UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Percorsi Abilitanti Speciali (PAS), Area Didattica di Scienze MFN

A.A. 2013/14

DIDATTICA DELLA FISICA

Docente: Lorenzo Manti, Dipartimento di Fisica, Stanza 1G14

tel. 081 676262; e-mail: manti@na.infn.it

TEORIA DEGLI ERRORI

Lo studio degli errori da cui è affetta una misura serve a fornire una stima dell'incertezza con cui il valore "vero" della grandezza misurata è conosciuto, ossia di quanto tale valore possa discostarsi dal valore misurato.

In questo contesto, quindi, **errore non equivale a sbaglio,** ma denota l'inevitabile incertezza associata alla misura di una grandezza fisica.

I. *Studio a priori*:
   Permette di scegliere metodi e strumenti di misura più adatti ad ottenere la precisione voluta ed a eliminare eventuali imperfezioni nell'apparato che inficino la misura.

II. *Studio a posteriori*,
   Permette un'analisi critica delle misure effettuate in quanto **nessuna misura**, per quanto fatta con cura, **é completamente scevra di incertezze.**
   a. Ciò può essere dovuto a piccole variazioni delle condizioni sperimentali, che non possono essere determinate e, quindi, eliminate.
   b. Inoltre, la ripetizione di una misura di una qualsiasi grandezza fisica, purché effettuata con uno strumento sufficientemente sensibile, porta a risultati di valore diverso, nonostante le condizioni sperimentali rimangano in apparenza le stesse.

III. Minimizzare quanto più ragionevolmente possibile gli errori e stimarne la grandezza

Esistono diversi tipi di errori a seconda della loro origine.

- **Errori sistematici**: sono tali che il valore misurato è sistematicamente diverso dal valore vero; nel caso di più misure della stessa grandezza, per esempio, tutti i valori sono sistematicamente più grandi di quello atteso. Sono attribuibili alla scarsa giustezza dello strumento e/o a un suo non corretto impiego, oppure ad un errore di applicazione delle formule.

- **Errori di sensibilità**: sono dovuti alla sensibilità dello strumento.

Ad esempio, si esegua la misura della lunghezza di un tavolo con un metro la cui sensibilità è il centimetro, cioè tale che lo spazio tra le due divisioni più piccole della scala è di un centimetro; se l'estremità del tavolo capita fra due divisioni, ciò significa che al valore dell'ultima divisione può essere aggiunta metà divisione: quindi se l'ultima divisione corrispondeva a 36 cm, il risultato della misura sarà 36,5 cm.

D'altra parte, è possibile anche che il valore vero sia 36,8 cm, perché lo strumento usato non permette di apprezzare differenze di 3 mm. Allora si dirà che il valore vero sarà compreso fra 36 e 37 cm.

Si definisce, pertanto, un intervallo entro cui deve trovarsi il valore vero, scrivendo come risultato dell'operazione di misura

$$l=36,5 \pm 0,5 \text{ cm}$$

- **Errori casuali**: sono quegli errori dovuti a cause accidentali (circostanze ambientali), che influenzano la misura e rispecchiano l'intrinseca variabilità della natura di ogni grandezza fisica. Sono inevitabili e non determinabili a priori.

E' a causa di tali fluttuazioni che, se si ripete la misurazione della stessa grandezza un numero n di volte, purché si adoperino strumenti di buona sensibilità, si trovano risultati che, seppur di poco, sono fra loro diversi

La teoria degli errori è in grado di fornire informazioni solo sulle incertezze sperimentali di tipo statistico, ossia che emergono dalla ripetizione delle misure (errori casuali) e non sugli errori sistematici.

La trattazione statistica degli errori casuali si propone di rispondere ai seguenti quesiti:

a. Quale valore conviene attribuire alla misura di una grandezza fisica quando si dispone di più valori come risultato di più misure?
b. E' possibile stabilire, solo sulla scorta dei risultati ottenuti, di quanto il valore attribuito alla grandezza si discosta dal suo valore "vero"?
c. Quale analisi si può fare quando si dispone di un solo valore della grandezza?
d. Come si valuta l'errore da cui è affetta la misura di una grandezza fisica quando questa è effettuata in maniera indiretta, ossia mediante la misura di altre grandezze cui quella in esame è legata da una relazione matematica nota?
e. Quale analisi si deve effettuare quando si vogliono combinare misure effettuate con tecniche diverse o in laboratori diversi della stessa grandezza fisica?
f. Con quali criteri è possibile rigettare alcuni valori "anomali" dall'insieme di quelli di una serie di misure?

Per iniziare a rispondere ad alcuni di questi quesiti, bisogna analizzare come si distribuiscono i valori di una grandezza fisica al crescere del numero di misurazioni e della sensibilità dello strumento impiegato.

Alla dispersione dei valori misurati contribuiscono:

1) la dispersione dello strumento, cioè la non riproducibilità del funzionamento dello strumento (legata all'infinità di agenti fisici il cui effetto varia in maniera incontrollabile perturbando l'operazione di misura);
2) la dispersione della grandezza, che riflette la non riproducibilità intrinseca del suo valore (in principio riconducibile alla struttura microscopica della materia).

