

# Cinematica

# Cinematica del punto materiale

- Studia il moto dei corpi senza riferimento alle sue cause
- Il moto è completamente determinato se e` nota la posizione del corpo in funzione del tempo
- Necessita` di un sistema di riferimento per determinare la posizione
- Diversi tipi di sistemi di riferimento:
  - Cartesiano (2 e 3 dimensioni):  $x, y, z$
  - Polare (2 dimensioni):  $\rho, \phi$
  - Sferico (3 dimensioni):  $r, \theta, \phi$

# Cinematica

- Ogni coordinata è funzione del tempo → legge oraria:
  - $x(t), y(t), z(t)$
  - $\rho(t), \phi(t)$
  - $\rho(t), \phi(t), z(t)$
  - $r(t), \theta(t), \phi(t)$
- Traiettoria: e` il luogo dei punti dello spazio occupati dal corpo nei successivi istanti di tempo
  - Da` informazioni di tipo geometrico, senza riferimento al tempo, NON VI CONFONDETE

# Traiettoria e legge oraria

- Il moto dei pianeti nel campo di gravita` del sole si svolge lungo la seguente traiettoria o orbita (1<sup>a</sup> legge di Keplero):

$$\rho = \frac{l}{(1 + e \cos \phi)}$$

- Questa e` una funzione  $\rho(\phi)$  e rappresenta una relazione puramente geometrica tra le coordinate  $\rho$  e  $\phi$ : quale?
- Nulla sappiamo sulle leggi orarie  $\rho(t)$ ,  $\phi(t)$

$$l = \frac{L^2}{Gm_T m_S \mu} \cong \frac{L^2}{Gm_T m_S^2}$$

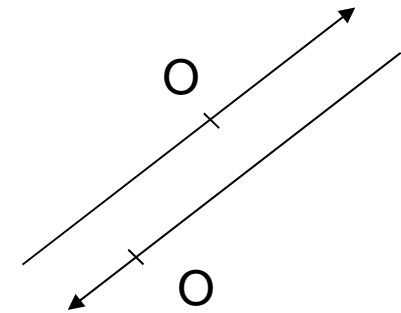
$$e^2 \cong 1 + m_S \frac{E}{L^2} l^2$$

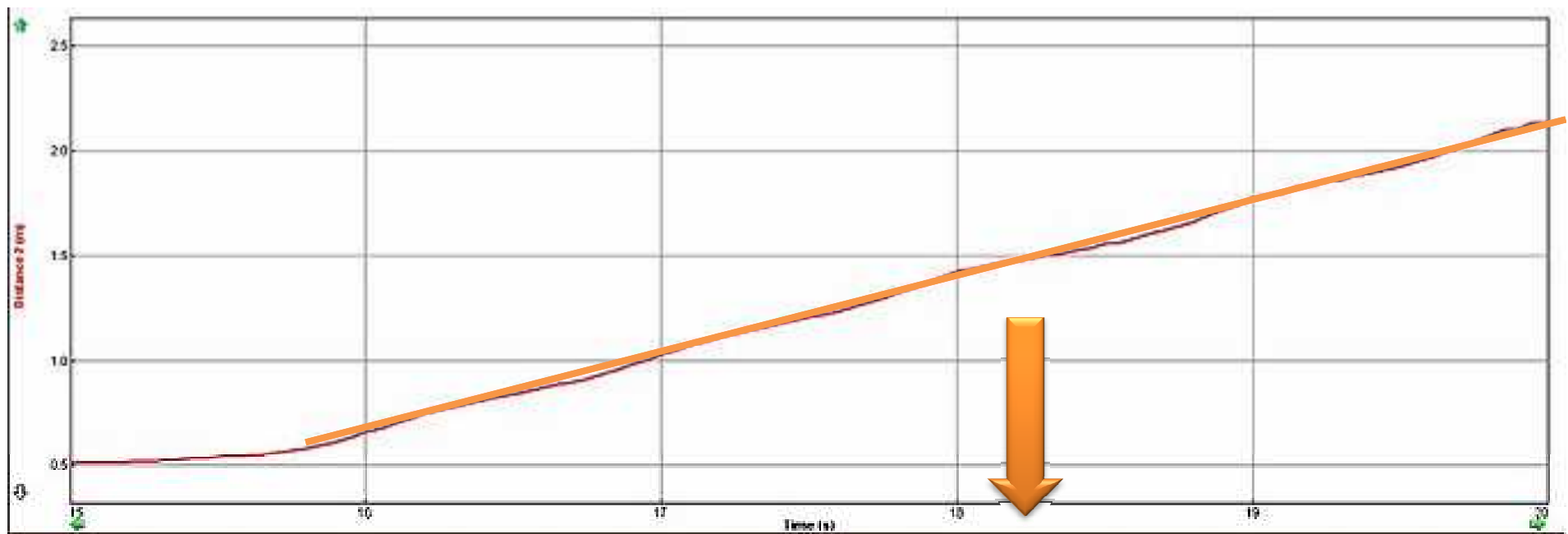
# Cinematica

- Le grandezze fisiche necessarie per lo studio della cinematica sono
  - Spazio –  $s, l, x, r...$
  - Tempo -  $t$
  - Velocità -  $v$
  - Accelerazione -  $a$

# Moto rettilineo

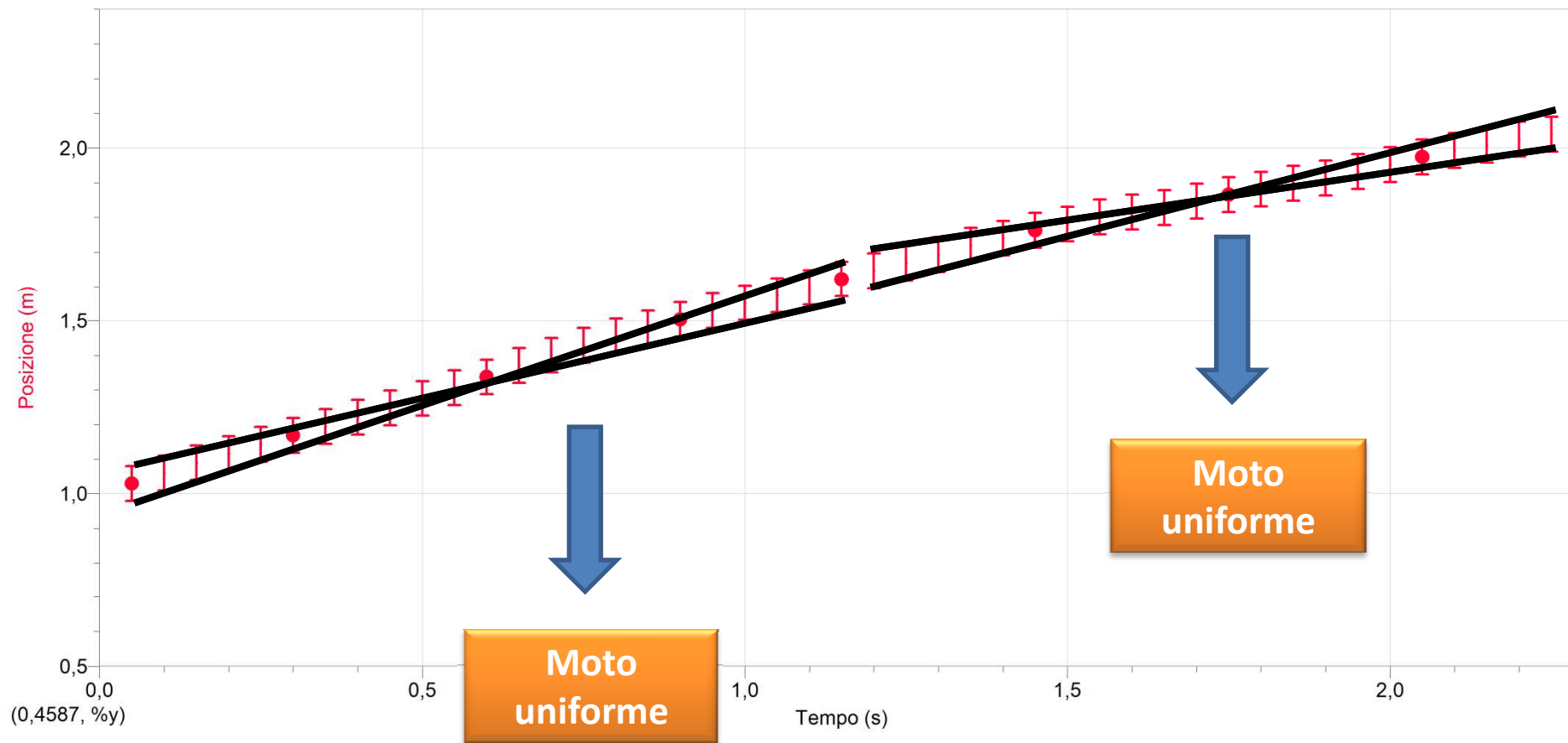
- Si svolge lungo una retta su cui si definisce la coordinata  $x$ , la cui origine ( $x=0$ ) e il cui verso sono arbitrari
- Anche l'origine dei tempi ( $t=0$ ) e' arbitraria
- Il moto del corpo e' descrivibile con una sola funzione  $x(t)$
- La funzione puo' essere rappresentata sul cosiddetto diagramma orario, sul cui asse delle ascisse poniamo  $t$  e su quello delle ordinate  $x$



