *retta orizzontale* . Ci sono quindi n rette orizzontali ed ognuna di esse ha ovviamente n punti.

Fissata una trasformazione $T : S \to S$ della famiglia $\mathcal{F}$ denotiamo con t il seguente sottoinsieme di α :

$$t = \{ (x, T(x)), x \in S \}$$

Chiameremo *retta obliqua* il sottoinsieme t determinato dalla trasformazione T.

Anche le rette oblique hanno ciascuna n punti. Poiché la famiglia $\mathcal{F}$ ha n^2-n trasformazioni le rette oblique sono n^2-n e quindi tutte le rette che abbiamo descritto, verticali , orizzontali ed oblique sono in tutto n^2 +n. Per verificare che la coppia $(\alpha , \mathcal{R})$ è un piano affine sarà quindi sufficiente controllare che esso è uno spazio lineare.

Siano quindi $p_1=(x_1,y_1)$ e $p_2=(x_2 ,y_2)$ due punti distinti di α .

Se $x_1 = x_2 = a$ la retta per essi è la retta verticale [a].

Se $y_1 = y_2 = b$ la retta per essi è la retta orizzontale $< b >$

Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ allora la retta che contiene i punti p_1 e p_2 è la retta obliqua t determinata dall' unica trasformazione T che trasforma x_1 in y_1 e x_2 in y_2.

La prima parte è così completata.

Proviamo ora viceversa che se esiste un piano affine $(\alpha , \mathcal{R})$ d'ordine n ed S è un insieme di cardinalità n è possibile determinare una famiglia $\mathcal{F}$ di permutazioni dell'insieme S la quale agisce su S in modo strettamente 2-transitivo.

Useremo le coppie ordinate di elementi di S per rappresentare i punti del piano α .

Fissiamo nel piano α due rette che indicheremo con x ed y tra loro incidenti . Sia O il punto d'intersezione delle rette x ed y. Poiché la retta x ha n punti possiamo assegnare ad ognuno di essi un elemento di S in modo da realizzare una biezione tra l'insieme x e l'insieme S. Per rendere familiare la costruzione l'elemento di S assegnato al punto O sarà indicato con o. Se abbiamo assegnato l'elemento a di S al punto p della retta x assegneremo allo stesso punto p la coppia (a, o). In tal modo gli n punti della retta x sono rappresentati dalle n coppie (a , o) con a elemento di S.
In particolare O è rappresentato dalla coppia (o,o).
Siano U ed U' due punti il primo sulla retta x e distinto da O ed il secondo sulla retta y e distinto da O e sia u la retta che unisce tali due punti. Per ogni punto p' della retta y sia ℓ' la retta per p' parallela ad u. Tale retta interseca la retta x in un punto p. Se il punto p ha avuto assegnata la coppia (a, o) assegneremo la coppia (o, a) al punto p'. La biezione che la retta u crea tra le due rette x ed y consente quindi di trasferire i simboli assegnati ai punti della retta x anche ai punti della retta y.
Sia ora p un punto del piano non appartenente né alla retta x né alla retta y. Sia ℓ la retta per p parallela alla retta y . Tale retta interseca la retta x in un suo punto p'.
Sia m la retta per p parallela alla retta x . La retta m interseca la retta y in un suo punto p''. Se p' è rappresentato dalla coppia (a, o) e p'' dalla coppia (o , b) attribuiremo al punto p la coppia ordinata (a , b).
Con questa costruzione abbiamo creato quindi una biezione tra i punti del piano α e le coppie ordinate (a , b) di elementi di S. Se chiamiamo la coppia (a, b) assegnata al punto p la coppia delle sue coordinate possiamo dire che l'insieme S è servito per assegnare le coordinate ai punti del piano. Potremmo anche per facilitare il nostro linguaggio chiamare della coppia (a , b) assegnata al punto p , l'elemento a la sua *ascissa* e l'elemento b la sua *ordinata*.
Dalla costruzione fatta se una retta ℓ è parallela ad y allora i suoi punti sono rappresentati dalle n coppie (a , y) con a fisso ed y variabile in S avendo indicato con (a,o) la coppia assegnata al punto $\ell \cap x$.

Analogamente se una retta ℓ è parallela ad x allora i suoi punti sono rappresentati dalle n coppie (x , b) con b fisso ed x variabile in S avendo indicato con (o,b) la coppia assegnata al punto $\ell \cap y$.

