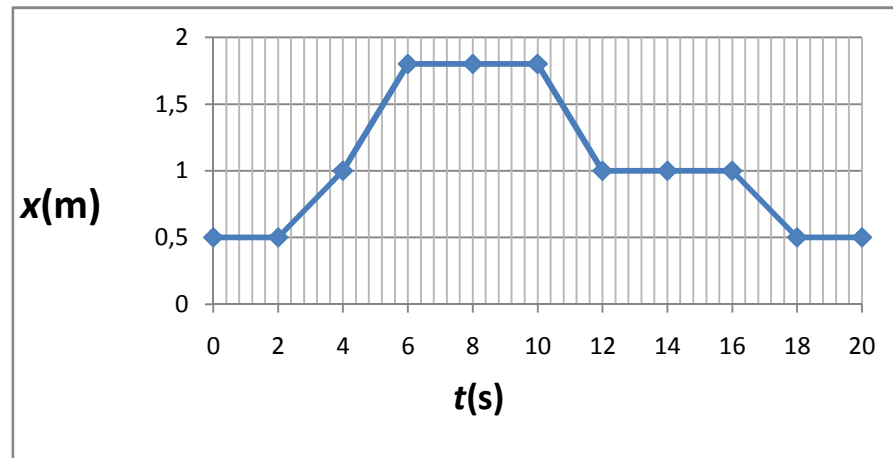


- 1) In figura è rappresentato il grafico della legge oraria di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea:



Descrivere a parole il moto, e dedurre (e quindi tracciare) il grafico di $v(t)$ a partire da quello di $x(t)$. Determinare inoltre:

- Il modulo del vettore spostamento nell'intervallo di tempo $[0,20]$ s.
- Lo spazio percorso dal punto materiale nell'intervallo di tempo $[0,20]$ s. a partire dall'equazione della legge oraria del punto
- La velocità media nell'intervallo $[2,12]$ s.

SOLUZIONE:

Fissata l'origine e scelto come verso positivo del moto quello che va da sinistra verso destra (\rightarrow) Analizziamo il moto suddividendolo in intervalli:

- $t \in [0,2]$ s.: All'istante $t = 0$ s. il punto materiale occupa la posizione $x(0) = 0,5$ m. Il punto materiale **rimane fermo** fino all'istante $t = 2$ s., in quanto la sua posizione rispetto all'origine rimane costantemente uguale a 0,5 m. Ciò si può evincere anche considerando che la velocità, che rappresenta **la derivata prima della funzione $x(t)$ rispetto al tempo** ($v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$) è **zero in tale intervallo**, essendo la funzione $x(t) = 0,5 = \text{costante}$.
- $t \in [2,4]$ s: Il punto materiale si muove di **moto rettilineo uniforme**; il grafico della legge oraria è **una retta**, il cui **coefficiente angolare** rappresenta la velocità del punto (che è costante). Il punto materiale si sta **allontanando** dall'origine, in quanto la posizione x in funzione del tempo aumenta; ciò è in accordo con il fatto che la pendenza della retta, e quindi la velocità del punto materiale, ha **segno positivo**.

L'equazione della legge oraria in quest'intervallo vale:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

Con $x_0 = 0,5$ m. , $t_0 = 2$ s e $v = \frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = \frac{1 - 0,5}{2} = 0,25$ m/s. $\rightarrow x(t) = 0,5 + 0,25(t - 2)$

Calcoliamo lo spazio percorso in tale intervallo: $\Delta x = x(4) - x(2) = 0,25(4 - 2) = 1 - 0,5 = 0,5$ m

- $t \in [4,6]$ s: Il punto materiale si muove ancora di **moto rettilineo uniforme**, ma in questo caso con una velocità maggiore della precedente:

$$v = \frac{x(6) - x(4)}{6 - 4} = \frac{1,8 - 1}{2} = 0,4 \text{ m/s (come era del resto intuibile osservando la pendenza della retta in questo intervallo, maggiore della precedente).}$$

L'equazione della legge oraria in questo caso è:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \rightarrow x(t) = 1 + 0,4(t - 4) \text{ (assumendo } x_0 = x_{t=4} = 1 \text{ m. e } t_0 = 4 \text{ s)}$$

Lo spazio percorso in questo intervallo vale:

$$\Delta x = x(6) - x(4) = 0,4(6 - 4) = 2,4 - 1,6 = \mathbf{0,8 \text{ m.}}$$

- $t \in [6,10]$ s : il punto materiale è **fermo** (si veda il punto 1).