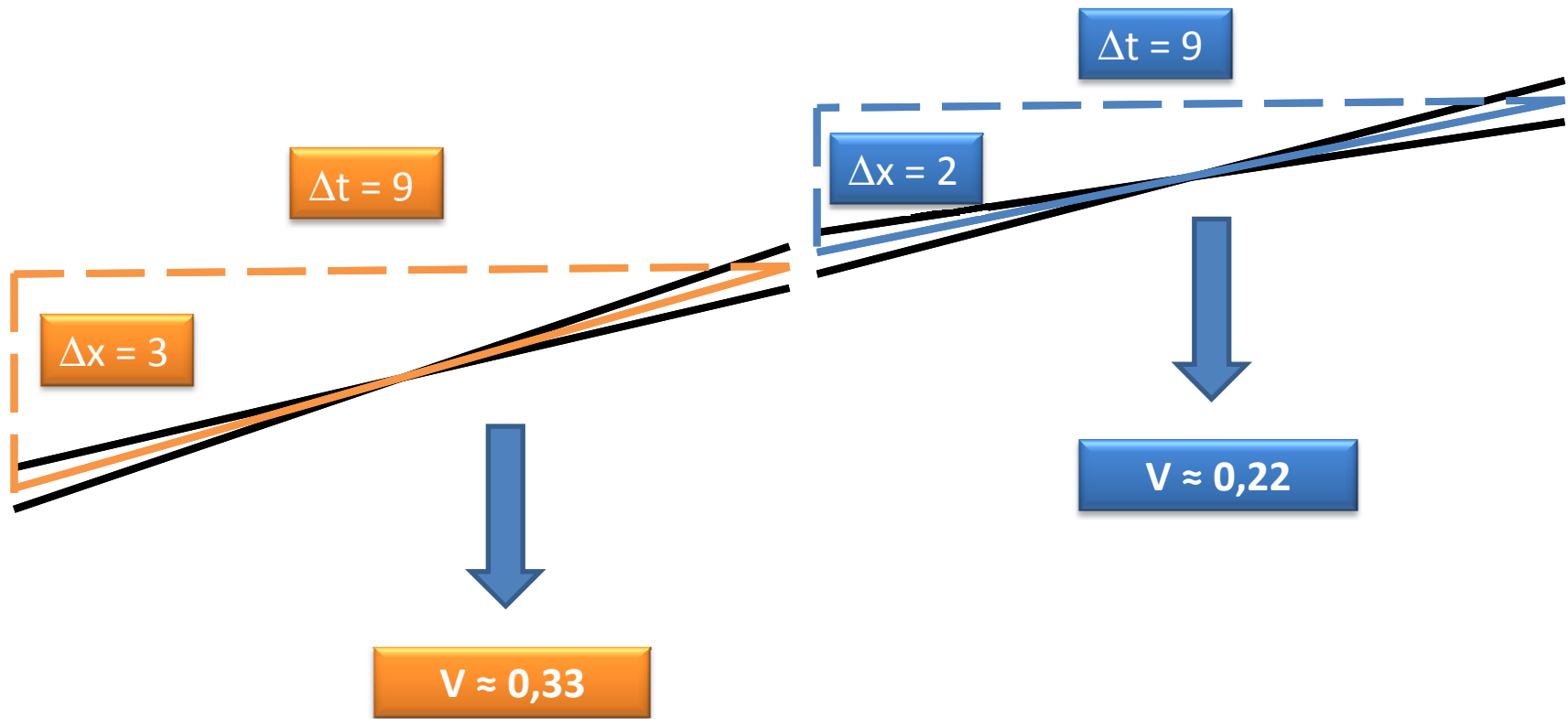


Pendenza = costante =  
moto uniforme

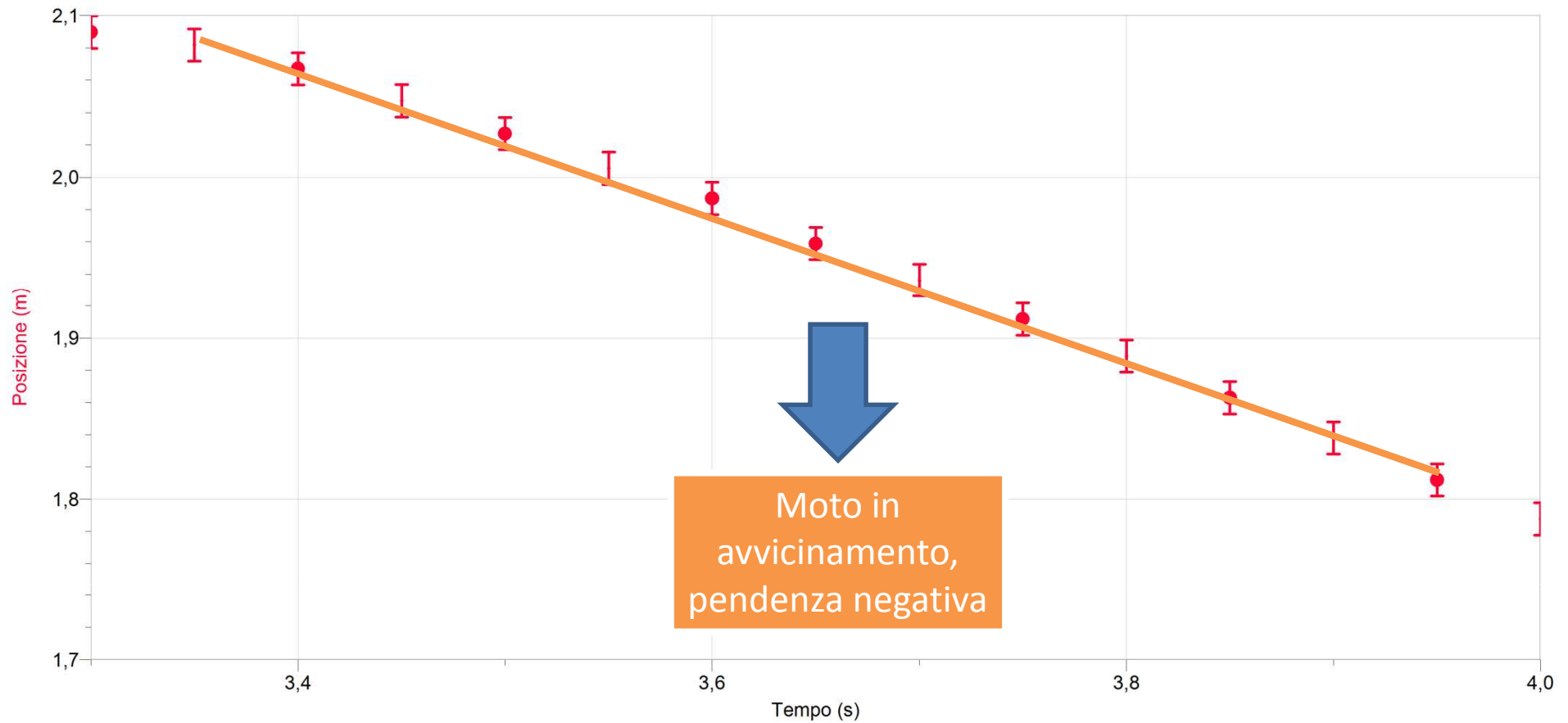
Come si sta muovendo una persona se la sua posizione varia in funzione del tempo come in figura?



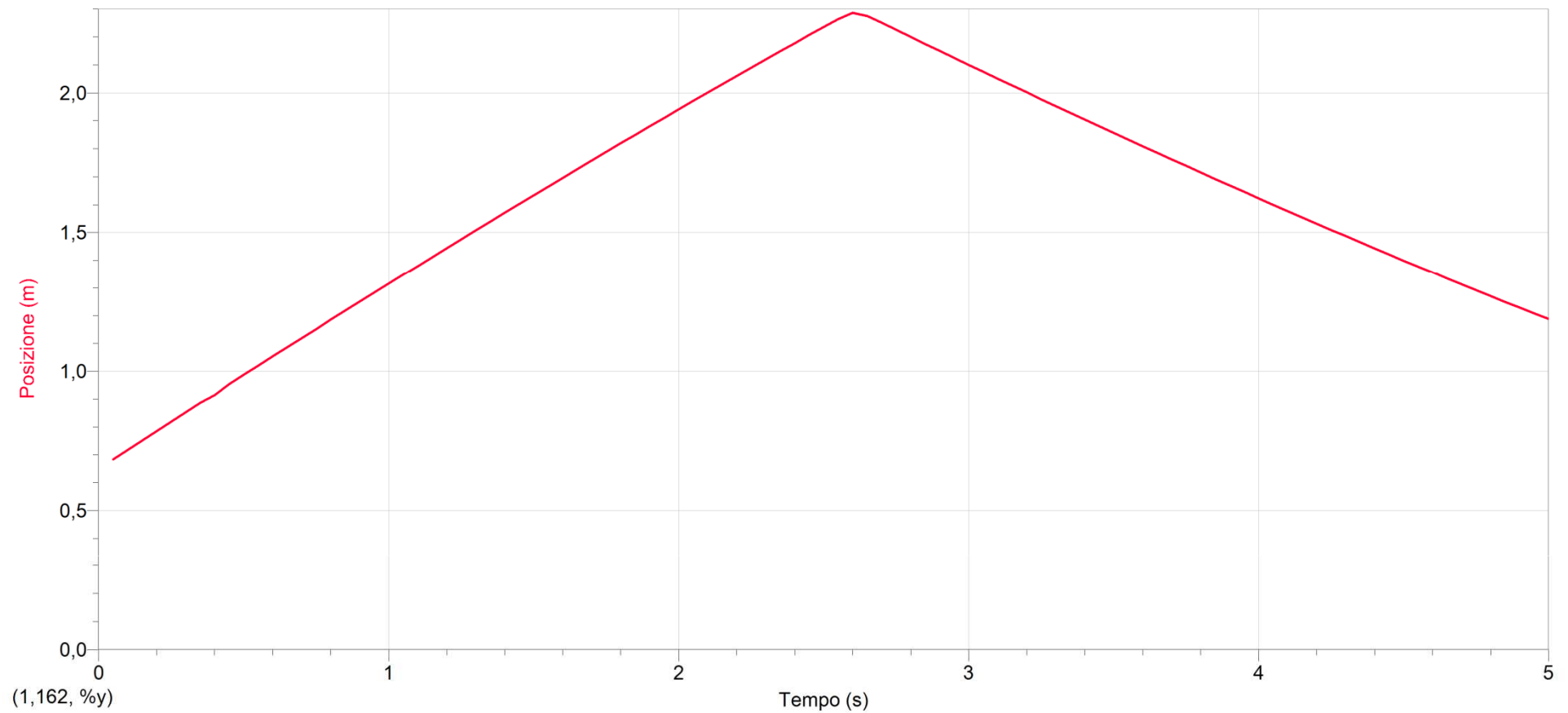
Come si sta muovendo una persona se la sua posizione varia in funzione del tempo come in figura?



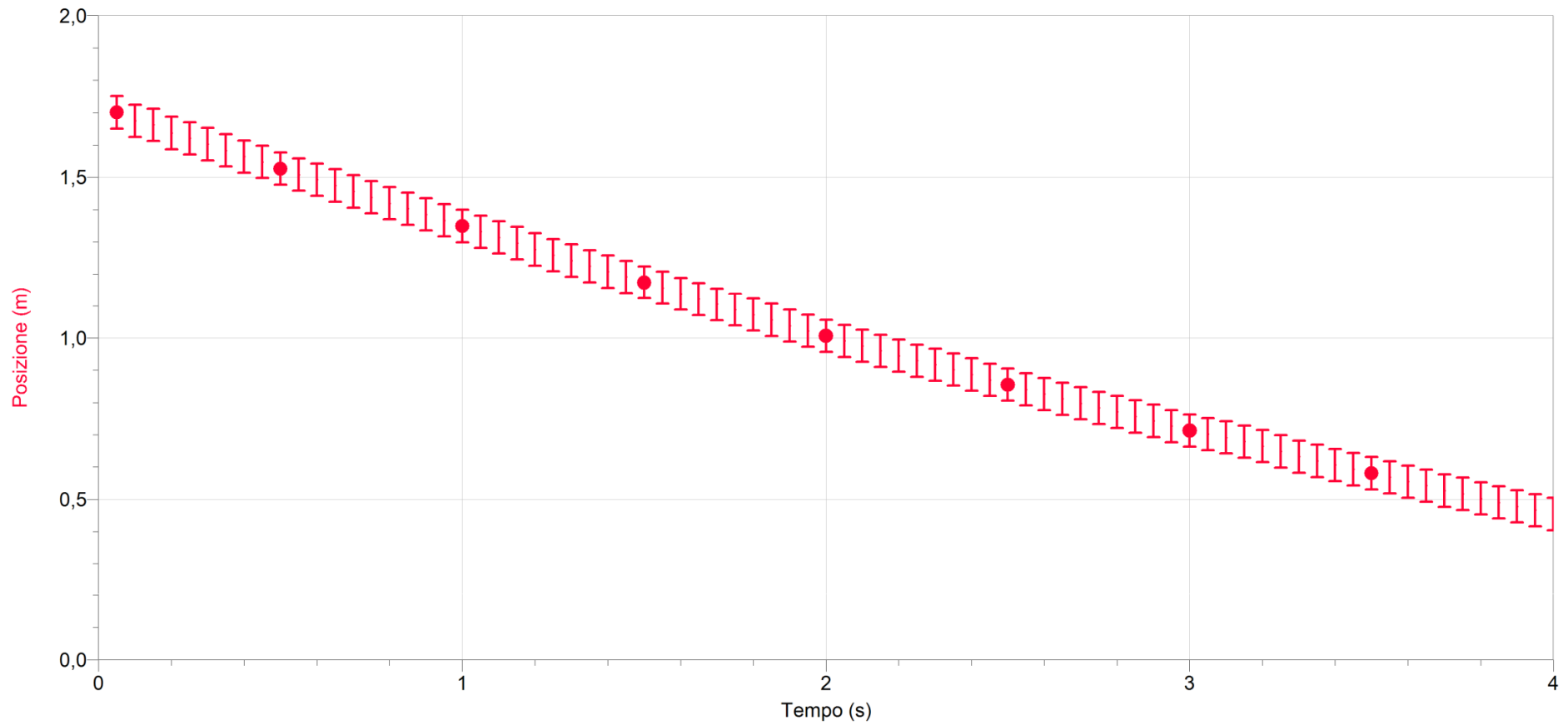
Rallenta!



Come si sta muovendo una persona se la sua posizione varia in funzione del tempo come in figura?



Come si sta muovendo un carrello se la sua posizione varia in funzione del tempo come in figura?



Qual è la velocità del carrello la cui posizione varia nel tempo come mostrato in figura  
Farne un grafico qualitativo

# Velocita`

- Dato un moto rettilineo, supponiamo che il corpo si trovi nella posizione  $x_1$  al tempo  $t_1$  e nella posizione  $x_2$  al tempo  $t_2$
- Lo spostamento e` la differenza delle posizioni:  $\Delta x = x_2 - x_1$
- L'intervallo di tempo in cui avviene lo spostamento e`:  $\Delta t = t_2 - t_1$
- La velocita` media e`, per definizione, il rapporto:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

# Velocita`

- Immaginiamo di considerare intervalli di tempo sempre piu` piccoli  $\rightarrow$  l'intervallo di tempo tende a zero
- La velocita` istantanea è, per definizione, il limite:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

- ovvero la derivata dello spazio rispetto al tempo
- Se  $v =$  costante, il moto (rettilineo) è detto uniforme

# Relazioni tra posizione e velocità

- Poiché:

- $$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad dx = v(t)dt$$

- La relazione inversa è la relazione *integrale*

$$\int_{x_0}^x dx = x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t)dt$$

- Utile se è nota la dipendenza di  $v$  da  $t$
- $x - x_0$  rappresenta lo **spostamento complessivo**, cioè la somma algebrica degli spostamenti e non lo **spazio percorso** che è invece la somma del modulo degli spostamenti

# Relazione tra velocità media e istantanea

- Dalla definizione di velocità media e dalla relazione integrale tra posizione e velocità istantanea:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

