



# Integrali

integrale definito  
primitiva  
integrale indefinito

## Indice della lezione

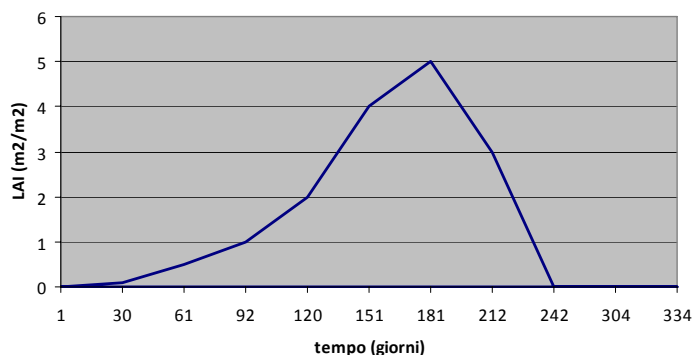
- **Integrale Definito**
  - Rettangoloide
  - Integrale definito come area del rettangoloide
  - Esempi e proprietà'
- **Primitiva**
  - Teorema fondamentale del calcolo integrale
- **Integrale Indefinito**
  - Integrale indefinito e primitiva
  - Esempi e proprietà'

## Il concetto di Integrale: cenni storici

L'idea di base del concetto di integrale si trova già in parte nel metodo usato da Archimede di Siracusa (vissuto tra il 287 ed il 212 a.C) per il calcolo dell'area del cerchio o del segmento di parabola e più precisamente per il calcolo dell'area della superficie racchiusa dal primo giro della spirale

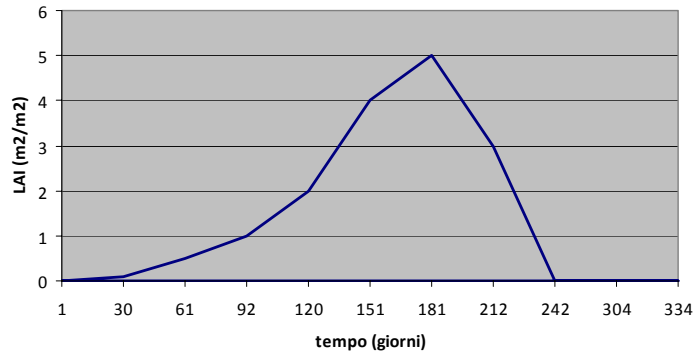
## Il concetto di Integrale: calcolo delle aree

E per il "nostro" LAI?



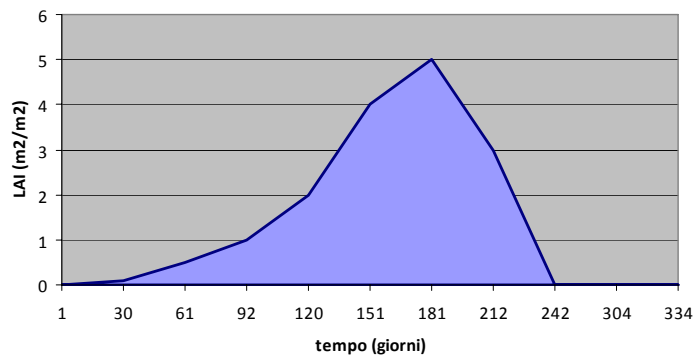
## Il concetto di Integrale: calcolo delle aree

La quantità (somma) di area fogliare fotosinteticamente attiva nei 242 giorni?



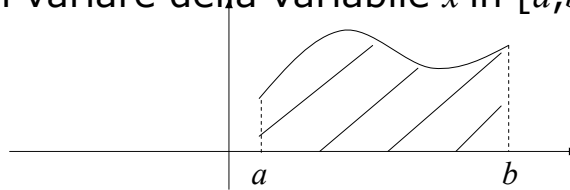
## Il concetto di Integrale: calcolo delle aree

La quantità (somma) di area fogliare fotosinteticamente attiva nei 242 giorni?



## Rettangoloide relativo alla funzione $f \geq 0$

sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in un intervallo  $[a,b]$  chiuso e limitato e sia  $f(x) \geq 0$  al variare della variabile  $x$  in  $[a,b]$

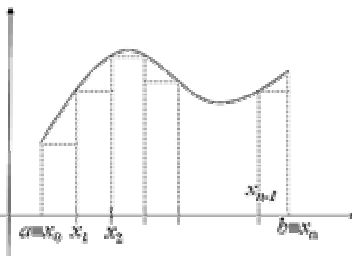


In tali ipotesi

**Def.** Si definisce **rettangoloide** relativo alla funzione  $f$  la parte di piano compresa tra il grafico di  $f \geq 0$  e l'asse delle ascisse

