

# Cinematica in 2 d

# Moto su di un piano

- Ovvero in due dimensioni
- Bisogna specificare due coordinate per individuare il moto di un corpo:
  - coordinate cartesiane
  - coordinate polari
- Utilizzo del formalismo vettoriale

# Vettori su di un piano

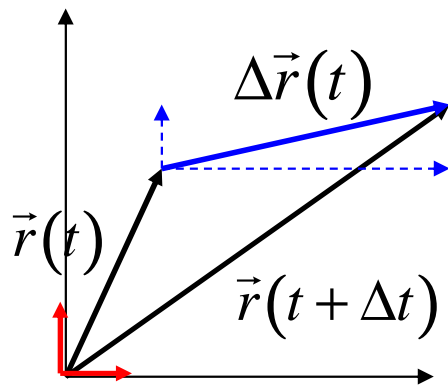
- Spostamento, velocità e accelerazione sono grandezze vettoriali
- Ogni vettore su di un piano può essere espresso come somma di due vettori
- Tra i vettori ce ne sono di particolari, detti versori o vettori unitari, in quanto hanno modulo unitario e dimensioni fisiche nulle

# Vettore spostamento

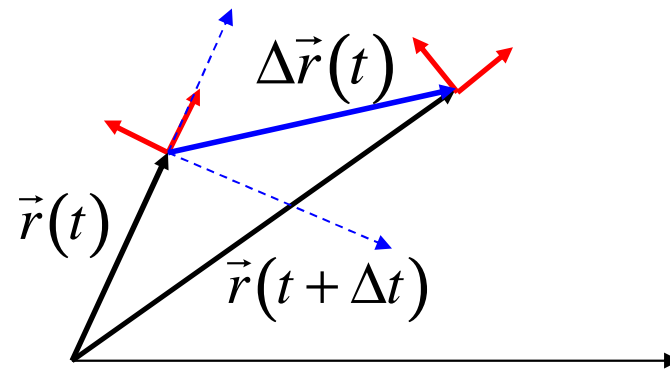
- È la differenza di due vettori posizione,  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta\vec{r}(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]\hat{u}_x + [y(t + \Delta t) - y(t)]\hat{u}_y$$



Coord. cartesiane



Coord. polari

# Vettore velocità

- Velocità media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- cioè:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{[x(t + \Delta t) - x(t)]}{\Delta t} \hat{u}_x + \frac{[y(t + \Delta t) - y(t)]}{\Delta t} \hat{u}_y$$

- = velocità medie lungo x e y

# Vettore velocità

- Velocità istantanea è il limite della velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero:

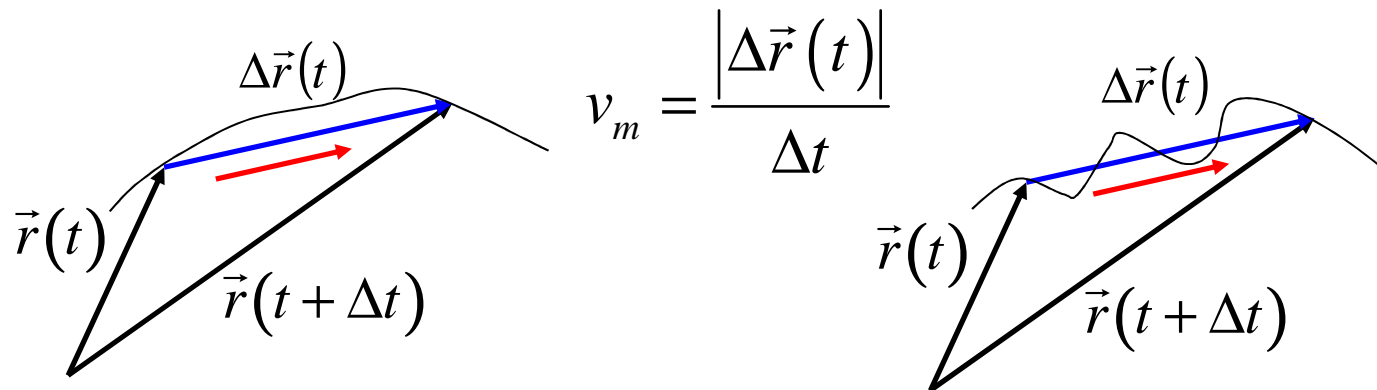
$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + \Delta t) - x(t)]}{\Delta t} \hat{u}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[y(t + \Delta t) - y(t)]}{\Delta t} \hat{u}_y = \\ &= \frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y\end{aligned}$$