Anche se si avesse uno strumento infinitamente preciso e sensibile, ripetendo più volte le misure, si troverebbero valori diversi anche operando rigorosamente nelle stesse condizioni. I due effetti (dello strumento e della grandezza) appaiono indistinguibili all'osservatore, almeno fintanto che la sua unica informazione è la risposta di un singolo strumento. Nella maggior parte delle comuni operazioni di misura, comunque, il carattere intrinsecamente statistico delle grandezze fisiche non può essere evidenziato a causa della limitata sensibilità degli strumenti: spesso fluttuazioni macroscopiche quali quelle delle condizioni ambientali si sovrappongono alle fluttuazioni intrinseche mascherandole.
Il risultato di una misura assume il significato di uno degli infiniti valori di una grandezza soggetta a fluttuazioni casuali **(variabile casuale)**:

Il risultato di una misura non é una grandezza fissa caratteristica ma va considerato concettualmente come uno degli infiniti possibili valori che una grandezza, soggetta a fluttuazioni casuali, può assumere ripetendo, nelle identiche condizioni, lo stesso procedimento di misura

Curva di distribuzione di una variabile casuale

Si immagini di aver eseguito N misure del periodo di oscillazione di un pendolo semplice (lunghezza del filo di sospensione L = 1 m) mediante un cronometro.

Si possono verificare le seguenti condizioni a secondo della sensibilità del cronometro impiegato:

I° caso: sensibilità del decimo di secondo (ossia la minima variazione temporale osservabile è $\Delta t = 0{,}1$ s); è probabile che si ottenga quasi sempre un valore τ del periodo (diciamo 2,0 s).
Si osservi che per tale misura tutti i valori di τ tali che τ sia compreso nell'intervallo 1,95 s $<t<$ 2,05 s sono equiprobabili.

II° caso: sensibilità s=100 s^{-1} ($\Delta t = 0{,}01$ s); si ottenga un insieme di pochi valori diversi centrati attorno al valore 2, 01 s. I valori sono diversi poiché le variazioni dei tempi di reazione possono essere nell'ordine di alcuni centesimi di secondo.

III° caso: sensibilità al millesimo di secondo ($\Delta t = 0.001$ s), con registrazione automatica (di tipo ottico od elettrico) degli istanti di avvio ed arresto del cronometro; si ottenga un insieme di valori diversi, centrati intorno a t = 2,006 s; le variazioni intrinseche del periodo (dovute a variazioni di temperatura ambientale, densità ed umidità dell'aria, piccole vibrazioni nella struttura di sostegno del pendolo, etc.) sono ora dello stesso ordine di grandezza dell'errore di sensibilità e sono casuali.

Quest'ultimo caso mostra come, data una sensibilità sufficientemente elevata, ripetendo le misure si ottengano valori del periodo del pendolo diversi pur essendo l'apparato e le condizioni sperimentali immutati.

Se, per un numero di prove N elevato, si riportano i valori misurati su una retta, questi hanno una distribuzione con delle caratteristiche ben definite:

- ✓ *sono contenuti entro un intervallo ben riconoscibile;*
- ✓ *si addensano nella regione interna, dove capita che i valori siano ripetuti più volte;*
- ✓ *allontanandosi dalla regione centrale dell'intervallo, si diradano e difficilmente l'esperimento fornisce valori molto lontani;*
- ✓ *non è assolutamente prevedibile il risultato di una singola misura: le caratteristiche di cui sopra si riferiscono all'insieme dei risultati e non alla singola determinazione;*

Se la misura di una grandezza fisica rispetta queste caratteristiche si dice che il suo valore rappresenta una **variabile casuale**.

Si supponga di aver ottenuto n valori distinti in una serie di N misure (n ≤ N) con il cronometro a più alta sensibilità dell'esempio di cui sopra, ossia al millesimo di secondo. Si indichino con i_1, i_2,…i_n il numero di volte, cioè la frequenza di ripetizione, con cui sono stati trovati rispettivamente i valori τ_1, τ_2,…τ_n così che sia i_n la frequenza di ripetizione dell'n-esimo valore τ_n.
Riportando sulle ordinate i_1, i_2, ...e sulle ascisse τ_1, τ_2,..., si ottiene un **istogramma a barre.** In tabella i valori (t_j, i_j) relativi al caso N=85 misure del periodo τ.