Una retta t che non sia parallela né ad x né ad y sarà detta *obliqua*.
Gli n punti di una retta obliqua hanno tutti l'ascissa diversa e tutti l'ordinata diversa . Le n coppie (a , b) assegnate agli n punti di t sono quindi tali che l'elemento a descrive gli n elementi di S e l'elemento b descrive anch'esso gli n elementi di S.
Ogni retta t obliqua determina quindi una permutazione ,che indicheremo con T, dell'insieme S **assegnando all'elemento a di S l'elemento b di S ordinata dell'unico punto di t di ascissa a.**
Poiché le rette t oblique sono $n^2 - n$ le permutazioni T da esse determinate sono $n^2 - n$ ed è evidente che esse agiscono in modo strettamente 2-transitivo su S.
Infatti siano (x_1, x_2) ed (y_1, y_2) due coppie ordinate di elementi di S con con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ .Sia t l' unica retta passante per i punti p_1 e p_2 le cui coordinate sono le coppie (x_1,y_1) ed (x_2,y_2) assegnate .La retta t è obliqua e la permutazione T determinata da tale retta è l'unica permutazione che trasforma x_1 in y_1 ed x_2 in y_2.

4. Quadrati latini.

In questo numero dimostreremo un altro teorema anch'esso connesso al problema che stiamo esaminando cioè l'esistenza, fissato un intero n maggiore o eguale a due , di un piano proiettivo finito d'ordine n .
Daremo prima alcune definizioni. Sia S un insieme finito di cardinalità n. Possiamo rappresentare gli n elementi di S con gli interi { 1, 2 ,.., n } .

Una matrice quadrata A d'ordine n avente per elementi gli elementi di S è detta *greco-latina su S se ogni sua riga ed ogni sua colonna è una permutazione di S.*

Ad esempio se n=3 la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice greco-latina sull'insieme $S = \{1, 2, 3\}$.

Fissata una matrice $A = (a_{ij})$ greco-latina ed una permutazione $\sigma : S \rightarrow S$ dell'insieme S denoteremo con $A_\sigma = (\sigma(a_{ij}))$ la matrice i cui elementi sono i trasformati tramite σ degli elementi di A.

Ad esempio sempre riferendosi alla matrice A sopra scritta , se scegliamo la seguente permutazione

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice A_σ è :

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Due matrici $A(a_{ij})$ e $B(b_{ij})$ greco- latine su S le diciamo in relazione $\curlyvee$ se esiste una permutazione $\sigma : S \rightarrow S$ di S tale che risulti $B = A_\sigma$

Sempre per facilitare la comprensione le seguenti matrici A e B greco – latine

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

non sono equivalenti perché la permutazione che trasforma la prima riga di A nella prima riga di B è la permutazione identica e però tale permutazione non trasforma la seconda riga di A nella seconda riga di B.

La relazione $\curlyvee$ ora introdotta tra le matrici greco- latine è evidentemente di equivalenza. Ogni classe d'equivalenza sarà chiamato un *quadrato greco- latino* e sarà denotato con Q= [A]. Spesso però per rappresentare il quadrato ometteremo la parentesi quadra e mostreremo solo un suo rappresentante.

E' evidente che dato un quadrato Q= [A] possiamo scegliere per rappresentarlo la matrice che presenti nella sua prima riga i numeri 1 , 2, .. , n scritti nell'ordine naturale.

Due matrici $A(a_{ij})$ e $B(b_{ij})$ greco- latine su S le diremo *ortogonali* se verificano la seguente proprietà :

per ogni coppia ordinata (h, k) di elementi di S esiste una coppia (i , j) di indici tale che risulti :

$$a_{ij} = h \quad e \quad b_{ij} = k$$

Con un linguaggio più espressivo e meno formale possiamo dire che due matrici sono ortogonali se ponendole una sull'altra nelle n^2 celle appaiono tutte le n^2 coppie ordinate (h, k) di elementi di S . Ad esempio le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sono tra loro ortogonali.

E' utile la seguente osservazione.

Le celle di una matrice quadrata d'ordine n sono n^2 e le coppie (h , k) da ospitare nella sovrapposizione sono anche esse n^2 . Pertanto se nella sovrapposizione delle due matrici una stessa coppia appare due volte ci sarà almeno una coppia che non apparirà . Così due matrici che nella sovrapposizione dessero luogo a tale fenomeno non sono ortogonali.