- la velocità media è il valor medio della velocità istantanea

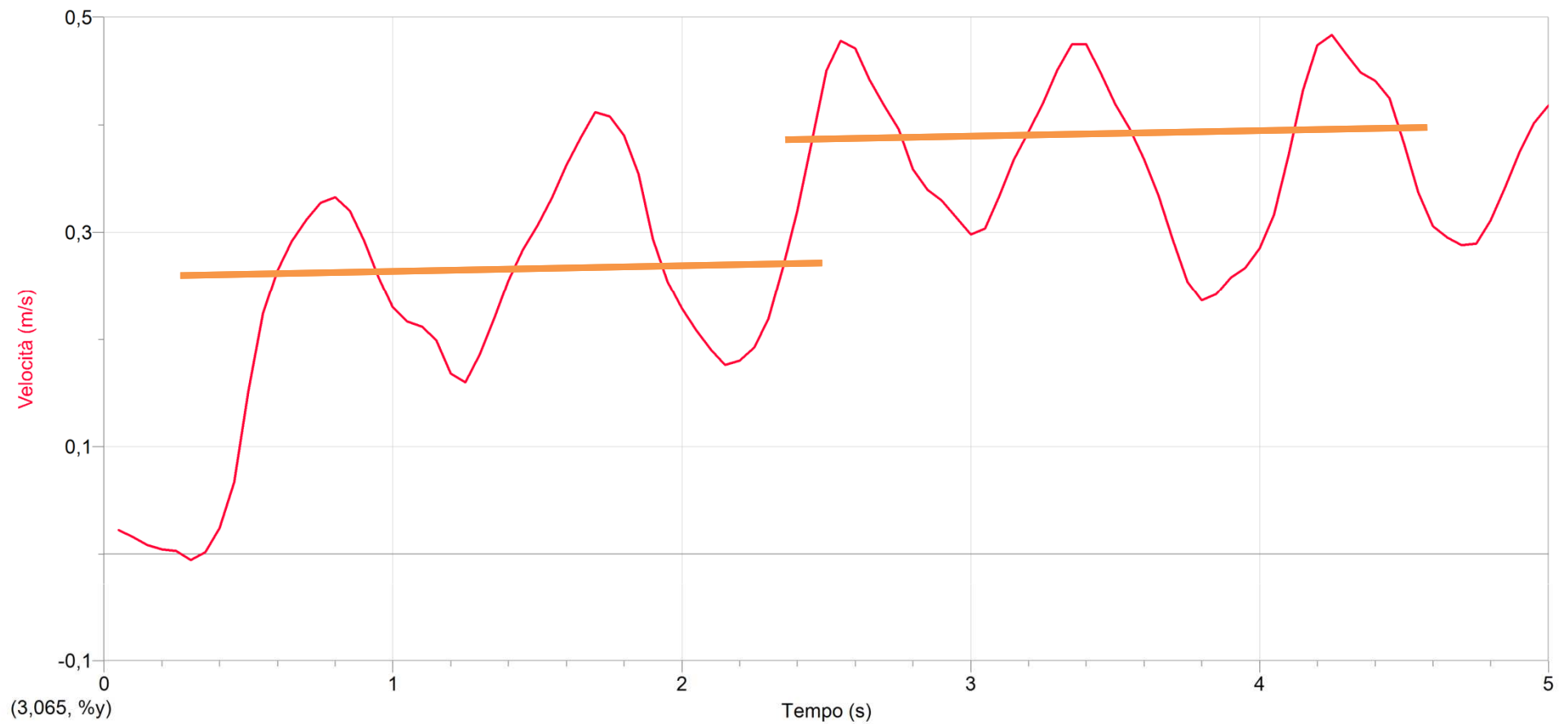
# Moto rettilineo uniforme

- $v$  è costante nel tempo

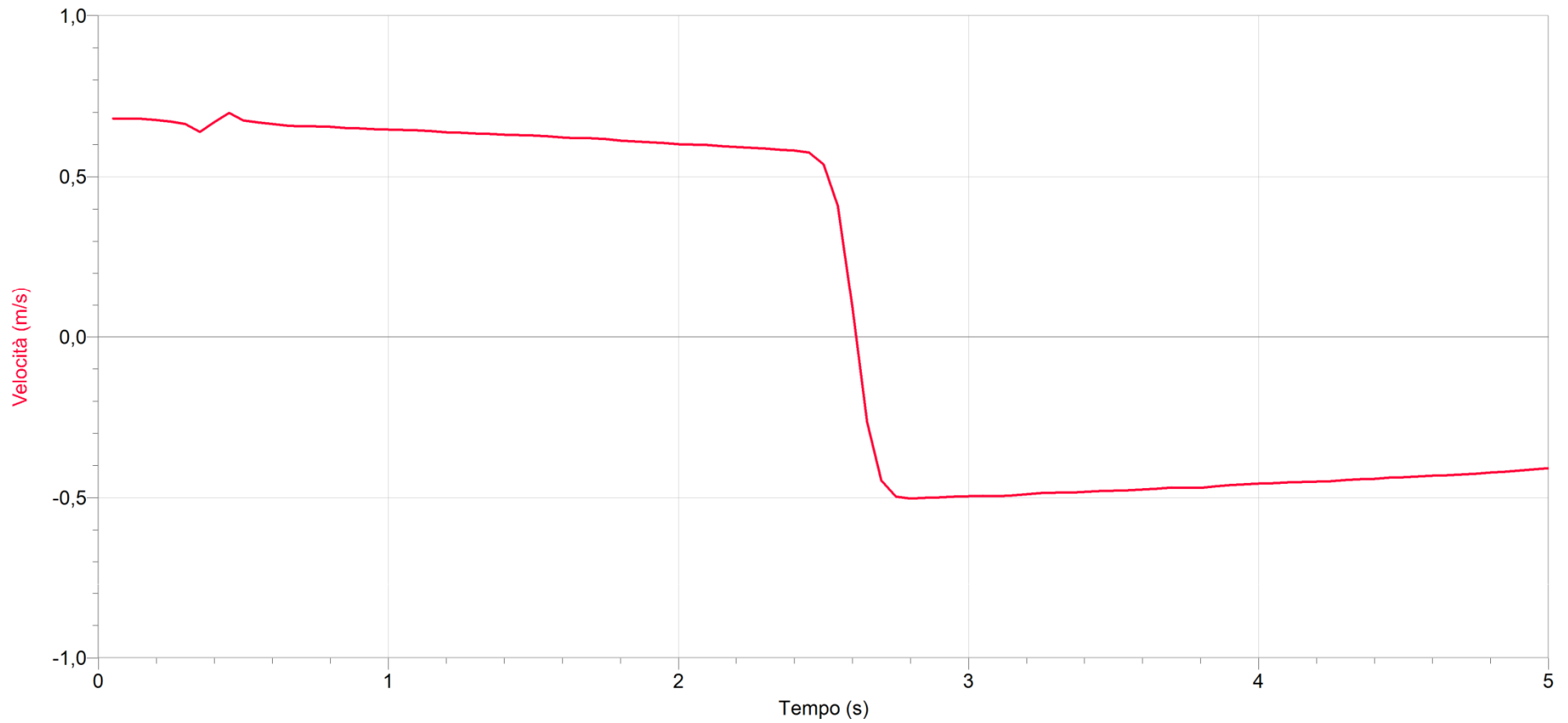
$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0)$$

- Solo per questo moto, la velocità istantanea è uguale alla velocità media:

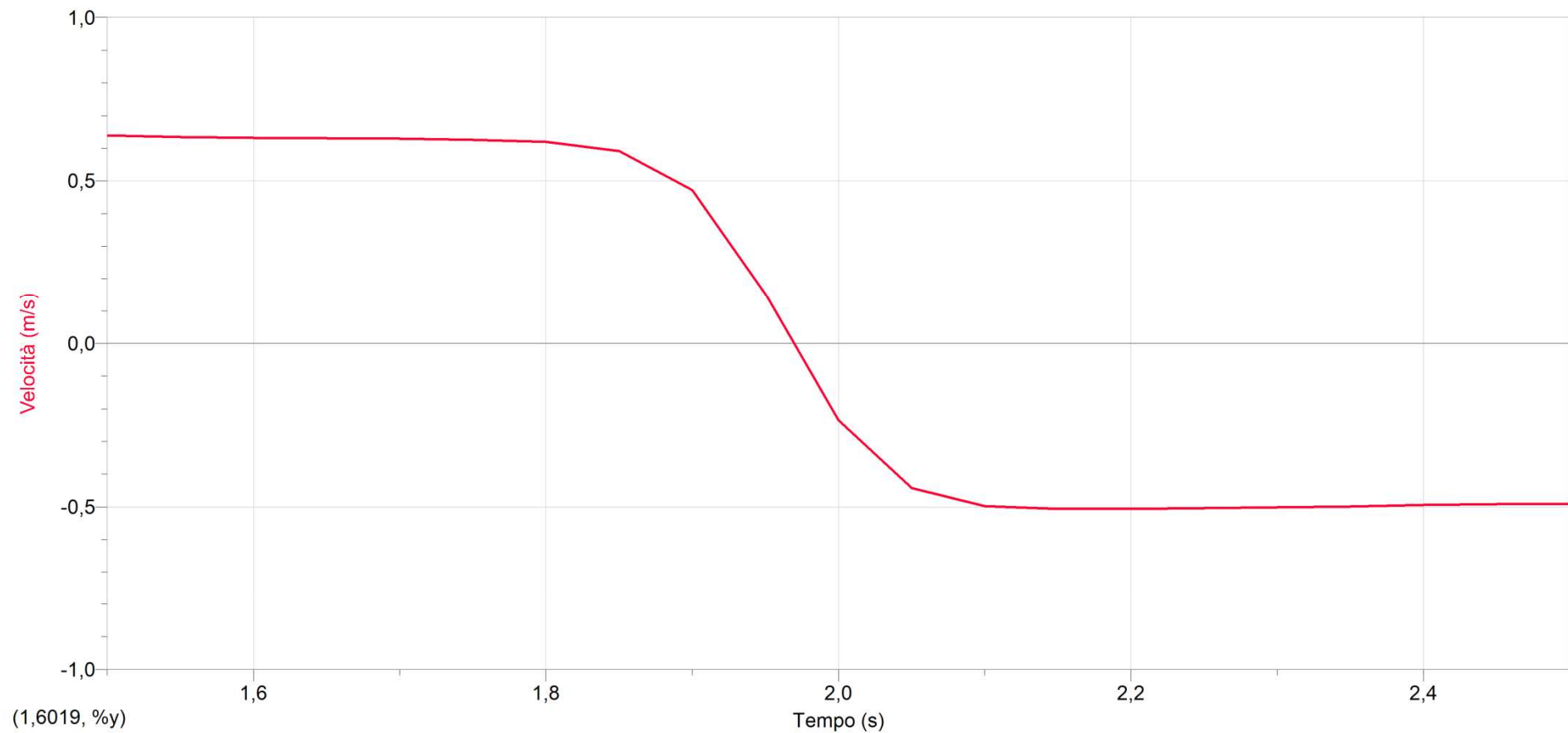
$$v(t) = v_m$$



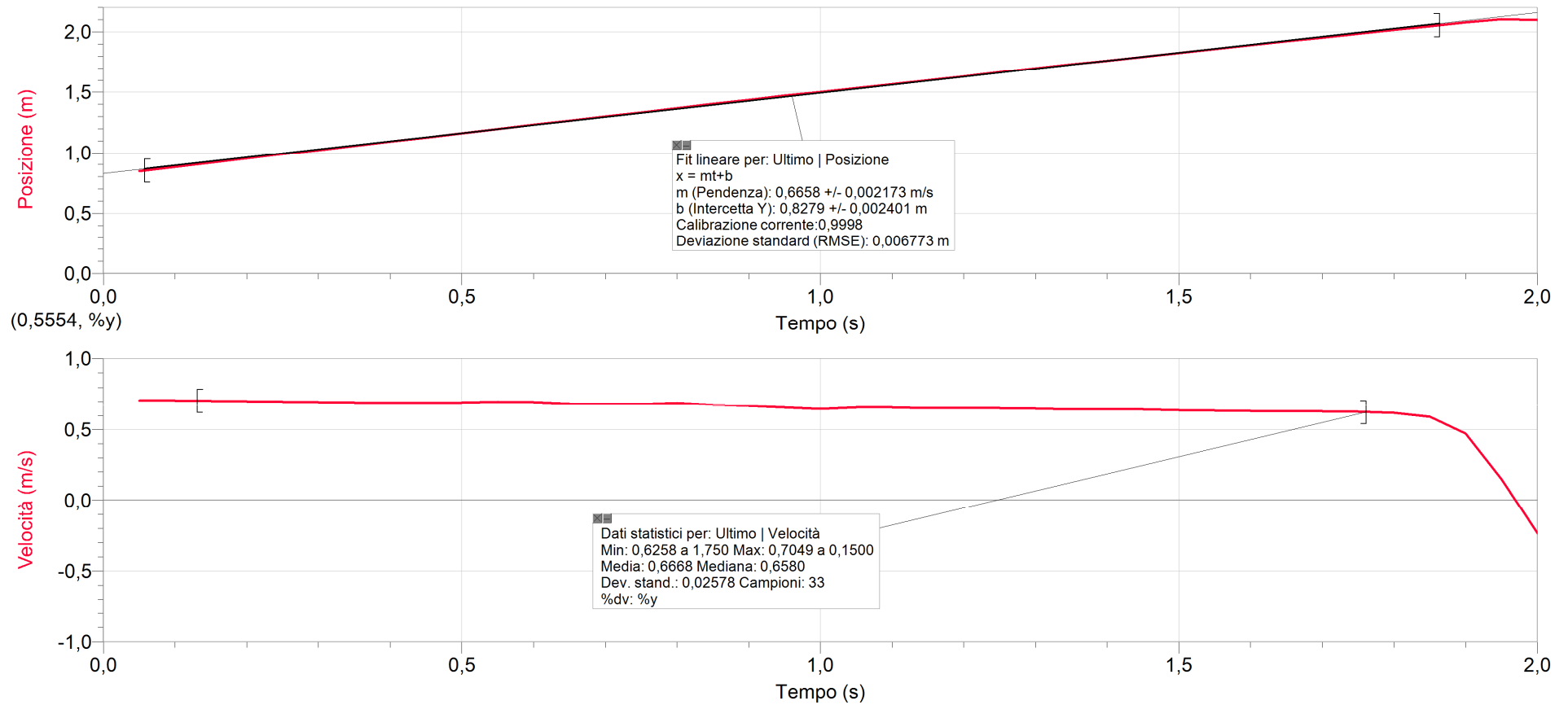
Come si sta muovendo una persona se la sua velocità varia in funzione del tempo come in figura?