Tabella 2-I

Valori del periodo e loro frequenza

n	t	i	f	n	t	i	f
1	2.002	1	0.0118	6	2.007	18	0.2118
2	2.003	0	0	7	2.008	8	0.0941
3	2.004	6	0.0706	8	2.009	2	0.0235
4	2.005	15	0.1765	9	2.010	0	0
5	2.006	35	0.4118				

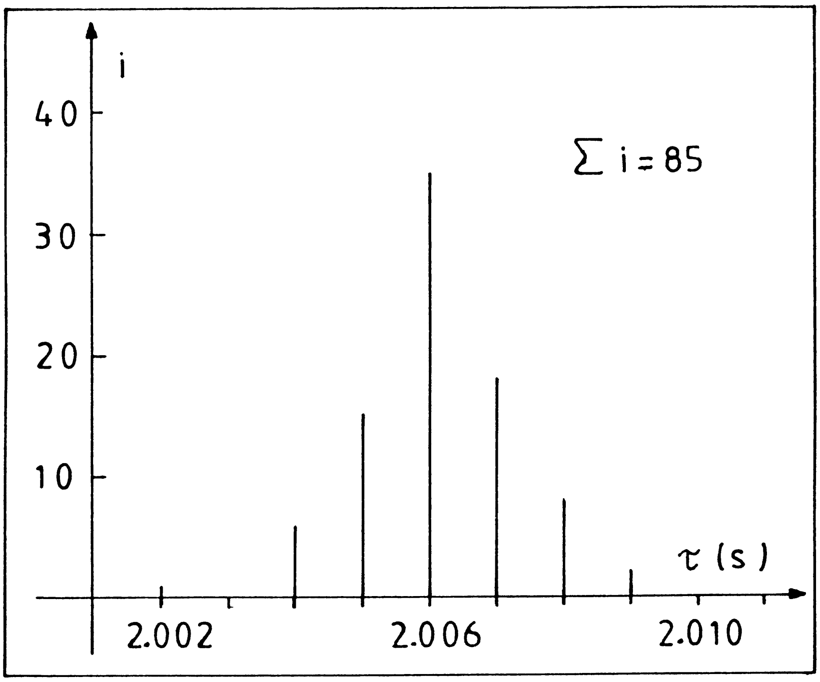


Figura 2.1: Istogramma a barre.

Se si immagina di eseguire altre serie di misure con diversi valori di N, si otterranno grafici simili nella forma (valori più frequenti di t nell'intervallo 2,005 s ÷ 2,007 s) ma di ampiezza differente.

Per poter confrontare più agevolmente i vari grafici conviene rendersi indipendenti da N, definendo le frequenze come $f_1 = i_1/N$, $f_2 = i_2/ N$, …$f_n = i_n/N$, ossia le frequenze relative rispettivamente ai valori τ_1, τ_2, …τ_n; riportando nel piano cartesiano i valori delle coppie (τ_j, f_j) si ottiene un istogramma a barre detto **distribuzione delle frequenze**.

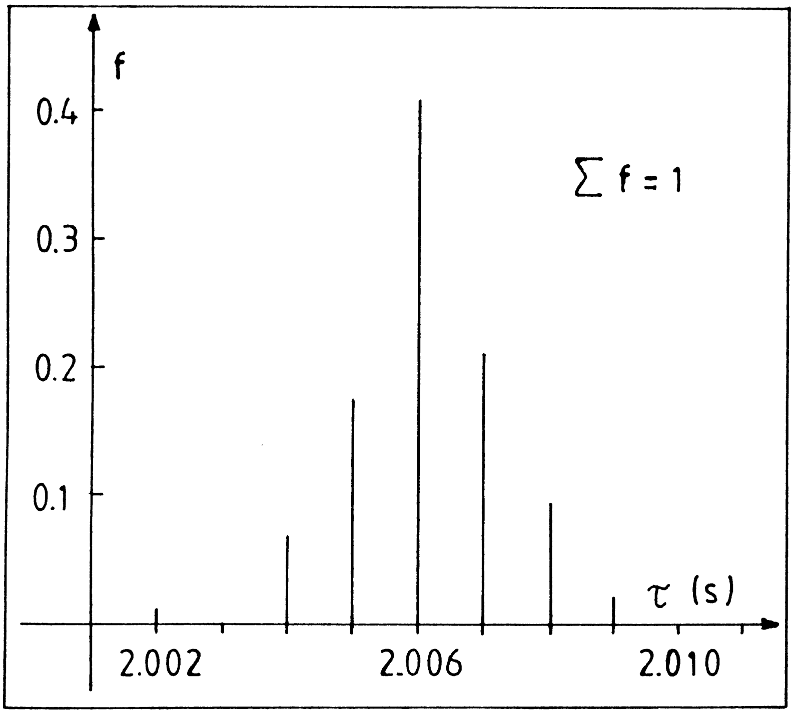


Figura 2.2: Istogramma a barre delle frequenze.

Mentre per il primo grafico valeva la condizione:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots i_n = N$$

per il secondo vale la condizione detta di normalizzazione:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1$$

Tale normalizzazione riduce la distribuzione ad una forma confrontabile rendendola indipendente, per esempio, dal numero N totale di misure effettuate

L'istogramma a barre non è una rappresentazione esauriente della distribuzione di una variabile casuale continua, come τ, che può assumere con continuità tutti i valori del semiasse positivo delle ascisse

- *E' solo a causa della sensibilità finita del cronometro che τ apparentemente assume valori discreti, che cioè variano della quantità $\Delta t = 0.001$ s*

Quindi, è più corretto assegnare la frequenza f_j non al singolo valore τ_j, ma a tutti i valori compresi nell'intervallo