Ne segue allora che due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = A_\sigma = (\sigma(a_{ij}))$ greco-latine che siano tra loro equivalenti e cioè facciano parte dello stesso quadrato non sono ortogonali .

Infatti se h è un elemento di S esso appare n volte nella matrice A e nelle stesse posizioni nella matrice B troviamo $\sigma(h)$ e così nella sovrapposizione la coppia (h , $\sigma(h)$) appare n volte.

Quindi matrici **ortogonali sono non equivalenti** e quindi vanno ricercate in quadrati latini diversi. E' importante la seguente

Proposizione 4.1 *Siano A e B due matrici tra loro ortogonali. Una matrice A' equivalente ad A ed una matrice B' equivalente a B sono anch'esse tra loro ortogonali.*

Dimostrazione. Poiché A' è equivalente ad A esiste una permutazione σ di S tale che sia $A' = A_\sigma$ e poiché B' è equivalente a B esiste una permutazione τ

di S tale che sia $B' = B_\tau$. Scegliamo una coppia ordinata (h' , k') di elementi di S. Poiché σ e τ sono permutazioni esiste h tale che sia $\sigma(h) = h'$ ed esiste k tale che sia $\tau(k) = k'$. Poiché A e B sono ortogonali esiste una coppia (i, j) tale che sia

$$a_{ij} = h \quad \text{e} \quad b_{ij} = k$$

e quindi sovrapponendo A' e B' nella cella di posto (i,j) apparirà la coppia ($\sigma(h)$, $\tau(k)$) e cioè la coppia (h' , k'). Per l'arbitrarietà della coppia (h' , k') scelta le due matrici A' e B' risultano ortogonali.

La proposizione 4.1 rende possibile la seguente definizione.

Due quadrati Q = [A] e Q' = [B] li diremo *ortogonali* se la matrice A che rappresenta Q è ortogonale alla matrice B che rappresenta Q'.

Importante è la seguente

Proposizione 4.2. *Il massimo numero di quadrati greco- latini a due a due ortogonali è n-1.*

Dimostrazione. Siano ora $Q_1 , Q_2 , \ldots, Q_t$ t quadrati greco- latini a due a due ortogonali . Per rappresentare i quadrati $Q_1 , Q_2 , \ldots, Q_t$ scegliamo t matrici $A_1 , A_2 , \ldots, A_t$ ciascuna delle quali abbia come sua prima riga i numeri 1 , 2 ,.. , n disposti in ordine crescente. Ovviamente essendo i quadrati $Q_1 , Q_2 , \ldots, Q_t$ a due ortogonali allora le matrici $A_1 , A_2 , \ldots, A_t$ sono tra loro a due a due ortogonali. Sia h l'elemento che appare al posto (2 ,1) nella matrice A_1. Ovviamente h può essere uno solo dei numeri tra 2, 3 ,…., n. Quindi per h abbiamo solo n-1 scelte possibili. Supponiamo per semplicità che sia h = 2. Nella stessa posizione (2,1) nella matrice A_2 troveremo un numero che oltre ad essere diverso da 1 è anche diverso da 2 altrimenti sovrapponendo le due matrici A_1 ed A_2 la coppia (2 , 2) apparirebbe due volte , sia nella prima riga nella posizione (1,2) e sia nella posizione (2,1) e ciò non può accadere essendo A_1 ed A_2 tra loro ortogonali.

Pertanto l'elemento che appare nella posizione (2.1) della matrice A_2 è uno dei numeri 3,4,…n. Sempre per semplificare supponiamo appaia il numero 4.

Nella matrice A_3 nella posizione (2,1) c'è allora un intero che oltre ad essere diverso da 1 è anche diverso da 2 ed è anche diverso da 4. Infatti se apparisse 2 avremmo la coppia (2,2) due volte sovrapponendo A_1 ed A_3 e se apparisse 4 avremmo la coppia (4, 4) due volte sovrapponendo A_2 ed A_3.

Il valore h che si trova nella posizione (2,1) ha inizialmente n-1 possibilità perché può essere uno dei numeri 2,3,….,n ma ad ogni passo tale possibilità si riduce di una unità. Pertanto t che indica il numero di passi possibili non può superare n-1.

Un insieme di n-1 quadrati greco-latini a due a due ortogonali è detto ***completo***.