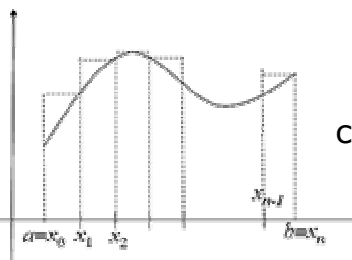
$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

## Integrale relativo alla funzione $f \geq 0$



L'area del plurirettangolo inscritto nel rettangoloide è:

$$S_n = m_1 h + m_2 h + \dots + m_n h$$

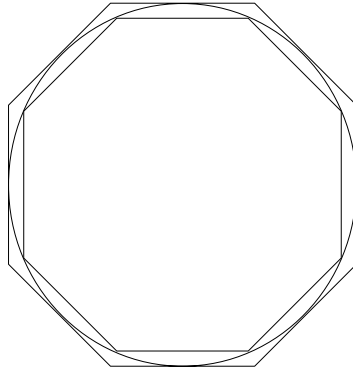


L'area del plurirettangolo circoscritto al rettangoloide è:

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \dots + M_n h$$

## Esempio sul cerchio

$$a_n \leq A_n, \forall n \in \mathbb{N}$$



## Integrale relativo alla funzione $f \geq 0$

**Def.** Il valore comune del limite delle somme  $s_n$  ed  $S_n$  si definisce **integrale definito** della funzione  $f(x)$  esteso all'intervallo  $[a, b]$  e si indica:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

e non è altro che l'area del rettangoloide relativo alla funzione  $f$

(ricordiamo che  $f(x) \geq 0$  al variare della variabile  $x$  in  $[a, b]$ )

## Integrale definito di una funzione $f \geq 0$

In particolare, nel caso in cui  $f(x) \geq 0$ , l' **integrale definito** della funzione  $f(x)$  esteso all'intervallo  $[a,b]$  coincide con l'area del rettangoloide relativo alla funzione  $f$  e si indica:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Area } R$$

Nelle ipotesi poste, l'integrale definito è un numero  $> 0$

## Integrale definito di una funzione: definizione

- i numeri  $a$  e  $b$  (estremi dell'intervallo di definizione della funzione), vengono definiti **estremi di integrazione** e in particolare:
  - $a$  è l'**estremo inferiore di integrazione**
  - $b$  è l'**estremo superiore di integrazione**
- la funzione  $f(x)$  viene definita **funzione integranda**
- la variabile  $x$  è la **variabile di integrazione**

[http://www.liceomontaleroma.it/documenti/segreteria/lab\\_fisica/integrale\\_definito.html](http://www.liceomontaleroma.it/documenti/segreteria/lab_fisica/integrale_definito.html)

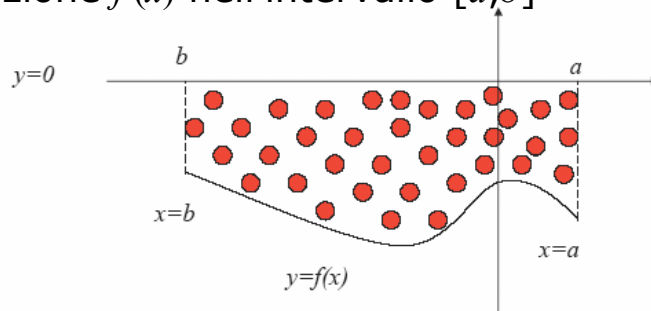
## Integrale definito di una funzione $f \geq 0$

### Osservazione 1.

La definizione di **integrale definito** di una funzione  $f$  definita e continua in un intervallo  $[a,b]$ , nel caso particolare in cui  $f(x) \geq 0$ , ha un'interpretazione geometrica in quanto coincide con l'area del rettangoloide relativo alla funzione stessa.

E se  $f(x)$  non e' sempre maggiore di 0?

Le somme  $s_n$  ed  $S_n$  relative ad una funzione  $f(x)$ , definita e continua in un intervallo  $[a,b]$ , possono essere costruite anche indipendentemente dal segno della stessa funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $[a,b]$

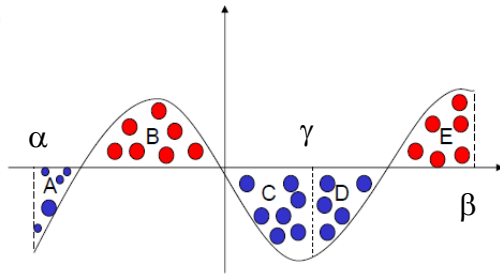


In particolare, assegnata  $f(x)$  continua in  $[a,b]$  (di segno non necessariamente positivo) L'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx$$

si interpreta come la somma delle **aree con segno** delle regioni che il grafico  $f(x)$  individua insieme all'asse orizzontale e alle rette  $x=a$  e  $x=b$