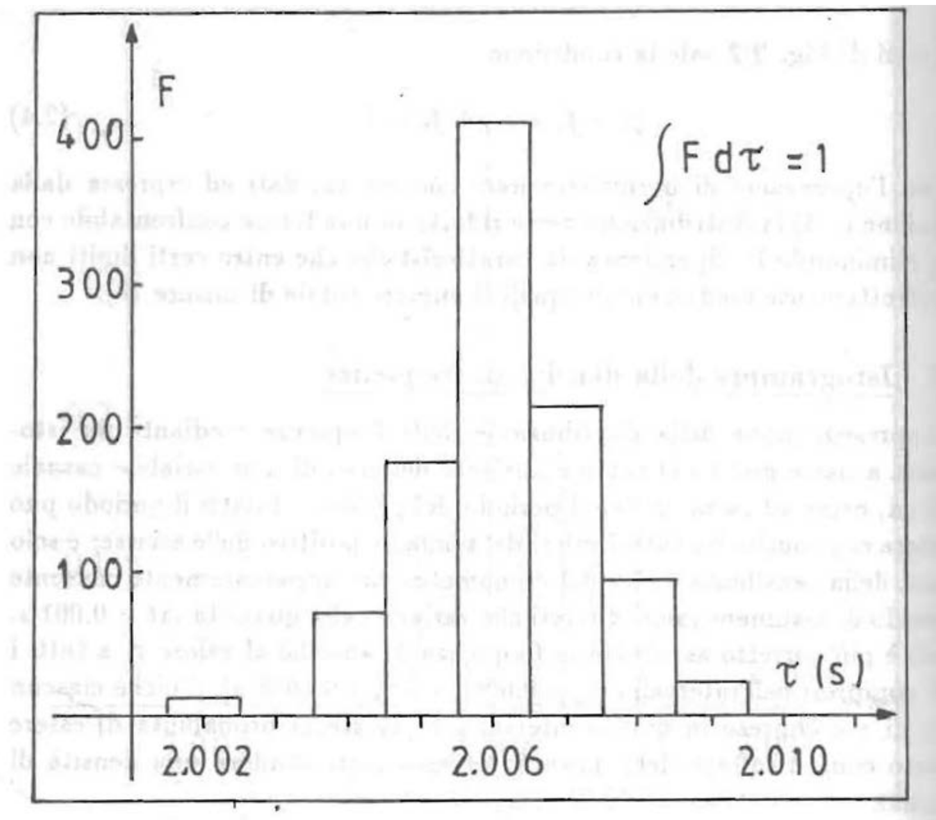
$$(\tau_j - 0{,}0005 \div \tau_j + 0.0005)\ \text{s}$$

Ciascun valore di τ compreso in tale intervallo ha la stessa probabilità di essere ottenuto come risultato della misura $\Rightarrow$ ad ogni intervallo j-esimo resta associata una **densità di probabilità**

$$F_j = f_j/\Delta t = s\, f_j$$

Pertanto, la distribuzione delle frequenze passa dall'essere una rappresentazione discreta (istogramma a barre) ad una rappresentazione continua mediante l'**istogramma ad intervalli**, in cui i valori delle densità di frequenza sono riportati in ordinate

Istogramma ad intervalli delle frequenze



La frequenza con cui il valore della misura cade in ciascun intervallo Δt è l'area del rettangolo avente come base l'intervallo stesso (essendo $f_j = F_j\ \Delta t$).

Inoltre, poiché vale la normalizzazione, *l'area totale sottesa dall'istogramma deve valere 1:*

$$\sum (F_j)\Delta t = 1$$

DISTRIBUZIONE LIMITE

Nella maggior parte degli esperimenti, se si aumenta il numero di misure, l'istogramma comincia ad assumere una forma ben definita, mantenendo una struttura a gradini; se, oltre ad aumentare N, si immagina di aumentare anche la sensibilità dell'apparato di misura, la spezzata a gradini tipica dell'istogramma tenderà a divenire una linea continua

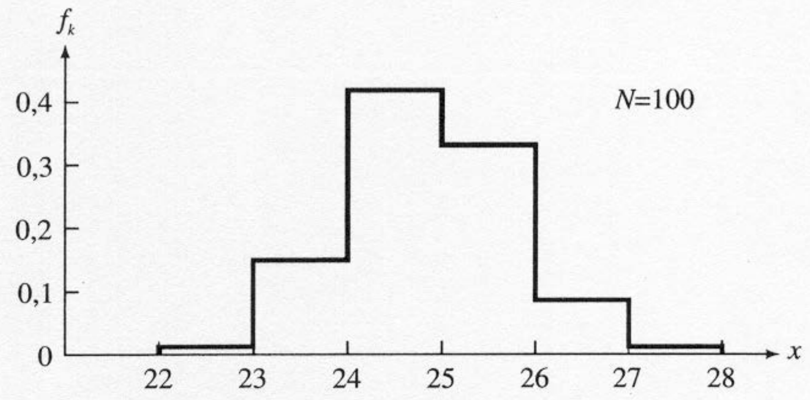


Figura 5.3. Istogramma per 100 misure della stessa grandezza di Figura 5.2.