L'equazione della legge oraria è $x(t) = 1,8 \text{ m.} \rightarrow \Delta x = 0$

- $t \in [10,12]$ s: Il punto materiale si muove di **moto rettilineo uniforme**, con velocità $v = \frac{x(12) - x(10)}{12 - 10} = \frac{1 - 1,8}{2} = \mathbf{-0,4 \text{ m/s}}$ (come si evince dalla **pendenza della retta** che è, in questo caso, **negativa**). **Il punto materiale sta dunque tornando indietro.**

L'equazione della legge oraria è:

$$x(t) = 1,8 - 0,4(t - 10) \rightarrow \Delta x = x(12) - x(10) = -0,4(12 - 10) = \mathbf{-0,8 \text{ m}}$$

Il segno meno nel risultato sta solo ad indicare che il corpo è **tornato indietro percorrendo 0,8 m** (moto di avvicinamento).

- $t \in [12,16]$ s. : il punto materiale è **fermo** (si veda il punto 1).

L'equazione della legge oraria è $x(t) = 1 \text{ m.} \rightarrow \Delta x = 0$

- $t \in [16,18]$ s: Il punto materiale **continua ad avvicinarsi** all'origine con velocità costante (moto rettilineo uniforme).

$$v = \frac{x(18) - x(16)}{18 - 16} = \frac{0,5 - 1}{2} = \mathbf{-0,25 \text{ m/s}}$$

L'equazione della legge oraria è:

$$x(t) = 1 - 0,25(t - 16) \rightarrow \Delta x = x(18) - x(16) = -0,25(18 - 16) = \mathbf{-0,5 \text{ m}}$$

- $t \in [18,20]$ s. : il punto materiale è **fermo** (si veda il punto 1).

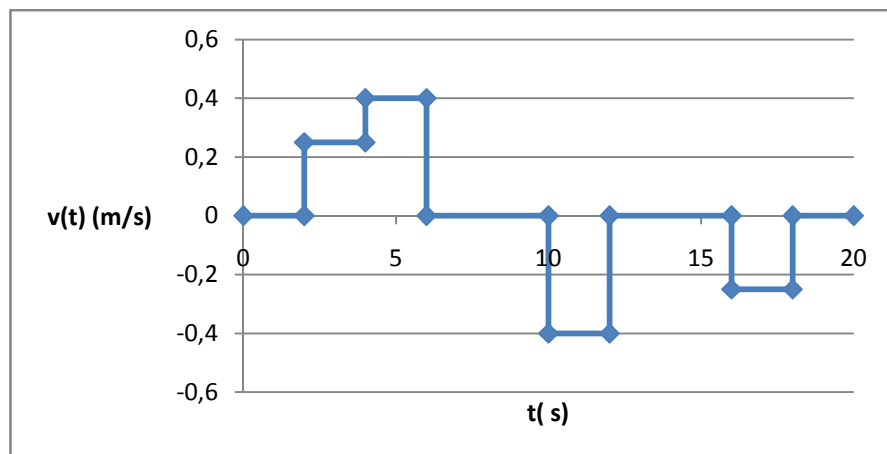
L'equazione della legge oraria è $x(t) = 0,5 \text{ m.} \rightarrow \Delta x = 0$ (il punto materiale è tornato nella posizione iniziale).

- a) Il **vettore spostamento** $\overrightarrow{\Delta x}$ la differenza tra la posizione assunta nell'istante $t=20$ s. e quella assunta dal punto materiale all'istante $t=0$: $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{x_f} - \overrightarrow{x_i} = 0,5 - 0,5 = 0$.

- b) Lo spazio percorso nell'intervallo $[0,20]$ s. è la somma degli spazi calcolati precedentemente:

$$\Delta X = \mathbf{0,5 + 0,8 + 0,8 + 0,5 = 2,6 \text{ m}}$$

Grafico v-t :

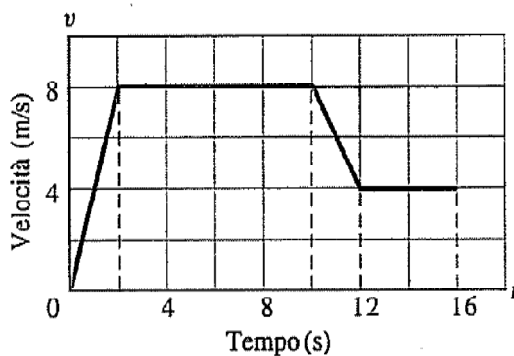


c) La **velocità media** nell'intervallo [2,12] s. è, per definizione:

$$v_{media} = \frac{x(12) - x(2)}{12 - 2} = \frac{1 - 0,5}{10} = \mathbf{0,05 \frac{m}{s}}$$

Essa rappresenta il **coefficiente angolare della retta secante** passante per i punti (2 ; 0,5) – (12; 1)

2) Il grafico in figura mostra la velocità in funzione del tempo di un corridore che si muove lungo una traiettoria rettilinea:



Descrivere a parole il moto, e calcolare lo spazio percorso dal corridore in 16 s.