# Vettore velocità

- Interpretazione geometrica della velocità media:
  - la *direzione* è quella della secante alla traiettoria percorsa dal corpo in moto, individuata dai vettori

$$\vec{r}(t) \quad \vec{r}(t + \Delta t)$$

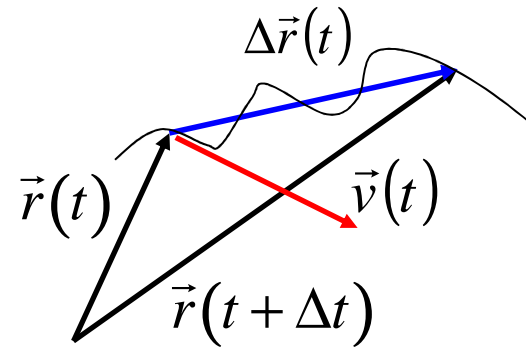
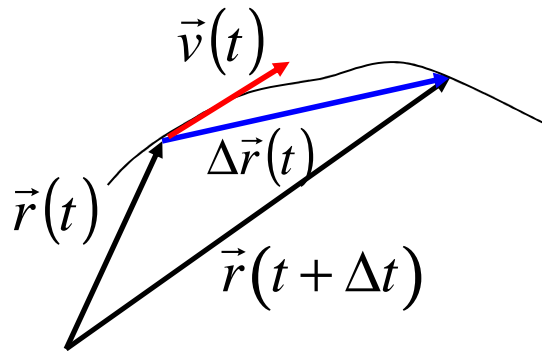
- il *modulo* è il rapporto tra il modulo del vettore spostamento e l'intervallo di tempo necessario a percorrerlo



# Vettore velocità

- Interpretazione geometrica del vettore velocità istantanea:
  - la direzione e` quella della tangente alla traiettoria percorsa dal corpo in moto, al tempo  $t$
  - il modulo e` il limite del rapporto tra il modulo del vettore spostamento e l'intervallo di tempo necessario a percorrerlo