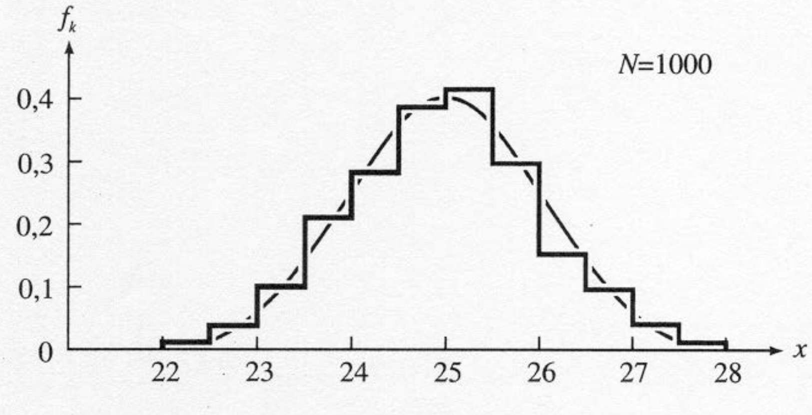


Figura 5.4. Istogramma per 1 000 misure della stessa grandezza di Figura 5.3. La curva tratteggiata è la distribuzione limite.

Vale una proprietà statistica delle misure secondo cui, quando il loro numero tende all'infinito, la distribuzione dei risultati delle misure si avvicina a una curva continua chiamata **distribuzione limite**.

- Tale distribuzione limite è una costruzione teorica, che non può mai essere misurata esattamente (occorrerebbero un numero infinito di misure con una strumentazione di sensibilità infinita)

- Si assume che le misure abbiano una distribuzione limite, alla quale la distribuzione sperimentale (istogramma) si avvicina sempre più all'aumentare del numero delle misure.

L'esistenza di tale distribuzione limite permette di asserire che, al crescere del numero N di misure, la forma di ciascuna distribuzione varia sempre meno assestandosi su una distribuzione ben precisa, e che la forma verso cui ciascuna distribuzione tende ad assestarsi è identica per tutte.

Ne segue che il valore della frequenza di un risultato che si ottiene per N crescente è indipendente dalla particolare serie di misure ed è chiamato la probabilità del risultato, e la distribuzione delle frequenze per N che diventa sempre più grande tende alla distribuzione delle probabilità:

- Esistono altre definizioni di probabilità di un evento. In questo contesto essa rappresenta il limite cui tende la frequenza al crescere indefinito del numero di prove
- Il supporto teorico di questa affermazione deriva dal teorema di Bernouilli ("legge dei grandi numeri") secondo cui la probabilità che la frequenza di un evento si discosti dalla probabilità per meno di una quantità ε (prefissata e piccola a piacere) tende a 1 al crescere del numero N di prove

La distribuzione limite rappresentata dalla linea continua P(x) (dove x ha sostituito τ per indicare il caso più generico rispetto alla misura del periodo τ del pendolo) fornisce la densità di probabilità e non la probabilità: la densità di frequenza tende alla densità di probabilità per N →∞, ossia la probabilità di ottenere, in seguito ad una misura, un valore compreso nell'intervallo x ±Δx/2 è data da P(x) Δx

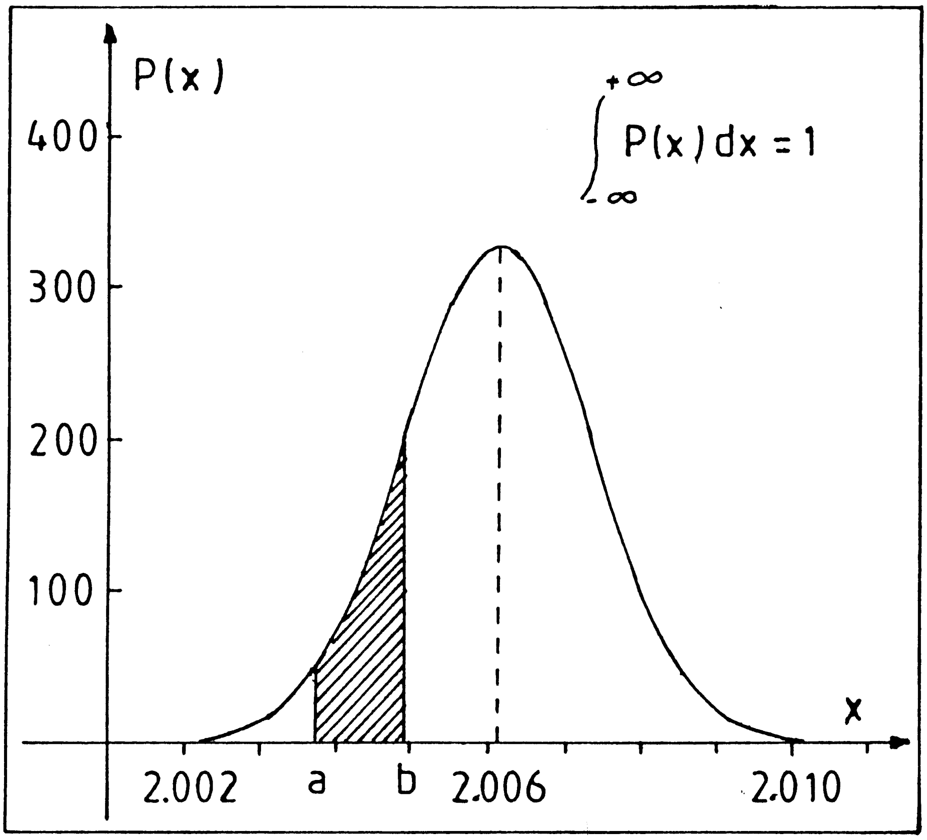


Figura 2.4: Distribuzione della densità di probabilità.