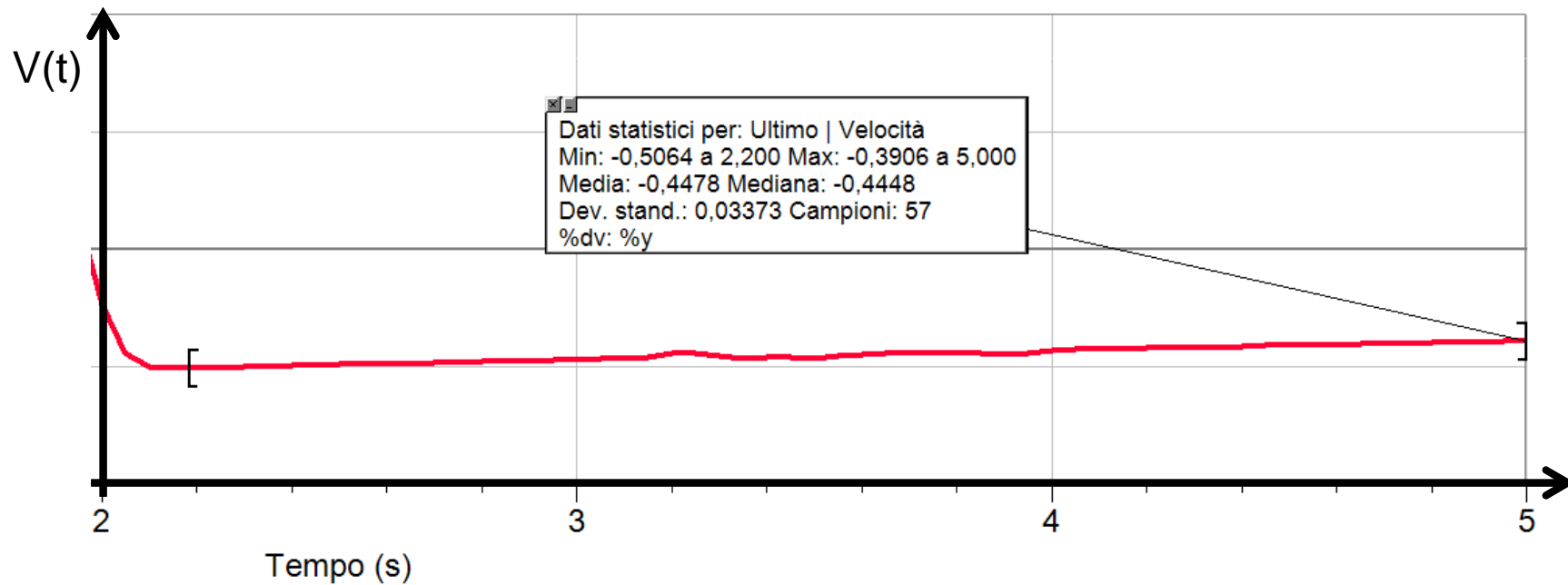
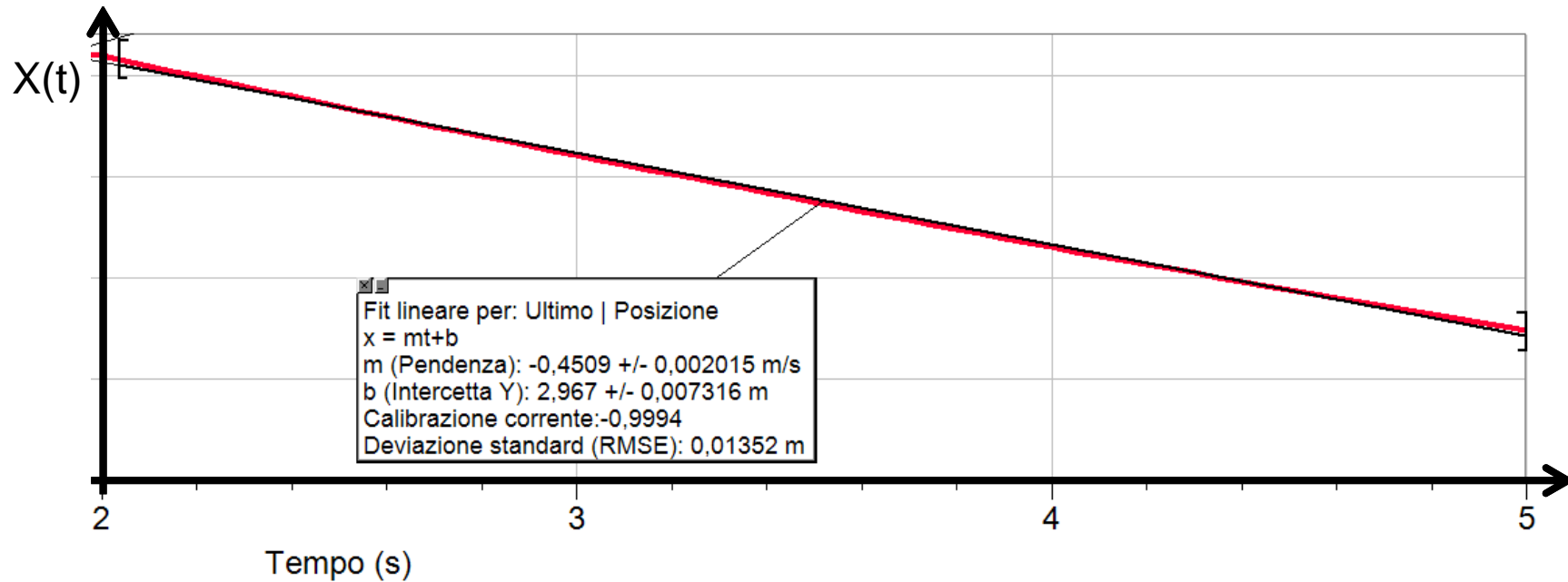
Descrivere a parole come si è mosso il carrello la cui velocità varia nel tempo come in figura



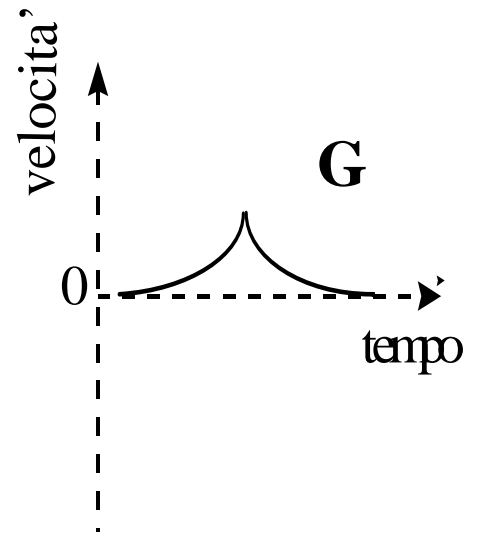
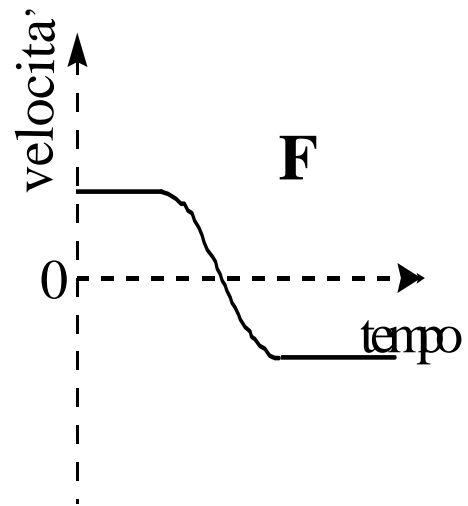
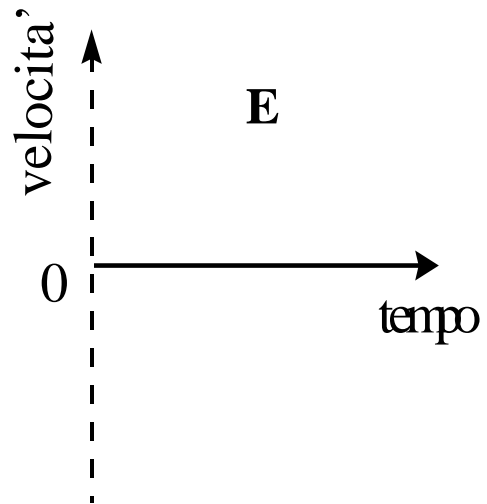
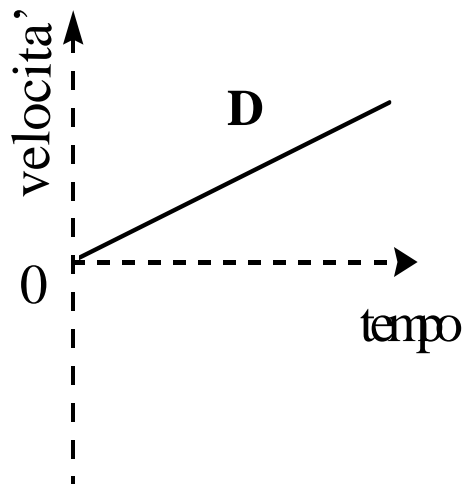
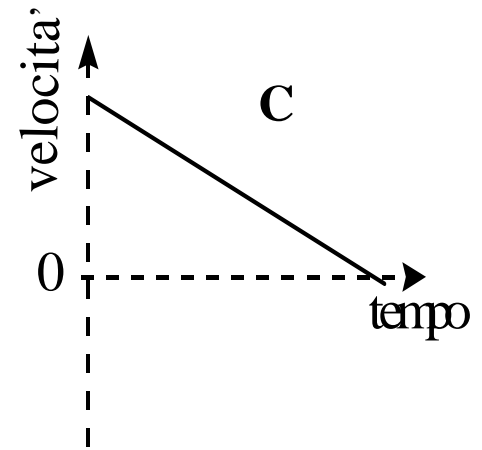
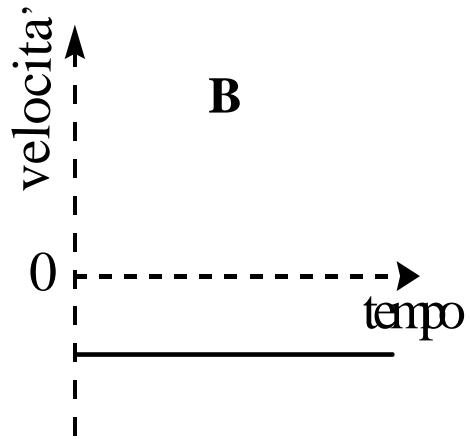
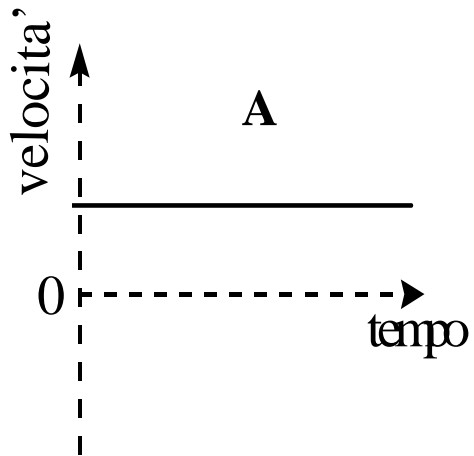
Fare uno schizzo del grafico  $s(t)$  del carrello che tra 1.5s e 2.5s aveva la  $v(t)$  riportata in figura

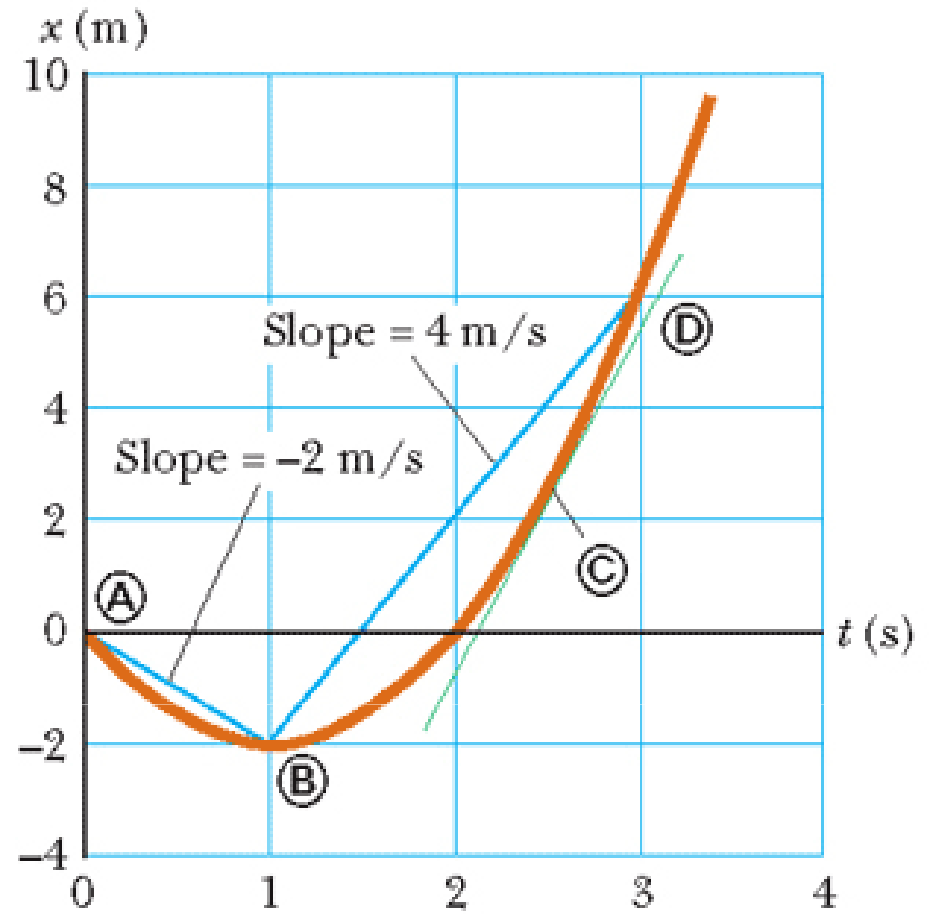
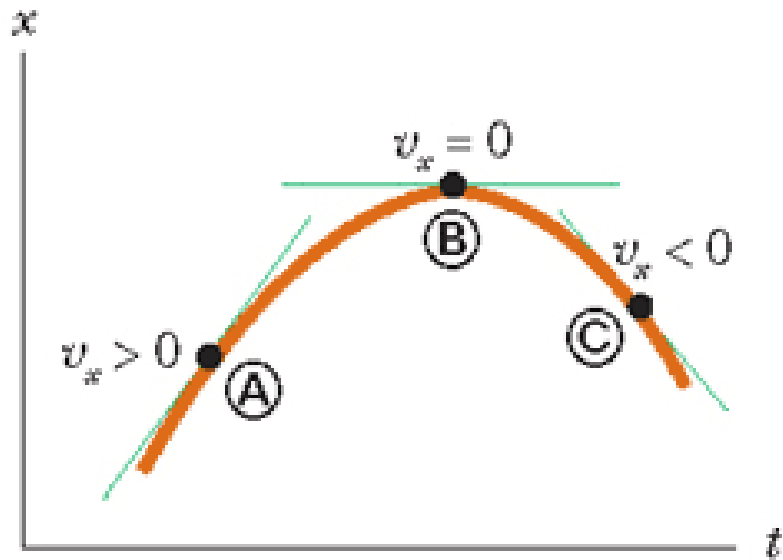