L'esistenza di un sistema completo di n-1 quadrati greco-latini a due a due ortogonali è legata all'esistenza di un piano proiettivo d'ordine n come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 4.3 *. Esiste un piano proiettivo d'ordine n se e solo se esistono n-1 quadrati- latini d'ordine n a due a due ortogonali.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un piano proiettivo (π , $\mathcal{L}$) d'ordine n. Sia L una retta del piano π e siano X ed Y due punti distinti della retta L. Denotiamo con p_1 , p_2,…., p_{n-1} i rimanenti punti della retta L. Consideriamo l'insieme S = { 1,2,…,n }. Assegniamo alle n rette per X distinte da L i numeri 1,2,..,n e lo stesso facciamo per le n rette per Y distinte da L. Per ogni punto p_i i= 1,2,...,n-1 di L eseguiamo questa stessa operazione cioè numeriamo con i numeri 1,2,..,n le n rette per p_i distinte da L. Ogni punto p_i i= 1,2,...,n-1 di L consentirà di costruire una matrice A_i i= 1,2,...,n-1 quadrata d'ordine n che risulterà greco-latina su S. Vediamo come si procede . Consideriamo ad esempio il punto p_1. Dobbiamo ora costruire la matrice A_1 quadrata d'ordine n ad esso corrispondente. Dobbiamo mostrare quali sono gli elementi della matrice A_1 mostrando quindi quale intero sarà assegnato al posto (i , j) . Vediamo . Si consideri la retta L_i per X che ha avuto assegnato il numero i e la retta L_j per Y che ha avuto assegnato il numero j. Le due rette L_i ed L_j si incontrano in un punto p_{ij}.

Se h è il numero assegnato alla retta che unisce p_1 con p_{ij} tale intero è disposto nella cella di posto (i , j) della matrice A_1.
Allo stesso modo si procede per costruire le matrici A_2 , …, A_{n-1} corrispondenti ai punti p_2 ,,.., p_{n-1}.
Le matrici A_1, A_2,…, A_{n-1} sono , come facilmente si controlla, ciascuna greco -latina su S. Controlleremo ora che risultano altresì a due a due ortogonali.
Siano A_r ed A_s due di tali matrici. Sia (h,k) una coppia ordinata di elementi di S. Dobbiamo mostrare che esiste una coppia di indici (i, j) tale che l’elemento di posto (i , j) di A_r sia eguale ad h e l’elemento di posto (i , j) di A_s sia eguale a k in modo che nella sovrapposizione di A_r su A_s la coppia (h , k) apparirà al posto (i , j). Sia L_h la retta per il punto p_r cui è stato assegnato il numero h e sia L_k la retta per il punto p_s cui è stato assegnato il numero k. Sia p_{hk} il punto di incontro di tali due rette. Sia ora i il numero assegnato alla retta che unisce X e p_{hk} e sia j il numero che è stato assegnato alla retta che unisce Y con p_{hk}. Per costruzione al posto (i, j) nella matrice A_r c’è il numero h e nella matrice A_s al posto (i , j) c’è il numero k.
Le n-1 matrici A_1, A_2, …, A_{n-1} risultando a due a due ortogonali sono a due a due non equivalenti e quindi determinano n-1 quadrati latini a due a due ortogonali.
La prima parte della proposizione è così provata.
Supponiamo ora che esistano n-1 quadrati Q_1 , Q_2, …, Q_{n-1} d’ordine n , greco-latini su S a due a due ortogonali. Sia A_1 una matrice rappresentativa del quadrato Q_1,
A_2 una matrice rappresentativa del quadrato Q_2, ed A_{n-1} una matrice rappresentativa del quadrato Q_{n-1}.
Le matrici A_1, A_2, …, A_{n-1} sono a due a due ortogonali e ci consentiranno di costruire un piano affine d’ordine n che ampliato darà luogo ad un piano proiettivo d’ordine n.
Vediamo come si procede. Consideriamo un insieme α di cardinalità n^2. Disponiamo gli n^2 elementi dell’insieme α nelle n^2 celle di una matrice quadrata A d’ordine n. Possiamo così indicare gli elementi di α con le lettere a_{11}, a_{12} , etc..