Un'importante proprietà di questa funzione limite è che essa è simmetrica rispetto al massimo. Un'altra proprietà è che l'area sottesa ha valore unitario.

Ciò equivale a dire che debba essere la certezza (ossia probabilità uguale ad 1) che il risultato di una misura cada nell'intervallo compreso tra - ∞ e + ∞

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Questa espressione è analoga alla somma normalizzata per la frequenza F_k, per cui una funzione $f(x)$ che soddisfi questa relazione si dice **normalizzata**.
Una distribuzione limite definisce una funzione $f(x)$: tenendo conto che la curva limite $f(x)$ rappresenta l'istogramma, la frazione di misure che cadono in un qualunque piccolo intervallo compreso tra x e $x + dx$ è uguale all'area $f(x)dx$ della striscia ombreggiata in figura:

$$f(x)dx = \text{frazione di misure che cadono tra } x \text{ e } x + dx \tag{5.10}$$

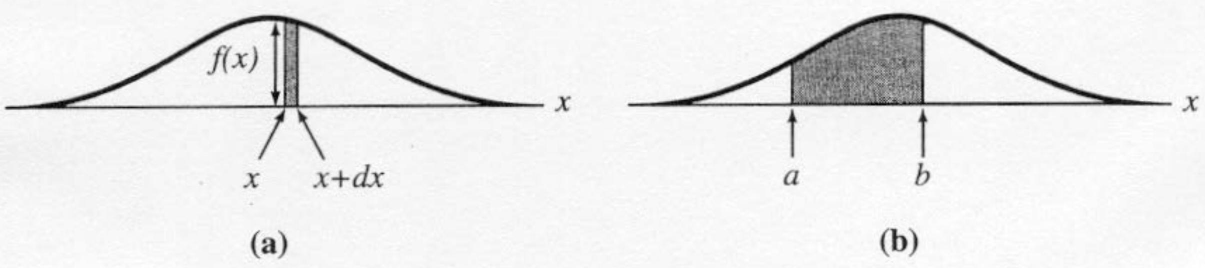


Figura 5.5. Una distribuzione limite $f(x)$. (**a**) Dopo molte misure la frazione che cade fra x e $x + dx$ è l'area della stretta striscia. (**b**) La frazione che cade fra $x = a$ e $x = b$ è l'area ombreggiata.

Più in generale, vale la relazione

$$\int_a^b f(x)dx = \quad \text{frazione di misure che cadono tra } x = a \text{ e } x = b$$

Se si fa uso del significato di probabilità (rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento e il numero di casi possibili, purché tutti i casi considerati siano ugualmente probabili), si può affermare che:

$$f(x)dx = \quad \text{probabilità che una misura dia un risultato compreso fra } x \text{ e } x + dx$$

Si tenga presente che, se la misura che si considera è molto precisa, tutti i valori ottenuti saranno molto vicini al valore reale di *x*, così l'istogramma dei risultati, e quindi la distribuzione limite, saranno stretti e con un picco ben marcato, come indicato in figura. Se la misura è di bassa precisione, allora i valori trovati saranno sparpagliati e la distribuzione sarà larga e bassa, come la curva tratteggiata.

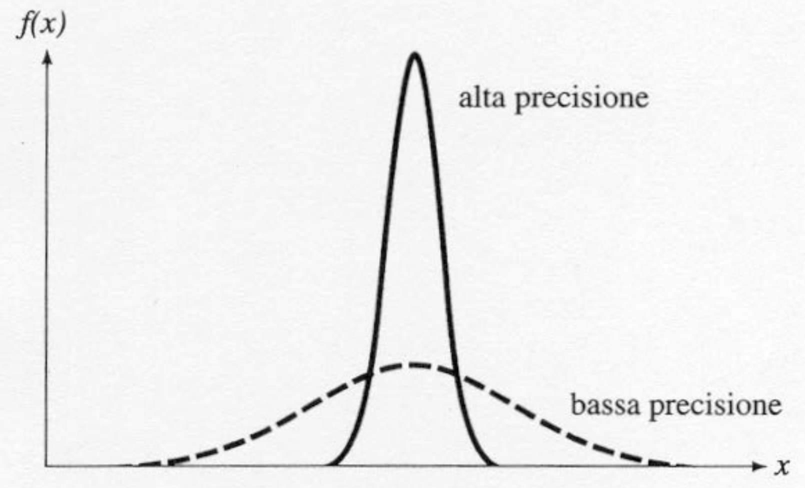


Figura 5.6. Due distribuzioni limite, una per una misura ad alta precisione, l'altra per una misura a bassa precisione.

