Matematica

(Esercitazioni)

dott. Francesco Giannino

dott. Valeria Monetti

Teorema di L'Hopital

Siano f e g due funzioni derivabili in $]a,b[$ tali che:

$g(x), g'(x) \neq 0,\ \forall x \in \,]a,b[$ eccetto al più in un punto $x_0 \in \,]a,b[$

Se risulta che:

$i)\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ricade nelle forme indeterminate $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$ii)\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ con l finito o infinito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Teorema di L'Hopital

Osservazione 1. Il teorema di l'Hopital continua a valere anche se l'intervallo (a,b) in cui f e g sono derivabili non è limitato e se

$$x_0 = \pm\infty$$

Osservazione 2. Il teorema di l'Hopital può essere applicato anche più volte consecutivamente se dopo averlo applicato la prima volta ci si ritrova di nuovo in una forma indeterminata del tipo

$$\boxed{\frac{0}{0}} \qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Derivata di funzioni composte

Esercizio 8:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{1} = 3$$

Derivata di funzioni composte

Esercizio 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Derivata di funzioni composte*

Esercizio 5:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log\left(1+x^5\right)}{\log\left(2+x^3\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{5x^4}{1+x^5}}{\frac{3x^2}{2+x^3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^4}{1+x^5}\,\frac{2+x^3}{3x^2} =$$

Derivata di funzioni composte

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4}{1+x^5} \frac{2+x^3}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{10x^4 + 5x^7}{3x^2 + 3x^7} = \quad \frac{5}{3}$$

Teorema di L'Hopital

Osservazione

Il teorema di l'Hopital può essere applicato solo nel caso di forma di indecisione

$$\boxed{\frac{0}{0}} \qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Può essere però utile anche per sciogliere altre forme indeterminate come

$$\boxed{0 \cdot \infty} \qquad \boxed{\infty - \infty}$$

Cercando in questo caso di ricondursi alle prime due forme indeterminate per cui vale il teorema di l'Hopital

Derivata di funzioni composte

Esercizio 6:

$$\lim_{x\to 1^+}[\log x\cdot\log(x-1)] = [0\cdot\infty]$$ Non si può applicare la regola di l'Hopital

$$\lim_{x\to 1^+}[\log x\cdot\log(x-1)] = \lim_{x\to 1^+}\frac{\log(x-1)}{\dfrac{1}{\log x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital

Derivata di funzioni composte*

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\log(x-1)}{\dfrac{1}{\log x}} =$$ Si può applicare la regola di l'Hopital

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\log^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x\log^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-x\log^2 x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Derivata di funzioni composte

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-x \log^2 x}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-\left(\log^2 x + \cancel{x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \right)}{1} = \quad 0$$

Derivata di funzioni composte*

Esercizio 7:

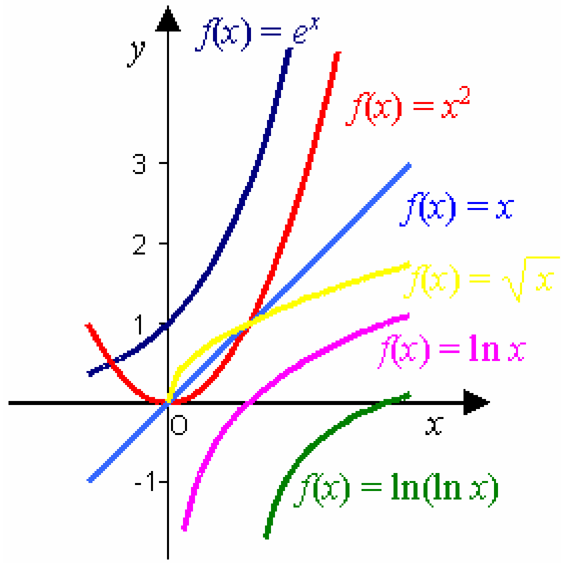
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log\left(x^2 + x\right)}{\log x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x+1}{x^2+x} \cdot x =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(2x+1)}{\cancel{x}(x+1)} = \; 1$$

Gerarchia di infiniti



Gerarchia di infiniti

Tutto ciò si traduce dicendo che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0, \quad a > 1, b > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^b \log_a x = 0, \quad a > 1, b > 0$$

Teorema di L'Hopital

Dunque, già sappiamo che in generale vale che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$$

Esempio: calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=$$

$$=0$$

Derivata di funzioni composte

Esercizio 3:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^x}{x}\right)=\log\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Si può applicare la regola di l'Hopital all'argomento del logaritmo

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^x}{x}\right)=\log\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\log(+\infty)=+\infty$$