Determinare se le velocità determinate dal grafico  $s(t)$  e dal grafico  $v(t)$  sono compatibili entro gli errori



Determinare se le velocità determinate dal grafico  $s(t)$  e dal grafico  $v(t)$  sono compatibili entro gli errori





$$x(t) = -4t + 2t^2$$

$$v(t) = -4 + 4t$$

# Esempio

- Trovare la velocità media di una moto che si muove a velocità  $v_1 = \text{costante}$  per un tempo  $t_1$  e a  $v_2 = \text{costante}$  per un tempo  $t_2 = p \cdot t_1$
- Trovare la velocità media di un'auto che percorre dapprima una distanza  $L$  a velocità  $v_1 = \text{costante}$  e subito dopo una distanza  $L_1 = L/n$  a velocità  $v_2 = \text{costante}$

# Esempio

- Trovare la velocità media di una moto che si muove a velocità  $v_1 = \text{costante}$  per un tempo  $t_1$  e a  $v_2 = \text{costante}$  per un tempo  $t_2 = p \cdot t_1$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{tot}}{t_1 + t_2}$$

$$s_{tot} = s_1 + s_2$$

$$s_1 = v_1 t_1$$

$$s_2 = v_2 t_2$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1}{1 + \frac{t_2}{t_1}} + \frac{v_2}{\frac{t_1}{t_2} + 1} = \frac{v_1}{1 + p} + \frac{v_2}{\frac{1}{p} + 1} = \frac{v_1}{1 + p} + \frac{p v_2}{1 + p}$$

$$v_m = \frac{v_1 + p v_2}{1 + p}; p = 1 \Rightarrow v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}; p \rightarrow \infty \Rightarrow v_m = v_2$$

# Esempio

- Trovare la velocità media di un'auto che percorre dapprima una distanza  $L$  a velocità  $v_1 = \text{costante}$  e subito dopo una distanza  $L_1 = L/n$  a velocità  $v_2 = \text{costante}$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{tot}}{t_1 + t_2}$$

$$s_{tot} = L + \frac{L}{n}; t_1 = \frac{L}{v_1}; t_2 = \frac{\frac{L}{n}}{v_2}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L + \frac{L}{n}}{\frac{L}{v_1} + \frac{L}{nv_2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{nv_2}} = \frac{\frac{(n+1)}{n}}{\frac{nv_2 + v_1}{nv_1v_2}} = \frac{(n+1)v_1v_2}{nv_2 + v_1}$$

$$v_m = \frac{v_1v_2}{\frac{v_1}{n+1} + \frac{v_2}{1 + \frac{1}{n}}}; n = 1 \Rightarrow v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}; n \rightarrow \infty \Rightarrow v_m \rightarrow v_1$$

# Accelerazione

- Quando la velocità varia nel tempo, il moto è detto accelerato
- Definiamo come accelerazione media il rapporto:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

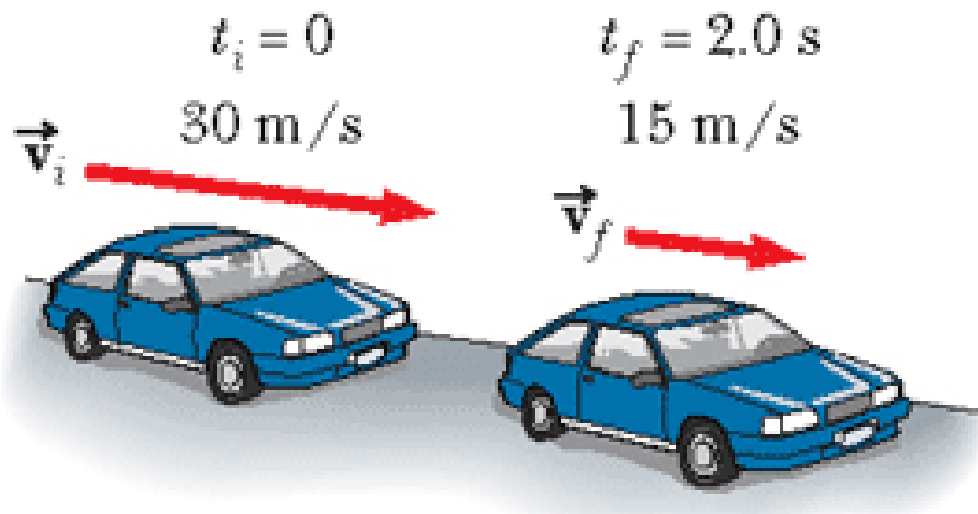
- L'accelerazione istantanea è:

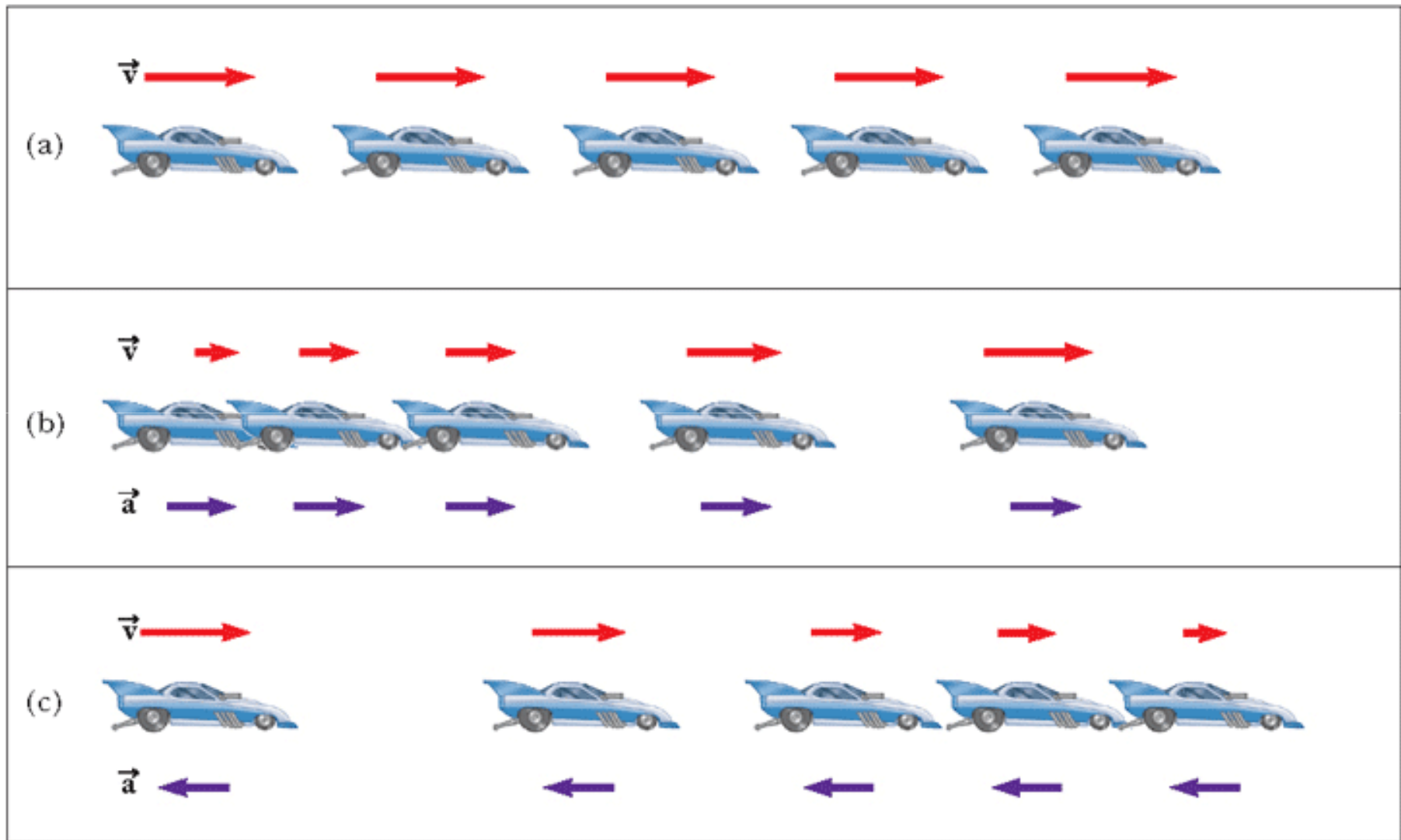
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t)$$

derivata della velocità rispetto al tempo

# Accelerazione

- L'accelerazione, in generale, e` funzione del tempo:  
 $a=a(t)$
- Nel caso in cui sia invece costante, il moto (rettilineo) e` detto uniformemente accelerato





# Equazione del moto

- Per conoscere le coordinate in funzione del tempo è necessario risolvere un'equazione, detta **equazione del moto**
- L'equazione del moto ha come incognite le accelerazioni:

$$\vec{a}(t) = a_x(t), a_y(t), a_z(t)$$

- Occorre risalire dall' accelerazione alla posizione

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \equiv \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}$$

# Relazioni tra velocità e accelerazione

- Poichè:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad dv = a(t)dt$$

- Si ha:

$$\int_{v_0}^v dv = v - v_0 = \int_{t_0}^t a(t)dt$$

# Moto rettilineo uniformemente accelerato

- Accelerazione è costante

$$v(t) = v_0 + a \int_{t_0}^t dt = v_0 + a(t - t_0)$$

- L'accelerazione istantanea è uguale alla accelerazione media:

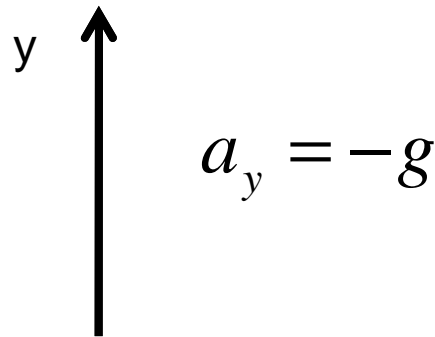
$$a = a_m$$

- Lo spostamento è funzione quadratica del tempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + a(t - t_0)) dt = \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

# Moto di un grave nel campo di gravità

- Un corpo che cade si muove verso il basso con un'accelerazione costante  $g=9.8 \text{ m/s}^2$
- Il moto del grave è dunque uniformemente accelerato
- Se prendiamo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  rivolto verso l'alto, l'accelerazione  $a$  è negativa:  $a=-g$



# Moto di un grave nel campo di gravità

- Se il corpo che cade da altezza  $h$  con velocità iniziale nulla:  $x_0=h$ ,  $v_0=0$ ,  $t_0=0$  si ha:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) = -gt \quad x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