Riepilogando:

- *La **distribuzione limite** è una costruzione **puramente teorica**, sperimentalmente inottenibile*
    - *Numero di misure N $\rightarrow \infty$*
    - *Sensibilità dello strumento $\rightarrow \infty$*
- ***Al crescere di N,** la forma di ogni distribuzione varierà sempre meno, assestandosi su una distribuzione ben precisa (**distribuzione limite**), la cui forma è identica per tutte le distribuzioni sperimentali*
- *Il valore della frequenza di un risultato che si ottiene per N crescente è indipendente dalla particolare serie di misure ed è chiamata **probabilità** del risultato*
- *Ciò è supportato teoricamente dal teorema di Bernoulli o **legge dei grandi numeri***

*La **distribuzione limite** rappresentata dalla curva continua P(x) fornisce la **densità di probabilità** legata ai risultati della misura*

- *per N $\rightarrow \infty$, la densità delle frequenze tende alla densità di probabilità*
- *P(x) non rappresenta la probabilità di ottenere il valore x della grandezza ma la sua densità di probabilità*

La probabilità di ottenere un valore della misura compreso fra a *e b è data da:*

$$p = \int_a^b P(x)dx$$

Questa distribuzione limite è nota come *distribuzione di Gauss* o *distribuzione normale.*

Diversi tipi di misure hanno diverse distribuzioni limite: la distribuzione che descrive i risultati dell'osservazione di un numero di eventi distribuiti a caso nel tempo, ma con una media temporale ben definita, come nel caso del conteggio delle particelle dovute al decadimento radioattivo di nuclei instabili, è detta distribuzione di Poisson

DISTRIBUZIONE DI GAUSS

Si può dimostrare che, se una misurazione è soggetta a molte piccole sorgenti di errori casuali (intesi come differenza fra il valor "vero" X della grandezza ed i valori misurati x) e a errori sistematici trascurabili, i valori misurati saranno distribuiti su una curva a campana, e questa curva sarà centrata, come in figura, sul valore vero di *x*, assunto come quel valore al quale ci si avvicina, facendo più e più misure, sempre più accuratamente[1].

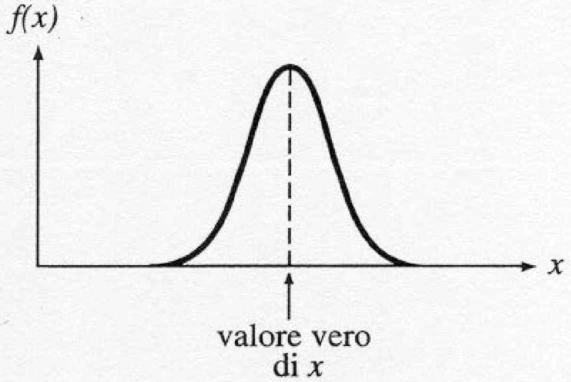


Figura 5.7. La distribuzione limite per una misura che è soggetta a molti piccoli errori casuali. La distribuzione ha la forma di una campana ed è centrata sul valore vero della grandezza misurata x.

E' possibile dimostrare che tale distribuzione limite P(x) è descritta dalla **funzione di Gauss:**

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

Questa rappresenta una curva simmetrica e centrata sul valore sul valore $x = X$ dove la funzione assume il valore 1.

[1] Se, invece, le misure hanno errori sistematici apprezzabili, allora non ci si deve aspettare che la distribuzione limite sia centrata sul valore "vero".

La funzione di Gauss è, pertanto, la distribuzione limite dei risultati in una misura (soggetta soltanto ad errori casuali) della grandezza *x* il cui valore vero è *X*.

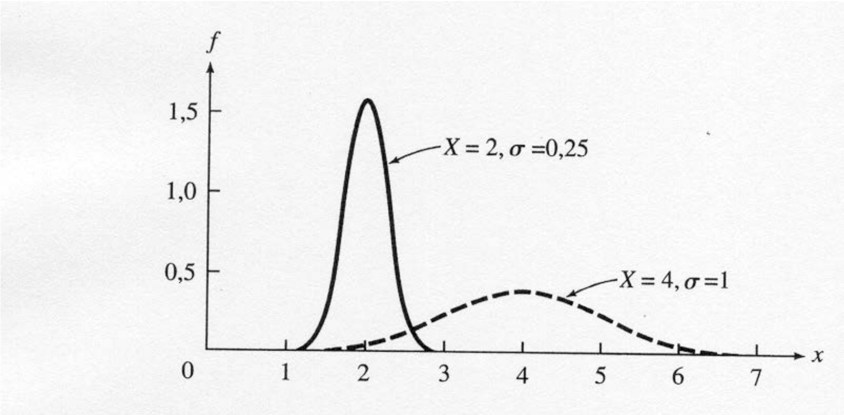
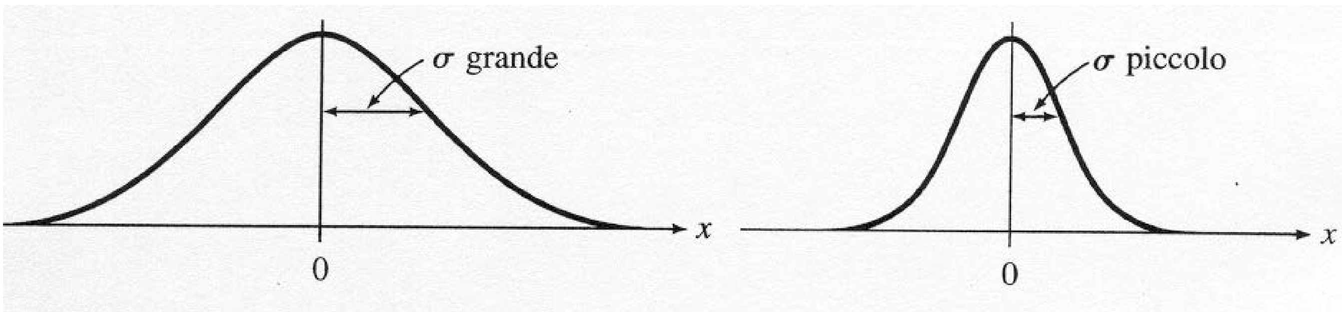