## Esempio



$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = -A + B - C$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -A + B - C - D + E$$

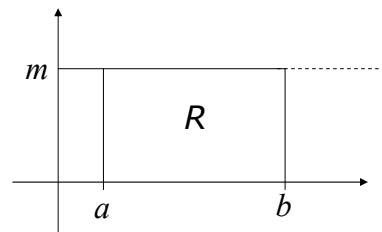


$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

## Osservazione

Se  $f(x)$  è una funzione costante

$$f(x) = m > 0, \forall x \in [a, b]$$



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b m dx = m(b-a)$$

In particolare, vale che:

- $\int_a^a f(x)dx = 0, \forall f(x)$  definita e continua

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

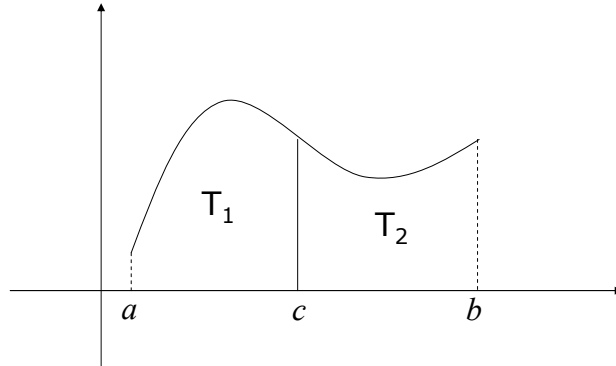
## Proprietà degli integrali definiti

- **Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione**

Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $[a,b]$  e sia  $c \in (a,b)$  ( $\Rightarrow a < c < b$ ). Allora, vale che:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ovviamente, tale proprietà ha un chiaro significato geometrico nel caso si tratti di integrali di funzioni positive



$$\text{Area } R = \text{Area } T_1 + \text{Area } T_2$$

Integrali: riepilogo

## Proprietà degli integrali definiti

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni definite e continue in  $[a, b]$  e sia  $c \in \mathbb{R}$ . Allora, vale che:

$$\bullet \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

Integrali: riepilogo

La definizione di integrale non da nessuna informazione su come calcolarlo.

Ci proponiamo ora di mettere in evidenza l'importante relazione che esiste tra integrali e derivate

## Funzione primitiva

**Def.** Una funzione  $F(x)$  definita e derivabile in  $[a,b]$ , si definisce **primitiva** della funzione  $f(x)$ , definita e continua in  $[a,b]$ , se risulta che

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

## Integrale indefinito

se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , allora si ha che

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

con  $c \in \mathbb{R}$  costante arbitraria

## Funzione primitiva

- se  $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + c$

infatti:  $F'(x) = \frac{1}{2}2x = x = f(x)$

## Integrale indefinito

**Def.** Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $[a,b]$ , allora sicuramente ammette primitive e l'insieme di tutte le primitive di  $f(x)$  viene definito integrale indefinito di  $f$  e si indica col simbolo

$$\int f(x)dx$$



## Osservazione

Esiste una grande differenza tra l'integrale definito e indefinito di una stessa funzione

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \int f(x)dx$$



- l'integrale definito è un numero (in particolare positivo e pari all'area del rettangoloide relativo ad  $f$  se  $f$  è non negativa)
- l'integrale indefinito è un insieme di funzioni

## Regole

- $\int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c, \forall b \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

## Integrale indefinito delle funzioni elementari

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c, (\forall a > 0, a \neq 1)$
- $\int e^x dx = e^x + c$

## Integrale indefinito delle funzioni elementari

- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

## Proprietà dell' integrale indefinito

Infine, ricordando che:

- la derivata di una somma è la somma delle derivate
- la derivata del prodotto di una costante per una funzione è la costante per la derivata della funzione



Valgono le seguenti proprietà  
dell'integrale indefinito

## Proprietà:

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx, \forall c \in \mathbb{R}$  costante

$$\rightarrow \int -f(x) dx = - \int f(x) dx$$

## Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia  $f(x)$  una funzione continua e positiva in  $[a, b]$ .

Fissato  $x$  in  $[a, b]$ , definiamo

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

cioè  $A(x)$  è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di  $f$  e le rette verticali  $a$  ed  $x$ .