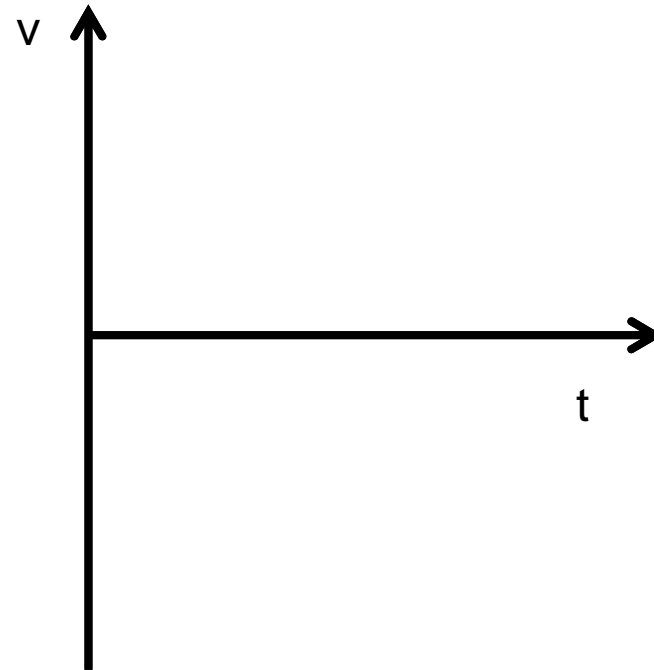
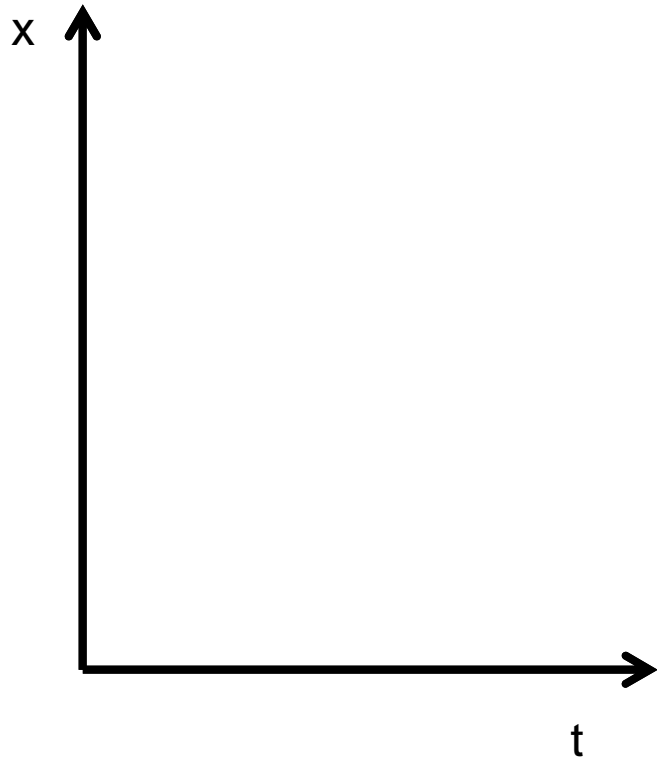
- Il corpo raggiunge il suolo, cioè il punto  $x=0$ :

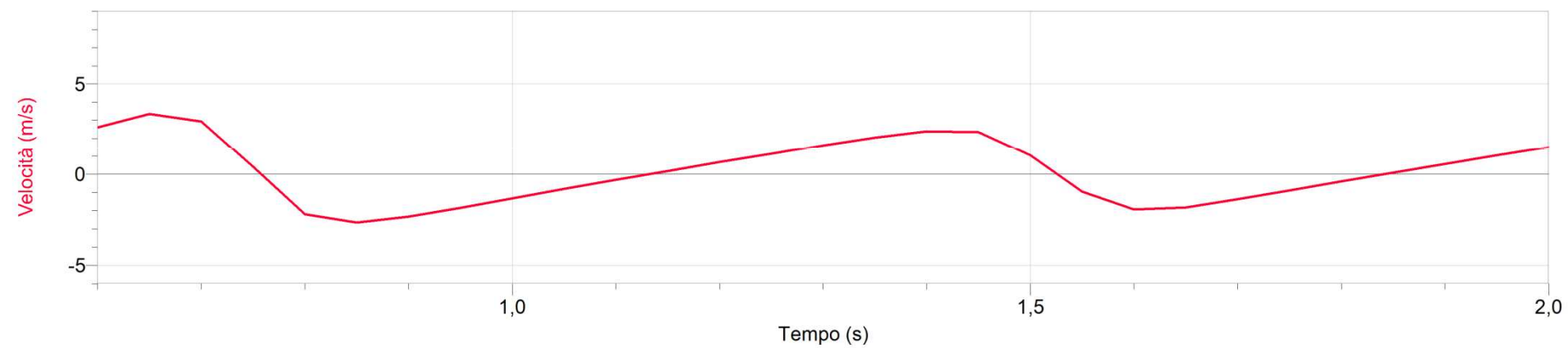
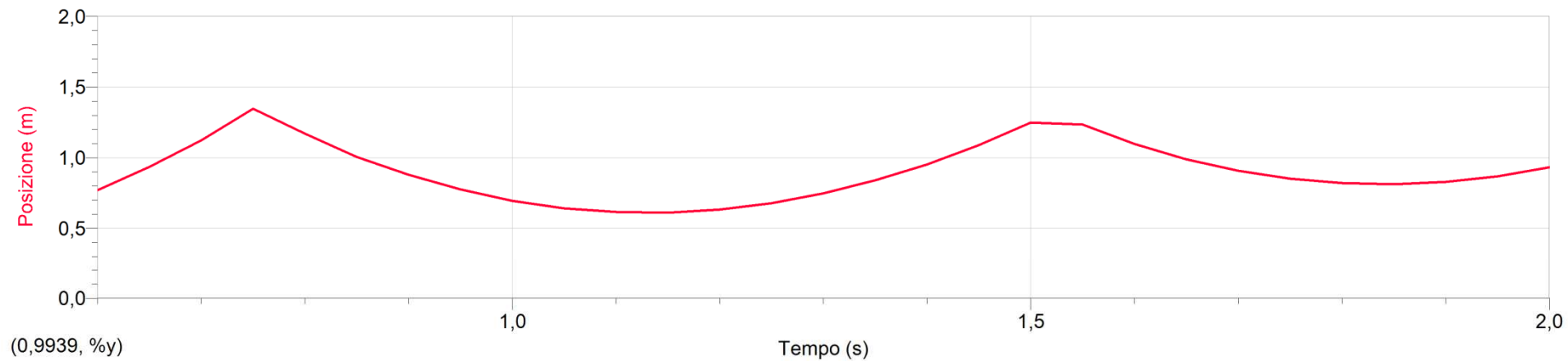
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

con velocità:

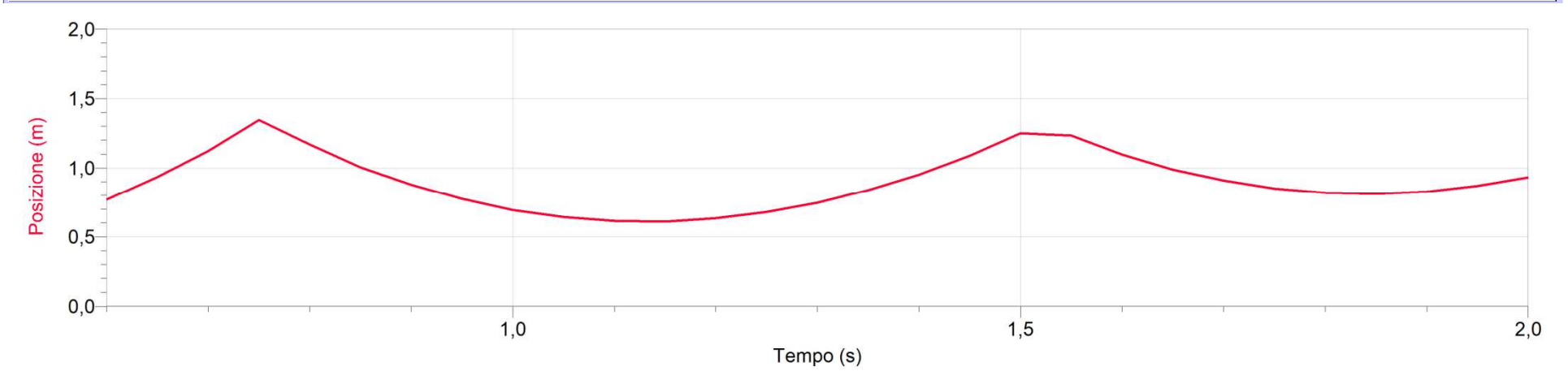
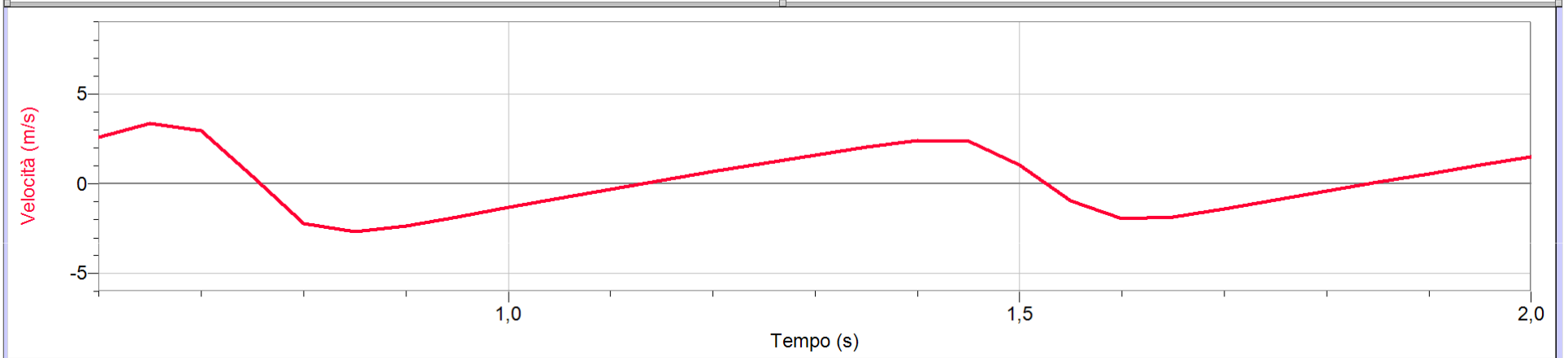
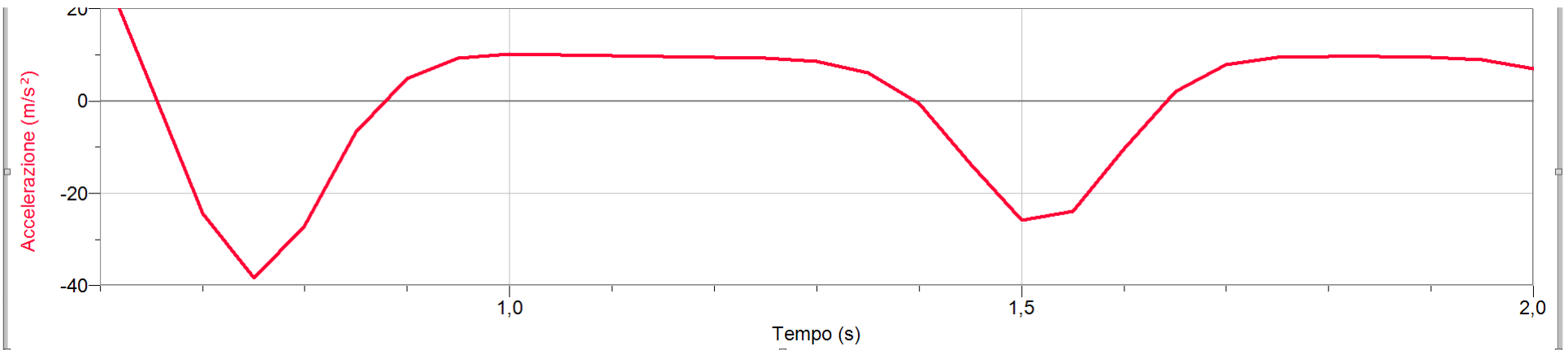
$$v(t) = -\sqrt{2gh}$$