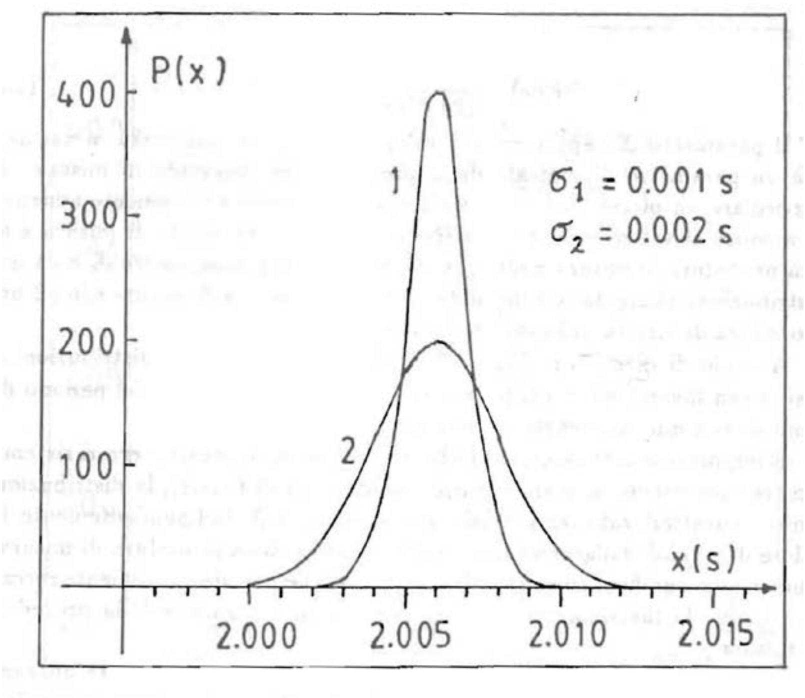
Figura 5.10. Due distribuzioni normali, o di Gauss.

Il parametro σ dipende dalla precisione dell'apparato di misura.

A piccoli valori di σ corrispondono curve strette, ossia distribuzioni fortemente addensate intorno al valore x = X, che a loro volta corrispondono ad una misura molto precisa, mentre per valori grandi di σ la distribuzione si allarga, il che corrisponde ad un apparato di misura e/o ad una procedura di misura poco precisi.



Nella figura in basso sono rappresentate due distribuzioni di Gauss con valori diversi del parametro σ ottenute eseguendo misure del periodo di un pendolo con due cronometri di diversa sensibilità.



Va sottolineato che (sempre nell'ipotesi che non ci siano errori sistematici, il cui effetto è lo spostamento della curva di Gauss) la distribuzione limite sarà caratterizzata sempre dallo stesso valore di X, indipendentemente dal valore di σ ossia dalla precisione con cui è stata effettuata la misura.
Dalla condizione di normalizzazione che ogni distribuzione limite $f(x)$ deve soddisfare, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

discende il termine che compare nella funzione di Gauss, che ne rappresenta il fattore di normalizzazione:

$$N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Il valor medio della variabile casuale x coincide con X: infatti, dalla definizione di valore medio x_m di una distribuzione di valori discreti:

$$x_m = \frac{(i_1 x_1 + i_2 x_{21} + \cdots + i_{n1} x_n)}{N} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots f_n x_n$$

Si può, poi, dimostrare che tale valore diventa, nel caso di una distribuzione continua:

$$x_m = \int x\, P(x) dx$$

dove l'integrale s'intende esteso su tutto l'intervallo su cui è definita la funzione di distribuzione P(x).

Nel caso della distribuzione di Gauss, il risultato è:

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma}} \int_{-\infty}^{*\infty} x e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

la cui soluzione dà x_m = X, cioè, se le misure sono distribuite secondo la distribuzione di Gauss, dopo molte prove il valore medio è il valore vero, su cui la funzione di Gauss è centrata.