SOLUZIONE:

Analizziamo il moto suddividendolo in 4 intervalli:

- Per $t \in [0,2]$ s il corridore si muove di **moto uniformemente accelerato**, essendo il grafico $v(t)$ una retta (velocità direttamente proporzionale al tempo).

$$v(t) = v_0 + at, \text{ dove } v_0 = 0 \text{ e } a = \frac{v(2) - v(0)}{2 - 0} = \frac{8 - 0}{2 - 0} = 4 \frac{m}{s^2} \rightarrow v(t) = 4t$$

La legge oraria si ricava ricordando che:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = 2t^2$$

Mentre lo spazio percorso considerando l'integrale definito $\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 4t dt = [2t^2]_0^2 = 2(4) - 0 = 8 \text{ m}$.

Ricordando il significato geometrico dell'integrale definito di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[x_1; x_2]$, e cioè l'area sottesa al grafico della curva in tale intervallo, allo stesso risultato si poteva pervenire calcolando l'area sottesa alla curva $v(t)$ nell'intervallo $[0,2] \text{ s}$, che rappresenta un triangolo rettangolo:

$$\mathbf{A} = [(2 \text{ s}) \cdot (8 \text{ m/s})] / 2 = \mathbf{16 \text{ m}}.$$

- Per $t \in [2,10] \text{ s}$ il corridore si muove di **moto rettilineo uniforme**, essendo la velocità costante nel tempo:

$$v(t) = 8 \text{ m/s} \rightarrow x(t) = \int_2^t v(t)dt = 8(t - 2).$$

Lo spazio percorso in questo intervallo di tempo si ottiene risolvendo l'integrale definito $\int_2^{10} v(t)dt = \int_2^{10} 8dt = [8t]_2^{10} = 80 - 16 = 64 \text{ m}$

Per quanto esposto nel punto precedente, tale valore coincide con l'area sottesa al grafico della curva $v(t)$ nell'intervallo $[2,10] \text{ s}$, che rappresenta un quadrato di lato 8:

$$\mathbf{A} = (8 \text{ s}) \cdot (8 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = \mathbf{64 \text{ m}}.$$

- Per $t \in [10,12] \text{ s}$ il corridore si muove di **moto uniformemente decelerato**; la velocità diminuisce linearmente nel tempo con decelerazione costante $a = \frac{v(12) - v(10)}{12 - 10} = \frac{4 - 8}{12 - 10} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

L'equazione di v in funzione di t si ottiene considerando:

$$a = \frac{v(t) - v(10)}{t - 10} \rightarrow v(t) = 8 - 2(t - 10)$$

$$x(t) = \int_{10}^t v(t)dt = [28t - t^2]_{10}^t = 28t - t^2 - 280 + 100 = 28t - t^2 - 180$$

Lo spazio percorso è $\int_{10}^{12} v(t)dt = [28t - t^2]_{10}^{12} = -144 + 336 + 100 - 280 = 12 \text{ m}$.

Tale valore coincide con l'area del trapezio rettangolo sottesa alla curva $v(t)$ nell'intervallo dato:

$$\mathbf{A} = \left[\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot 2 \text{ s} \right] / 2 = \mathbf{12 \text{ m}}.$$

- Per $t \in [12,16] \text{ s}$ il corridore si muove di **moto rettilineo uniforme**, essendo la velocità costante nel tempo:

$$v(t) = 4 \text{ m/s} \rightarrow x(t) = \int_{12}^t v(t)dt = 4(t - 12).$$

Lo spazio percorso in questo intervallo di tempo si ottiene risolvendo l'integrale definito

$$\int_{12}^{16} v(t)dt = \int_{12}^{16} 4dt = [4t]_{12}^{16} = 64 - 48 = 16 \text{ m}$$

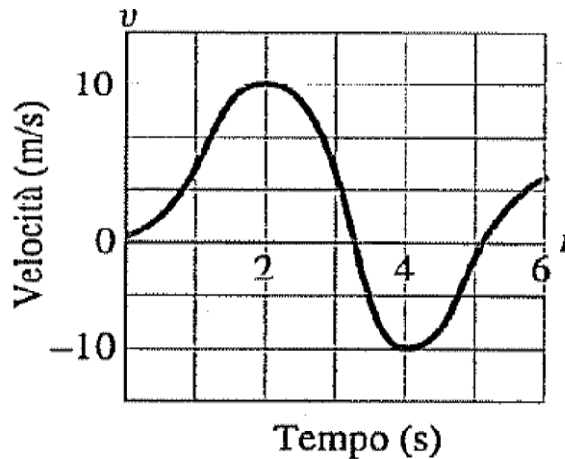
Tale valore coincide con l'area sottesa al grafico della curva $v(t)$ nell'intervallo $[12,16] \text{ s}$, che rappresenta un quadrato di lato 4:

$$\mathbf{A} = (4 \text{ s}) \cdot (4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = \mathbf{16 \text{ m}}.$$