# Grafici del moto di una pallina che rimbalza sul pavimento

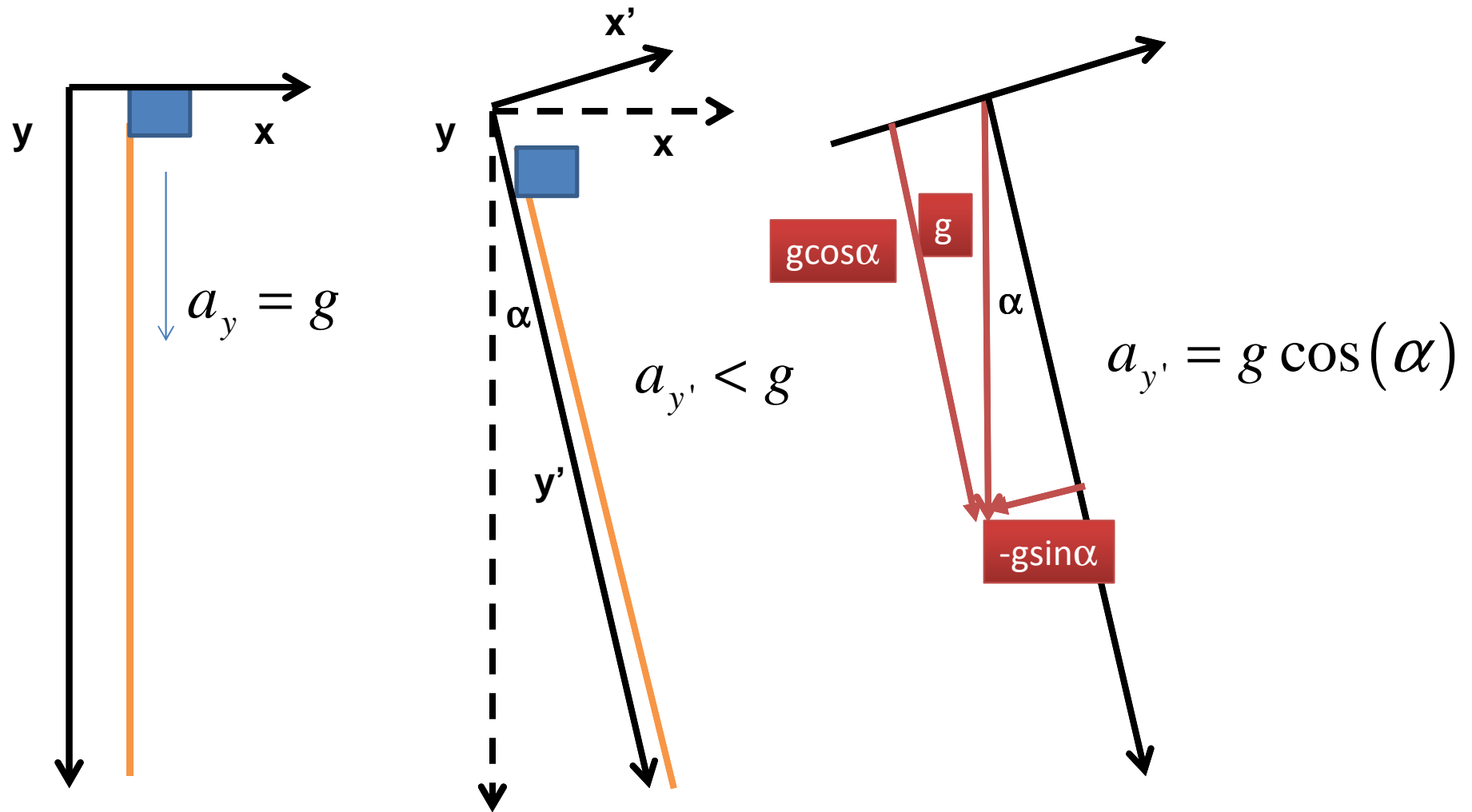




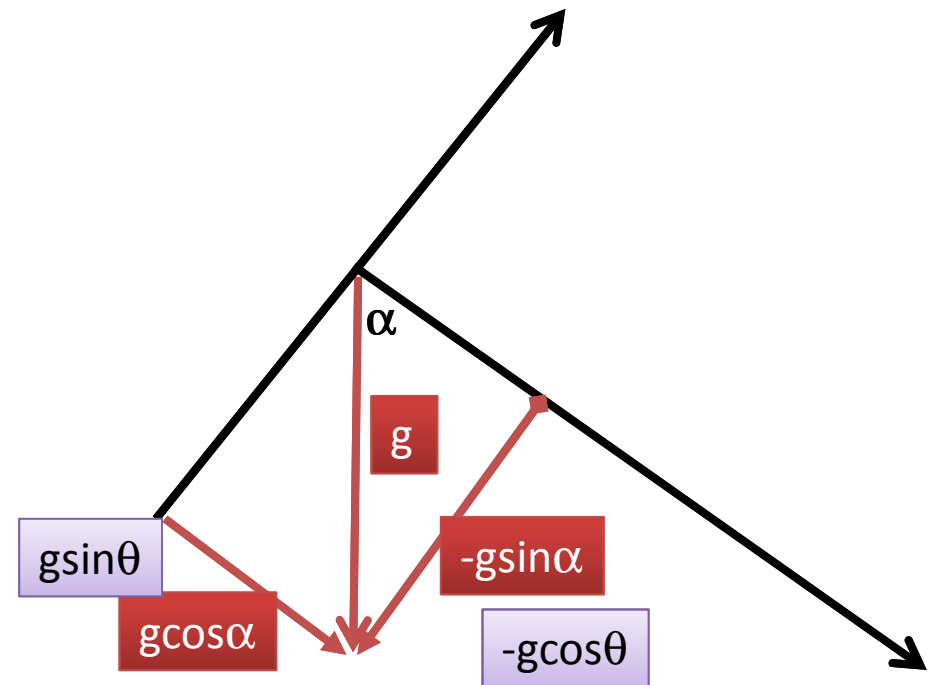
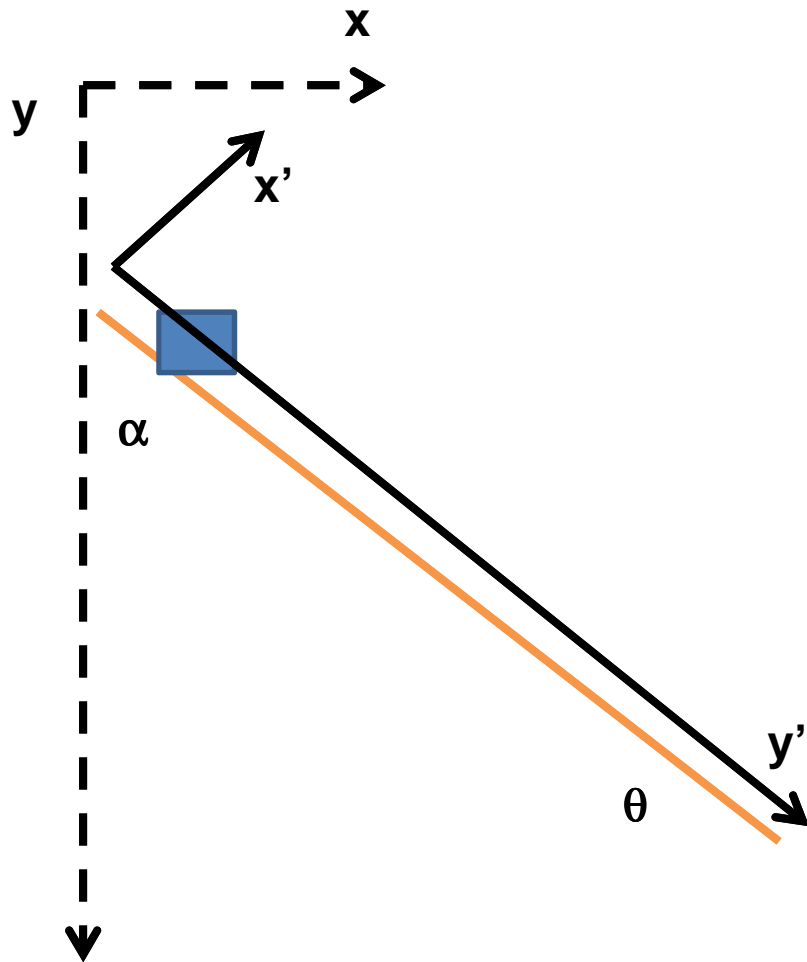
Fare uno schizzo del grafico  $a(t)$



# Cinematica del moto su piano inclinato



# Cinematica del moto su piano inclinato



$$a_{y'} = g \cos(\alpha) = g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$g \sin(\theta)$$

# Legge oraria su piano inclinato

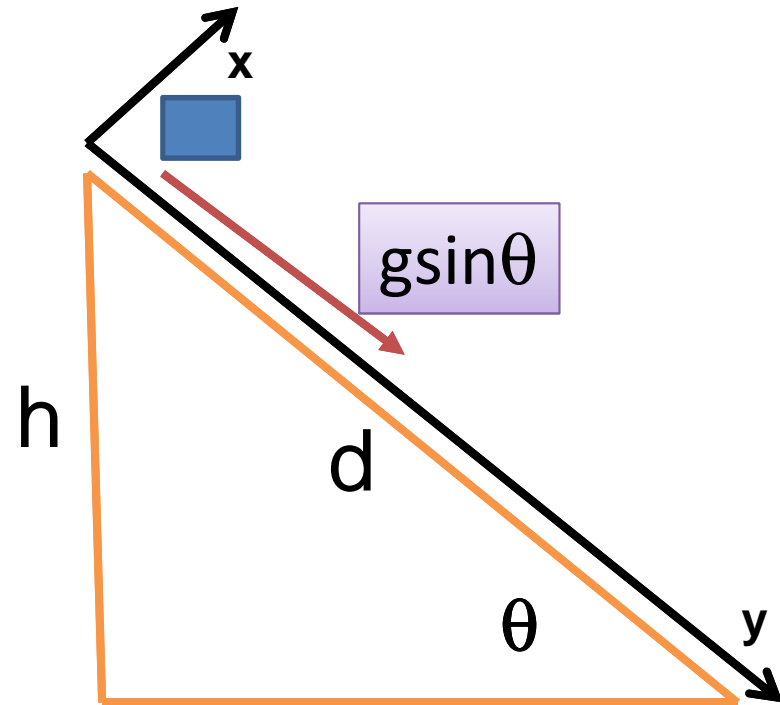
$$a_y = g \sin(\theta)$$

$$v_y(t) = gt \sin(\theta)$$

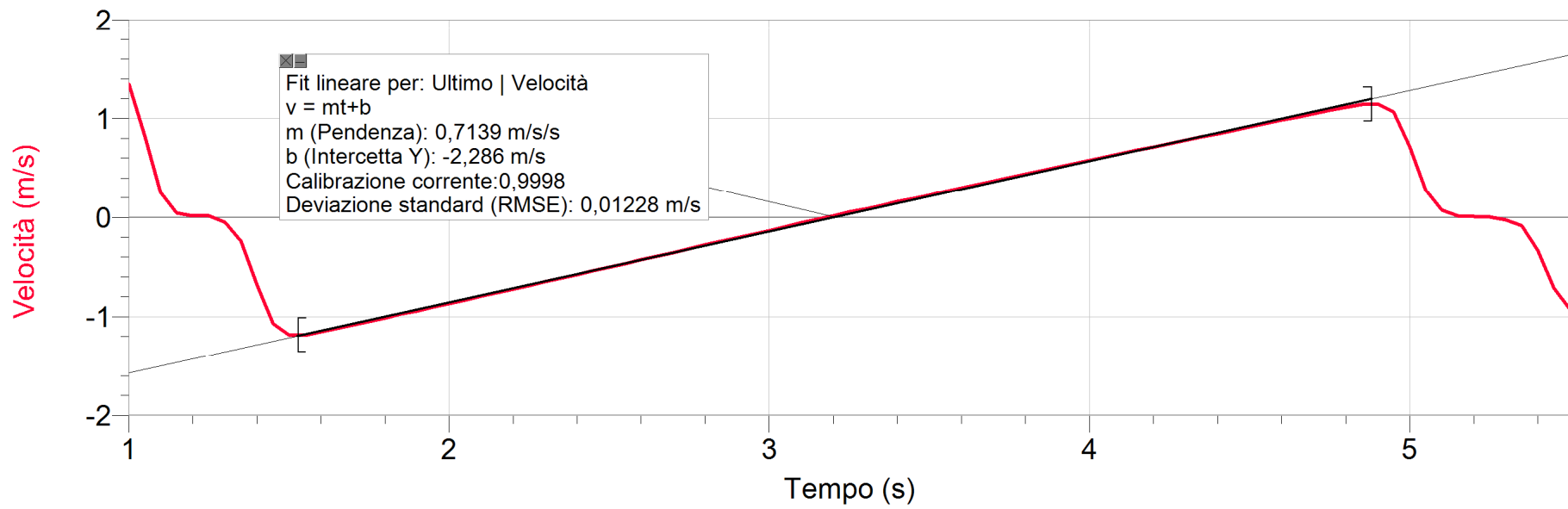
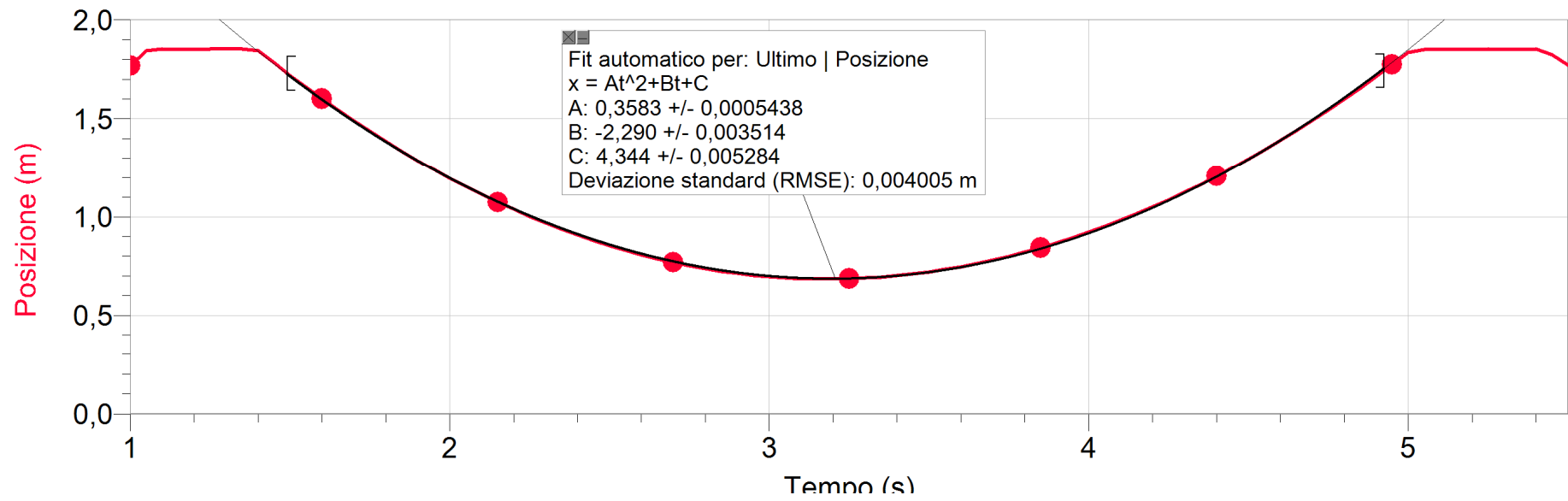
$$y(t) = \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2$$