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



# Modulo velocità 2d

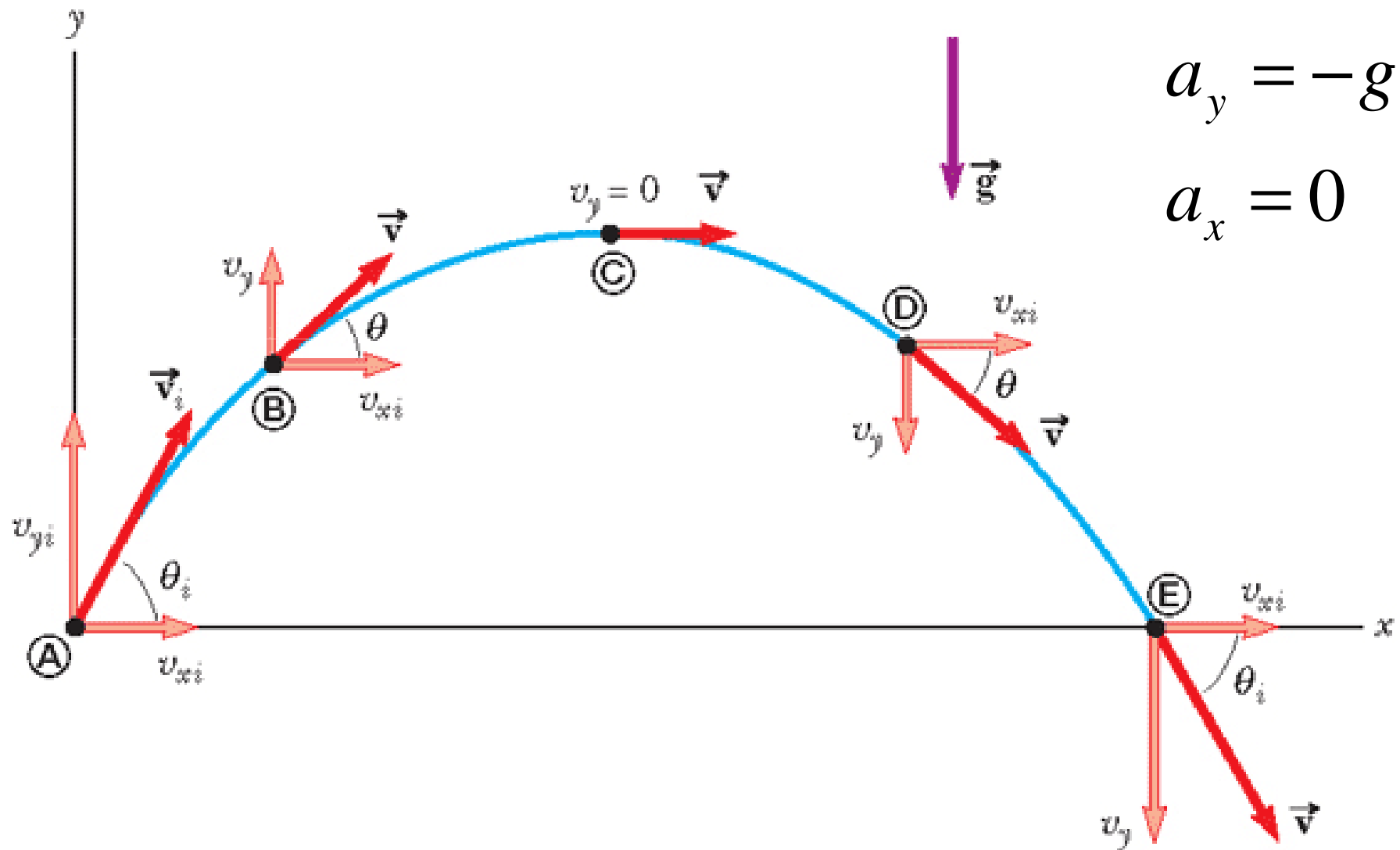
$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$

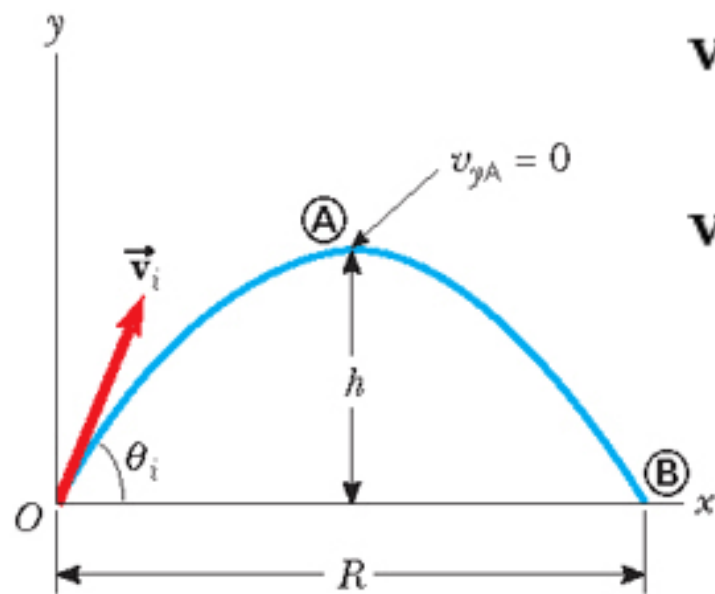
- Componenti:  $v_x = \frac{dx}{dt}$        $v_y = \frac{dy}{dt}$

- Modulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

# Moto parabolico





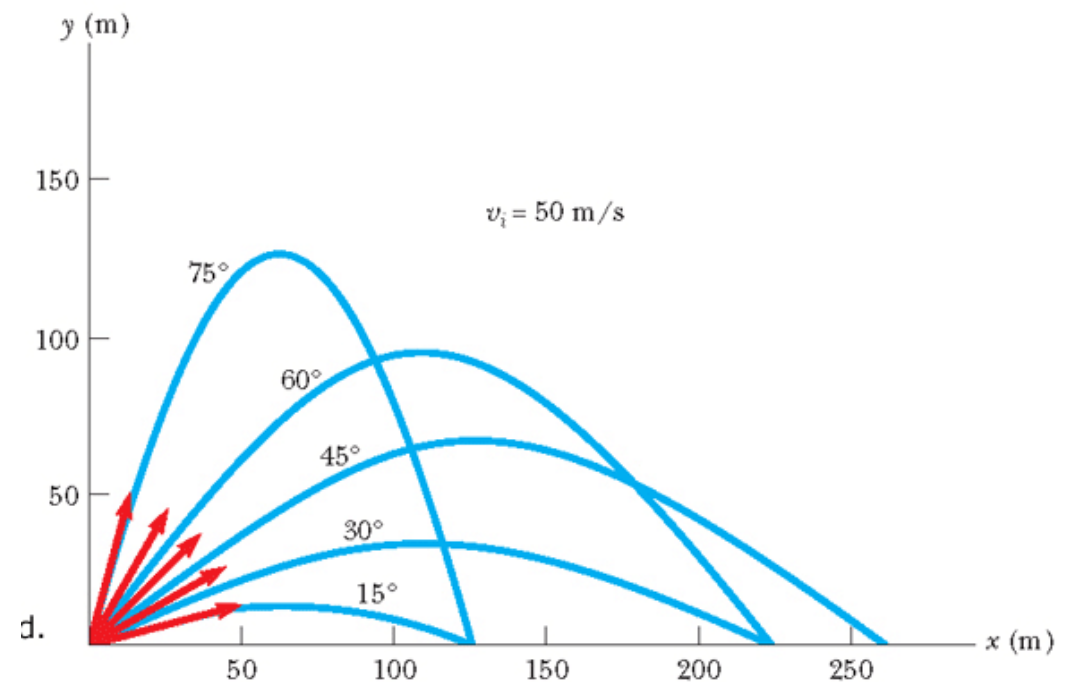
$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \cdot \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \cdot \hat{u}_y.$$