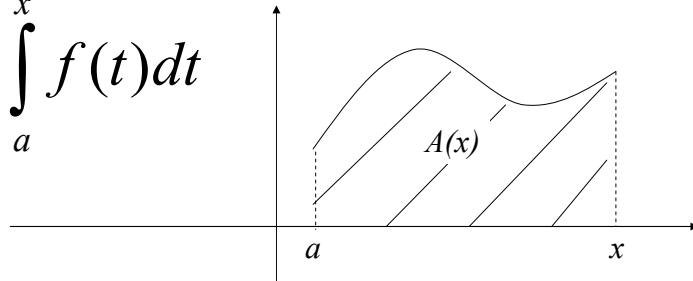
La funzione  $A(x)$  è primitiva di  $f$  e nel punto  $x$  si ha  $A'(x) = f(x)$

## L'integrale

$$\int_a^x f(t)dt$$

dipende dall'estremo  $x \in [a, b]$  e quindi  
è una funzione della  $x$   
che possiamo indicare come segue

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Integrali: riepilogo

## Teorema di Torricelli-Barrow

Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $[a, b]$  e  
sia  $F(x)$  una sua primitiva



allora risulta che:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dove il simbolo  $[F(x)]_a^b$  sta appunto a significare la  
differenza tra i valori assunti da  $F$  in  $b$  e  $a$

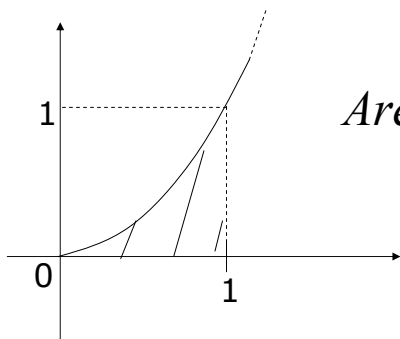
Integrali: riepilogo

## Esempi:

- sia dato  $\int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$

## Esempio:

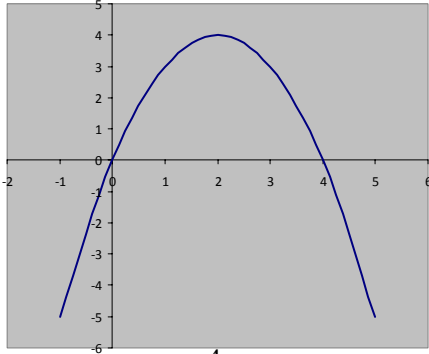
Calcolare l'area del rettangoloide relativo alla funzione  $f(x) = x^2$  nell'intervallo  $[0,1]$



$$\text{Area } R = \int_0^1 x^2 dx = \text{Applicando la formula fondamentale del calcolo integrale}$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} > 0$$

## Esempio:



Calcolare l'area tra la curva e l'asse delle x

La funzione è  $f(x) = -x^2 + 4x$

Gli estremi sono  $[0, 4]$

$$\int_0^4 -x^2 + 4x dx =$$

$$\left[ -\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \left( -\frac{4^3}{3} + 4\frac{4^2}{2} \right) - \left( -\frac{0^3}{3} + 4\frac{0^2}{2} \right) =$$

$$\left( -\frac{64}{3} + 2 \cdot 16 \right) = (-21.33 + 32) = 10.6667$$

## Integrale indefinito delle funzioni composte

A volte, poi, ci si riconduce ad integrali immediati attraverso la formula di derivazione delle funzioni composte. Ad esempio, vale che:

$$\bullet \int [f(x)]^b \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{b+1}}{b+1} + c, \forall b \neq -1$$

$$\begin{aligned} \text{infatti: } D\left(\frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} + c\right) &= (b+1) \cdot \frac{[f(x)]^{b+1-1}}{b+1} \cdot f'(x) = \\ &= [f(x)]^b \cdot f'(x) \end{aligned}$$

## Regole

$$\bullet \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

$$\bullet \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\bullet \int [f(x)]^b \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{b+1}}{b+1} + c, \forall b \neq -1$$

## Integrale indefinito delle funzioni composte

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$
- $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
- $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c, (\forall a > 0, a \neq 1)$

## Integrale indefinito delle funzioni composte

- $\int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$
- $\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen } f(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) dx = \tan f(x) + c$

## Integrazione per decomposizione in somma

In molti casi il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione si può ricondurre al calcolo di integrali già noti, o di tipo più semplice



Un metodo particolarmente frequente consiste nel decomporre la funzione integranda nella somma di due o più funzioni e poi nell'applicare la proprietà di linearità.

## Integrazione per decomposizione in somma

**Esempio.** Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x}{x+1} dx$$

Allora: sommando e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda si ha che:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left( \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x + \log|x+1| + c \end{aligned}$$

## Applet per la risoluzione di integrali indefiniti

<http://integrals.wolfram.com/index.jsp>

### Esempi:

$$\begin{aligned} \bullet \int x\sqrt{x^2 + 1} dx &= \int x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c \end{aligned}$$