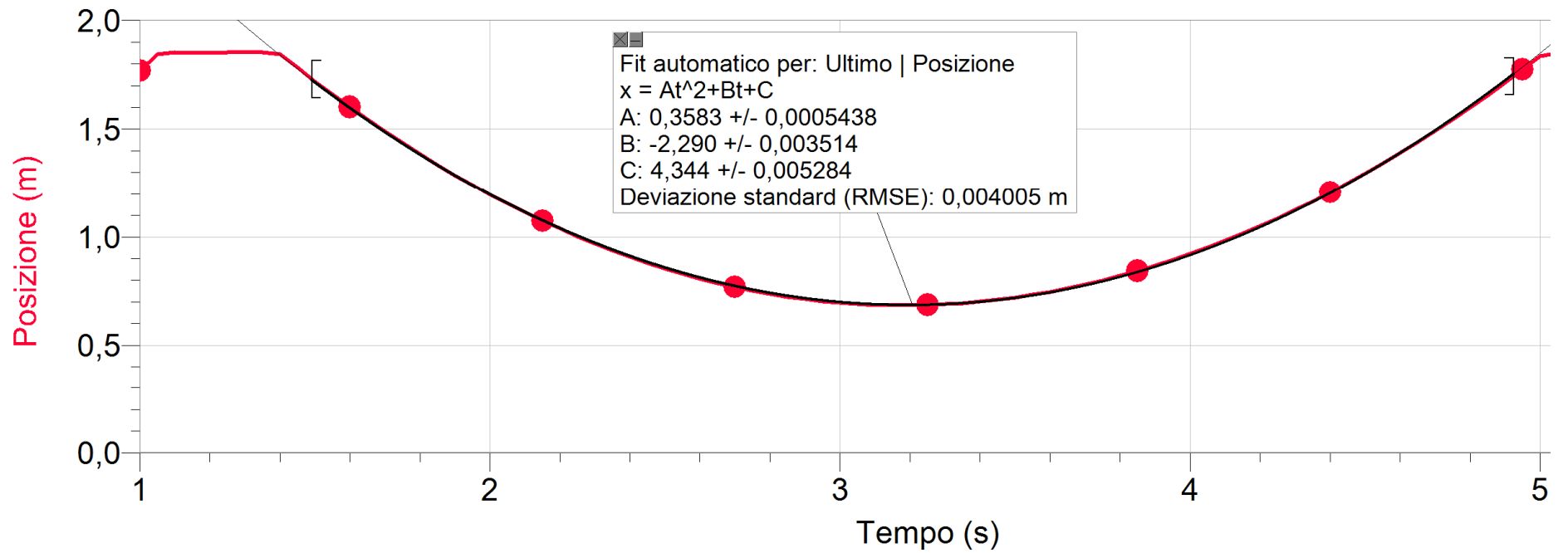
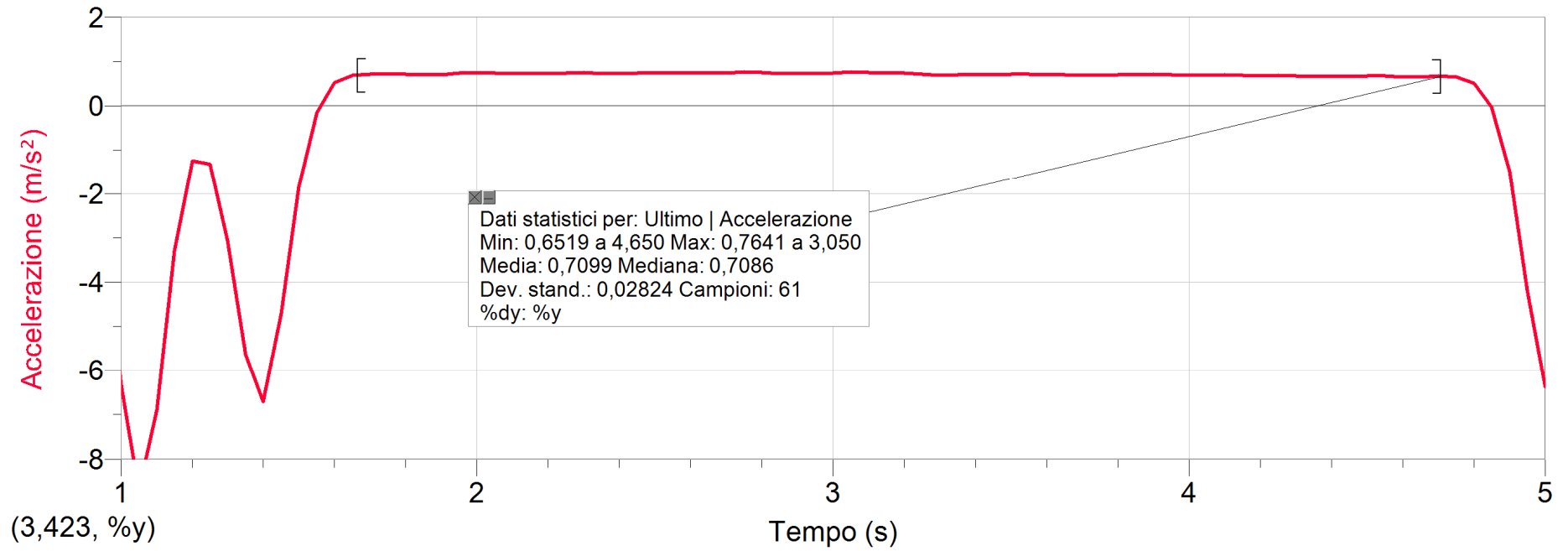
$$y(\bar{t}) = d \Leftrightarrow \frac{1}{2} g \sin(\theta) \bar{t}^2 = d$$

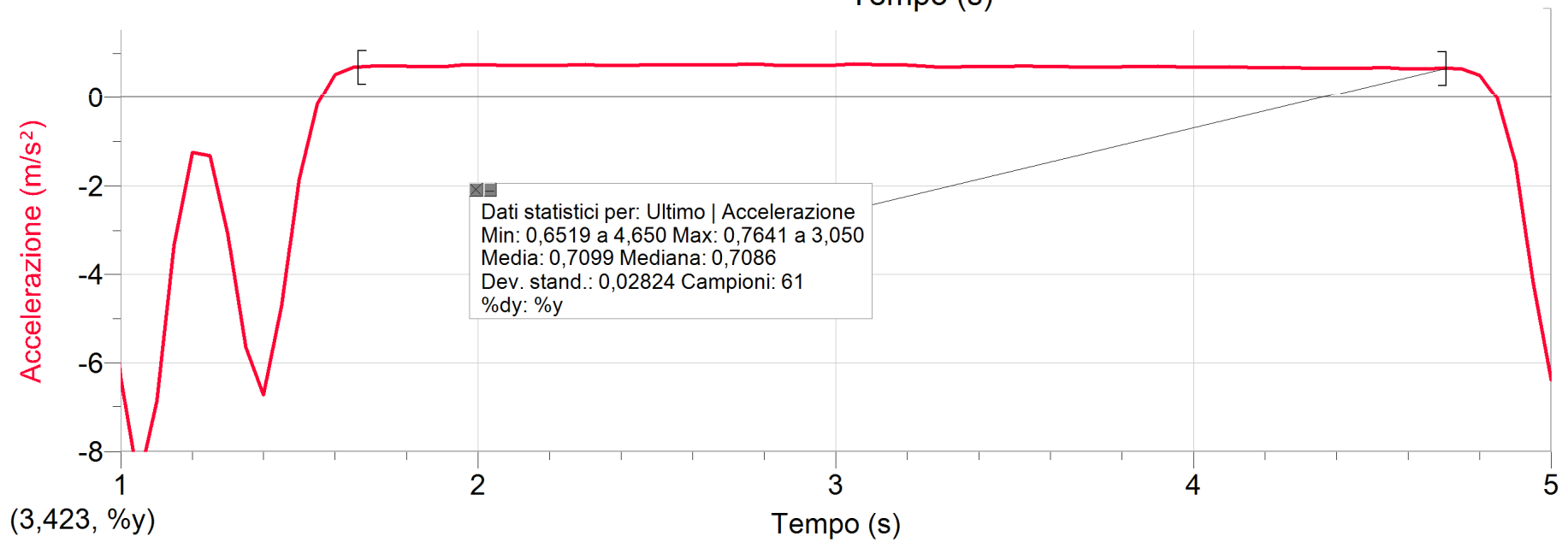
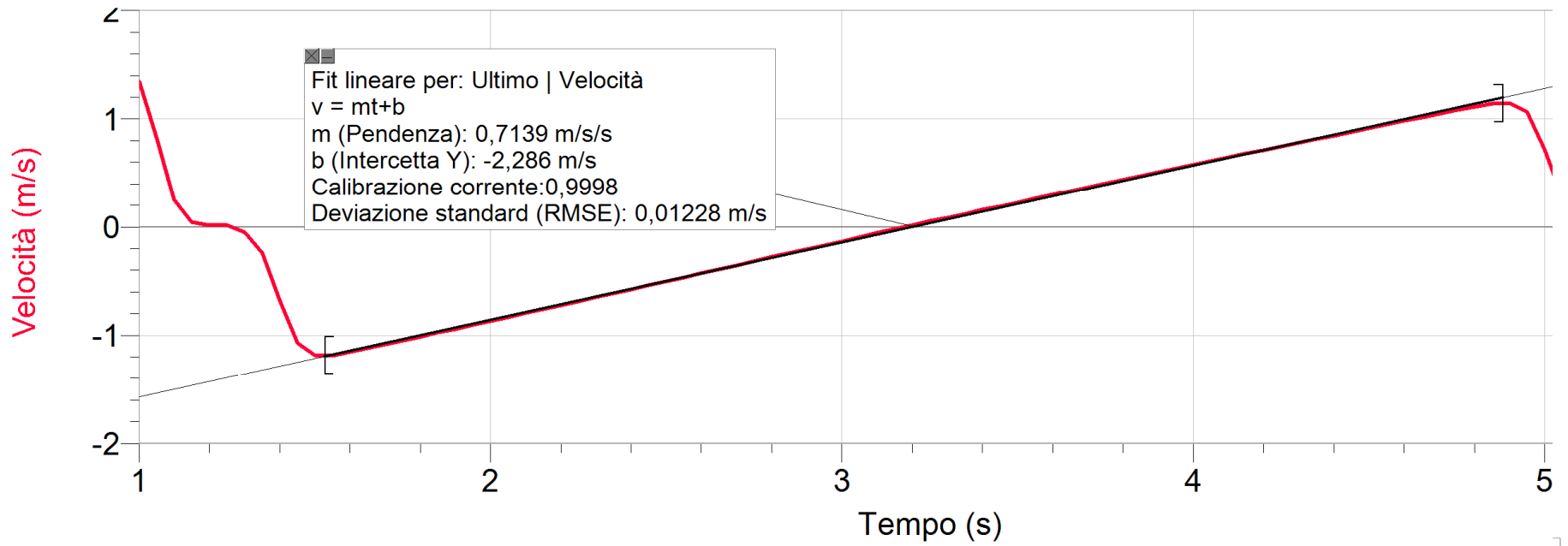
$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{t} = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$



$$v_y(\bar{t}) = g \sin(\theta) \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} = \sqrt{2gd \sin(\theta)}$$







# Moto armonico

- In questo caso definiamo il moto direttamente a partire dalla legge oraria della posizione:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

- $A$  l'ampiezza
- $\omega$  la pulsazione
- $\phi$  la fase iniziale
  
- Poiche' la funzione seno e' periodica, a due istanti di tempo  $t_1, t_2$ , che soddisfano la relazione seguente
$$(\omega t_2 + \phi) - (\omega t_1 + \phi) = \omega(t_2 - t_1) = n2\pi$$
- corrispondera' uno stesso valore della coordinata

# Moto armonico

- Quando  $n$  assume il valore minimo ( $n=1$ ), i due istanti differiscono per un tempo  $T$  detto periodo

$$\omega(t_2 - t_1) = \omega T = 2\pi$$

- E dunque:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$        $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- La frequenza e` l'inverso del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi\nu$$

# Soluzione di equazioni differenziali

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

- Si dice integrare l'equazione come sinonimo di risolvere
- Risolvere un'equazione differenziale significa abbassarne il grado di derivazione mediante operazioni di integrazione agenti sulle funzioni incognite o su funzioni di queste funzioni

# Accelerazione come funzione della posizione

- Sia:  $a = a(x)$  cioè in funzione della posizione
- Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per la velocità:

$$av = va = v \frac{dv}{dt}$$

- Integriamo ambo i membri rispetto a  $t$ :

$$\int_{t_0}^t av dt = \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} dt$$

- Poichè

$$v dt = dx$$

$$\int_{t_0}^t a dx = \int_{t_0}^t \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_0}^v \frac{dx}{dt} dv = \int_{v_0}^v v dv =$$

# Accelerazione come funzione della posizione

$$\int_{x_0}^x a(x)dx = \int_{v_0}^v v dv$$

- Risolvendo l'integrale si ha:

$$\int_{x_0}^x a(x)dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

- cioè

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x a(x)dx}$$

# Un esempio importante

- Sia:

$$a(x) = -\omega^2 x$$

- Avremo allora:

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^x a(x) dx = -\int_{x_0}^x \omega^2 x dx = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 - x_0^2)$$

- Risolvendo rispetto a  $v$ :

$$v = \sqrt{(v_0^2 + \omega^2 x_0^2) - \omega^2 x^2} = \sqrt{\omega^2 A^2 - \omega^2 x^2} = \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

# Un esempio importante

- Ma:

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

- Risolvendo per separazione di variabili:

$$\frac{dx}{A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \omega dt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \int_{x_0}^x \frac{d\left(\frac{x}{A}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega \int_0^t dt$$

# Un esempio importante

- Risolvendo avremo:

$$\omega \int_0^t dt = \omega t$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \arcsin \zeta - \phi = \arcsin \frac{x}{A} - \phi$$

$$\arcsin \frac{x}{A} - \phi = \omega t$$

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$