$$\alpha = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sceglieremo ora alcuni sottoinsiemi dell'insieme α che chiameremo rette e poi proveremo che l'insieme α con tali rette forma un piano affine d'ordine n.
Le rette saranno di tre tipi : *orizzontali , verticali , oblique.*
Le rette orizzontali sono le n righe di A. Le rette verticali sono le n colonne di A. Tali rette sono quindi in tutto 2n e ciascuna di esse ha lunghezza n. Vediamo ora le rette oblique quali sono e quante sono. Ogni numero h di S = $\{1,2,..,n\}$ determina n-1 rette oblique che saranno denotate con

$$r_h^1 , r_h^2 \dots\dots r_h^{n-1}$$

Vediamo come si procede se scegliamo h = 1. Il numero 1 figura nella matrice A_1 una sola volta su ogni riga e su ogni colonna ed occupa in tale matrice quindi n posizioni. Sovrapponiamo la matrice A sulla matrice A_1 e scegliamo gli elementi di A che si trovano sovrapposti agli n numeri 1 presenti nella matrice A_1.
Sceglieremo così un sottoinsieme di cardinalità n che denotiamo con r_1^1 .
Nel simbolo r_1^1 adottato , il numero 1 in alto ricorda che stiamo utilizzando la matrice A_1 mentre il numero 1 in basso ci ricorda che stiamo usando in tale matrice le posizioni assunte dal numero 1 al fine di individuare quali elementi di α dobbiamo scegliere. Quindi per costruire la retta r_1^2 utilizzeremo la matrice A_2 e le posizioni occupate in essa dal numero 1. Infine per la retta obliqua r_1^{n-1} utilizzeremo la matrice A_{n-1} e le posizioni occupate in essa dal numero 1 . Quindi il numero 1 ha permesso di scegliere n-1 rette oblique.
Ora usando il numero 2 e le posizioni da lui occupate nelle matrici A_1, A_2,.., A_{n-1} costruiremo allo stesso modo altre n-1 rette oblique che saranno denotate con

$$r_2^1 , r_2^2 \dots\dots r_2^{n-1}$$

Infine usando il numero n e le sue posizioni nelle matrici A_1, A_2,.., A_{n-1} costruiremo le rette

$$r_n^1 , r_n^2 ......r_n^{n-1}$$

Abbiamo così determinato $n(n-1) = n^2 - n$ rette oblique ciascuna di lunghezza n.

E' evidente che per ogni punto passano n+1 rette .

Poiché le rette orizzontali , verticali , oblique hanno ciascuna lunghezza n ed α ha n^2 punti per provare che (α , $\Re$) è un piano affine è sufficiente mostrare che esso è uno spazio lineare.

Cominciamo col provare che due rette hanno al più un punto in comune. Due rette che siano entrambe orizzontali sono disgiunte e lo stesso accade se sono entrambe verticali. Una retta orizzontale ed una verticale hanno un punto in comune. Una retta obliqua ha n elementi disposti uno su ogni riga . Pertanto se una delle due rette è orizzontale e l'altra è obliqua esse hanno un punto in comune. Analogamente se una delle due rette è verticale e l'altra è obliqua. Supponiamo infine che le due rette siano entrambe oblique una sia r_h^i e l'altra r_k^j . Se tali due rette avessero due punti in comune allora le due posizioni assunte dall'intero h nella matrice A_i coincidono con le posizioni assunte dall'intero k nella matrice A_j e però ciò è assurdo perché le due matrici sono tra loro ortogonali.

Consideriamo ora due punti p e p'. Le n+1 rette per p per quanto ora visto private di p sono tra loro disgiunte e su di esse si ripartiscono $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ punti cioè tutti i punti del piano distinti da p . Pertanto p' si trova su una delle rette per p e così c'è la retta per i punti p e p'. Tale retta è unica perché, come provato , due rette hanno al più un punto in comune. La coppia (α , $\Re$) è quindi uno spazio lineare e così esso è un piano affine d' ordine n .

L' asserto è così completamente provato.

Bibliografia

[1] **T. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz,** *Design Theory,* Cambridge University Press (1993).

[2] **L.M. Batten, A. Beutelspacher**, *The theory of finite linear spaces*, Cambridge University Press (1993)

[3] **P. Dembowski**, **A. Wagner**, *Some characterizations of finite projective spaces*, Arch. Math. 11 (1960) 465–469.

[4] **B. Segre**, *Lectures on modern geometry*, Cremonese (1961).

[5] **G. Tallini**, *Strutture grafiche proiettive*, Liguori (1973).

[6] **O. Veblen, J.W. Young**, *Projective Geometry*, Ginn Boston, Vol. I (1910).