

Esercizio 1.

Di quanto cambia in percentuale il modulo di un vettore se l'angolo θ rispetto all'asse x dimezza e la componente x raddoppia? Studiare la variazione percentuale in funzione di θ . Fare qualche esempio con dati numerici scelti opportunamente

Sol. Scriviamo il vettore \vec{A} di modulo R come:

$$\begin{aligned}A_x &= R \cos(\theta) \\ A_y &= R \sin(\theta)\end{aligned}$$

Nella trasformazione $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ si ha:

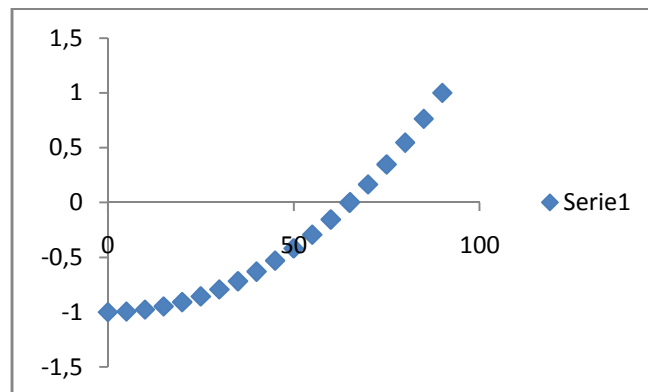
$$\begin{aligned}A'_x &= R' \cos(\theta') = R' \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2A_x = 2R \cos(\theta) \\ A'_y &= R' \sin(\theta') = R' \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

E dunque la variazione percentuale Δ del modulo sar :

$$\Delta = \frac{R - R'}{R} = 1 - \frac{R'}{R}$$

E dunque:

$$\Delta = 1 - 2 \frac{\cos(\theta)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Ovviamente θ deve essere compreso tra 0 e $\pi/2$. Se inizialmente l'angolo   nullo (vettore con unica componente lungo l'asse x) il Δ vale

$$\Delta = 1 - 2 = -1 = -100\%$$

Cio  il nuovo modulo   praticamente il doppio di quello iniziale. Infatti, rimanendo l'angolo invariato ($0/2 = 0$) l'unica componente (quella lungo x) raddoppia e con essa il modulo del vettore.

Se inizialmente l'angolo   60  si ha:

$$\Delta = 1 - 2 \frac{\cos(60)}{\cos(30)} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cong -15\%$$

Se invece l'angolo è 70° si ha:

$$\Delta = 1 - 2 \frac{\cos(70)}{\cos(35)} \cong 16\%$$

Quindi, il Δ si annulla per un angolo compreso tra 60° e 70°, in particolare quando

$$1 - 2 \frac{\cos(\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

con un risultato numerico di circa 65°

Se invece inizialmente l'angolo è retto (vettore con unica componente lungo l'asse y) la variazione varrebbe:

$$\Delta = 1 - 2 \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = 1 = 100\%$$

Questo implica che il vettore risultante dalla trasformazione sia nulla. Infatti, la condizione non è fisicamente valida perché la componente x resterebbe nulla ($2 \cdot 0 = 0$) mentre l'angolo dimezzerebbe e quindi il nuovo vettore dovrebbe avere una componente x diversa da zero. Occorre quindi supporre $\theta \approx 90^\circ$. Sia $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ e dopo manderemo ε a 0. Si ha dunque

$$A'_x = R' \cos(\theta') = R' \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}{2}\right) = 2A_x = 2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

Sviluppando si ha:

$$A'_x = 2R \sin(\varepsilon)$$

Ma anche:

$$A'_y = R' \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = R' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} R' \left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right)$$

Per definizione, il modulo R' del nuovo vettore è la somma in quadratura delle componenti A'_x e A'_y e quindi:

$$\begin{aligned} R'^2 &= 4R^2 \sin^2(\varepsilon) + \frac{R'^2}{2} \left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right)^2 \\ &= 4R^2 \sin^2(\varepsilon) \\ &\quad + \frac{R'^2}{2} \left(\cos^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right) = 4R^2 \sin^2(\varepsilon) + \frac{R'^2}{2} (1 - \sin(\varepsilon)) \end{aligned}$$

E quindi:

$$R'^2 = 4R^2 \sin^2(\varepsilon) + \frac{R'^2}{2} - \frac{R'^2}{2} \sin(\varepsilon)$$

Ed infine:

$$\frac{R'^2}{2} + \frac{R'^2}{2} \sin(\varepsilon) = 4R^2 \sin^2(\varepsilon)$$

$$R'^2 = 8R^2 \frac{\sin^2(\varepsilon)}{(1 + \sin(\varepsilon))}$$

Al limite di ε che tende a 0 anche R' tenderà 0 e quindi la variazione percentuale è di nuovo il 100% (positiva) perché il vettore si riduce a 0.

Esercizio 4

Di quanto cambia il modulo della risultante di due vettori se l'angolo fra di essi dimezza e le componenti y dei due vettori raddoppiano?

Sol. Siano i due vettori così scritti

$$\vec{p} = a\hat{i} + b\hat{j}$$

$$\vec{q} = c\hat{i} + d\hat{j}$$

L'angolo tra i due vettori si ottiene dal prodotto scalare:

$$\theta = \arccos\left(\frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}\right)$$

Il modulo quadro della risultante sarà:

$$R^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$$

I nuovi vettori saranno scritti:

$$\vec{p}' = a'\hat{i} + b'\hat{j} = a'\hat{i} + 2b\hat{j}$$

$$\vec{q}' = c'\hat{i} + d'\hat{j} = c'\hat{i} + 2d\hat{j}$$

L'angolo fra essi è ora

$$\theta' = \arccos\left(\frac{a'c' + 4bd}{\sqrt{a'^2 + 4b^2}\sqrt{c'^2 + 4d^2}}\right) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}\right)$$

Mentre la nuova risultante avrà modulo

$$R'^2 = (a' + c')^2 + 4(b + d)^2$$

Poniamo ad esempio $a = 1, b = 1, c = 0$ e $d = 1$. Si ha: $R^2 = 1 + 4 = 5$

mentre l'angolo tra i due vettori risulterà 45° perché uno dei vettori è lungo l'asse y mentre l'altro è lungo la bisettrice del quadrante. Ovviamente si può ricavare questo valore anche dalla relazione del prodotto scalare. Quindi il nuovo angolo diventa $22,5^\circ$ e dunque

$$\left(\frac{a'c' + 4}{\sqrt{a'^2 + 4}\sqrt{c'^2 + 4}}\right) = \cos(22,5) \cong 0,92$$

Mentre sulla risultante si ha $R'^2 = (a' + c')^2 + 16$

Da questa relazione deduciamo che la nuova risultante sarà sempre maggiore della precedente risultante. Per semplificare le relazioni generali scritte sopra, supponiamo di lasciare invariata la componente x del vettore q , quindi di porre $c' = c = 0$. In tal caso le relazioni diventano

$$\left(\frac{2}{\sqrt{a'^2 + 4}}\right) \cong 0,92 \leftrightarrow 4,7 \cong (a'^2 + 4) \leftrightarrow a' \cong 0,8$$

Il nuovo angolo del vettore p rispetto all'asse x risulta $\arctan\left(\frac{2}{0.8}\right) = 67.5$ come atteso. Infatti l'angolo fra essi deve essere ora $90-67,5 = 22,5$.