In definitiva, lo spazio percorso dal corridore vale:

$$\Delta x = 16 + 64 + 12 + 16 = 108 \text{ m}.$$

- 3) Un punto materiale si muove su una linea retta, e il grafico della sua velocità in funzione del tempo $v(t)$ è rappresentato in figura..
 - a) Indicare in quali intervalli di tempo l'accelerazione del punto materiale è positiva, negativa, o nulla, argomentando in maniera esauriente la vostra risposta.
 - b) Calcolare il valore dell'accelerazione media del punto materiale negli intervalli di tempo: $[0,2] \text{ s}$, $[2,4] \text{ s}$, $[4,6] \text{ s}$, $[0,6] \text{ s}$



SOLUZIONE:

- a) Il grafico in figura rappresenta un **moto vario** (velocità variabile nel tempo istante per istante). Supponiamo che il moto avvenga lungo una traiettoria rettilinea, e fissiamo l'origine del sistema di riferimento scegliendo come verso positivo del moto quello che va da sinistra verso destra (\rightarrow). Ricordiamo che l'**accelerazione istantanea** è la **derivata prima della funzione $v(t)$ rispetto al tempo: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$** e rappresenta il **coefficiente angolare della retta tangente al grafico $v(t)$ istante per istante**. Il suo segno è dunque strettamente connesso alla monotonia della funzione $v(t)$ ($a(t) > 0$ se $v(t)$ è crescente, $a(t) < 0$ se $v(t)$ è decrescente; $a = 0$ nei punti a tangente orizzontale, ossia nei punti di massimo e minimo della funzione). Nell'intervallo $[0,2]$ s la velocità è positiva e aumenta fino ad assumere il valore di 10 m/s; in tale intervallo l'accelerazione del punto materiale è positiva essendo la funzione $v(t)$ crescente. Avendo la velocità e l'accelerazione lo stesso segno (positivo), si deduce che il punto materiale si sta allontanando dall'origine del sistema di riferimento accelerando. Dalla pendenza della retta tangente al grafico $v(t)$ si nota che l'accelerazione aumenta in un primo intervallo ($\approx [0; 1,2]$ s) per poi diminuire nell'intervallo $(1; 2)$ s, fino ad assumere il valore 0 per $t = 2$ s. Nell'intervallo $[2,4]$ s la funzione $v(t)$ decresce, dapprima per valori positivi, poi per valori negativi: l'accelerazione è dunque **negativa**. In particolare, c'è un istante di tempo t^* non specificato sul grafico, corrispondente all'intersezione della funzione $v(t)$ con l'asse delle ascisse, in cui essa vale 0 ($t^* \approx 3,2 - 3,3$ s.). Per $t \in [2; 3,2]$ s, essendo v positiva e a negativa, ciò significa che il punto materiale sta **decelerando** allontanandosi dall'origine. Per $t \in [3,2; 4]$ s la velocità e l'accelerazione hanno entrambe **segno negativo** (sono concordi): ciò significa che il punto materiale, dopo essersi fermato **ha invertito il senso del moto tornando verso l'origine accelerando con accelerazione in modulo via via decrescente**, fino ad annullarsi per $t = 4$ s.

Nell'intervallo $t \in [4; 6]$ s la funzione $v(t)$ è nuovamente crescente; l'accelerazione è dunque positiva. Per $t \in [4; 5]$ s, essendo v di segno discorde (negativa), ciò significa che **il punto materiale, pur continuando a muoversi verso l'origine, decelera**, fino a fermarsi per $t = 5$ s. A partire da questo istante in poi e fino a $t = 6$ s. il corpo inverte nuovamente il verso del moto allontanandosi dall'origine (v positiva) e con un'accelerazione via via decrescente (in quanto la tangente al grafico $v(t)$ ha pendenza via via minore).

- b) L'accelerazione media è per definizione:

$$a_{media} = \frac{v_{finale} - v_{iniziale}}{t_{finale} - t_{iniziale}}$$

Geometricamente essa rappresenta il coefficiente angolare della retta secante al grafico $v(t)$ passante per i punti $(t_{iniziale}; v_{iniziale})$ e $(t_{finale}; v_{finale})$.

- $t \in [0,2]$ s: $a_{media} = \frac{10-0}{2-0} = 5 \text{ m/s}^2$
- $t \in [2,4]$ s: $a_{media} = \frac{-10-10}{4-2} = -10 \text{ m/s}^2$
- $t \in [4,6]$ s: $a_{media} = \frac{3,3-(-10)}{6-4} = 6,65 \text{ m/s}^2$
- $t \in [0,6]$ s: $a_{media} = \frac{3,3-0}{6-0} = 0,55 \text{ m/s}^2$