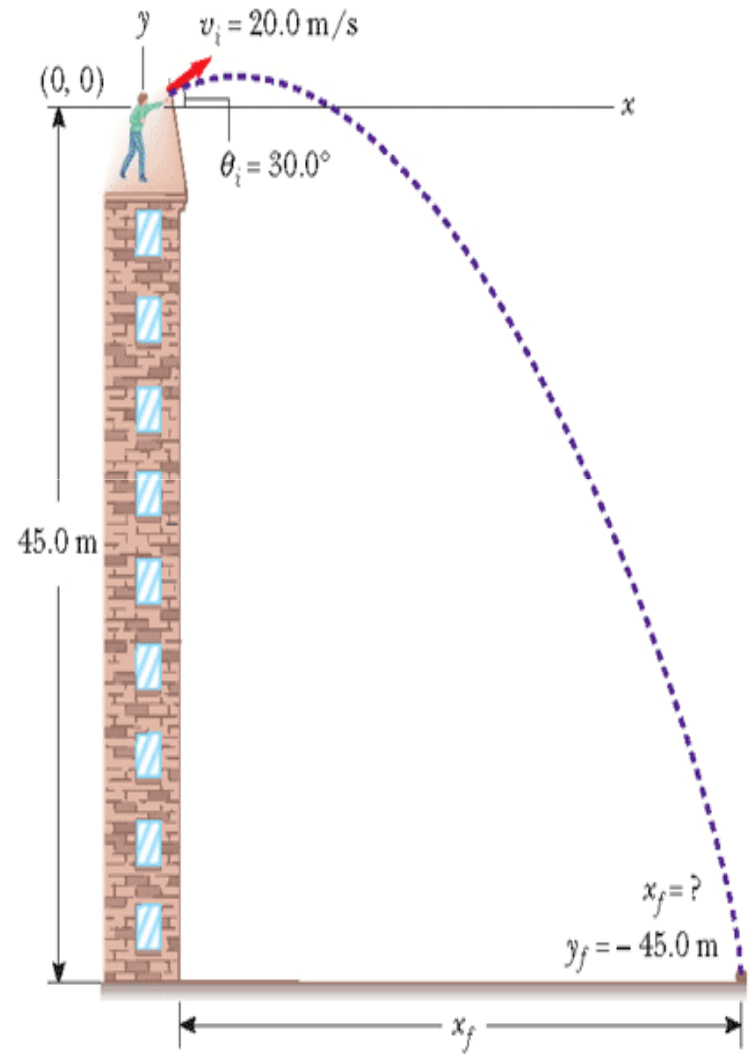
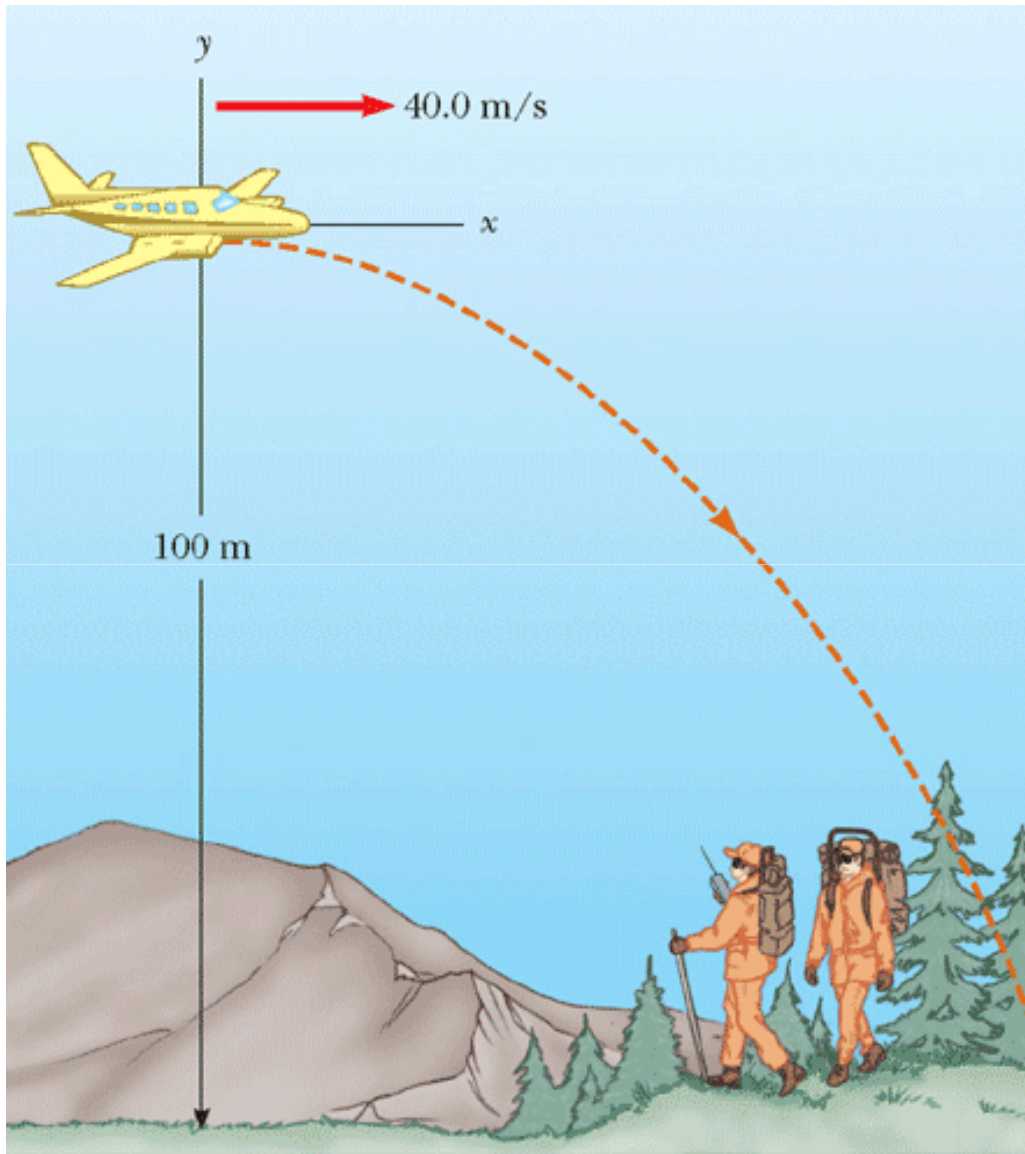
$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos \theta \cdot \hat{u}_x + (v_0 \sin \theta - gt) \cdot \hat{u}_y$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t$$

$$y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

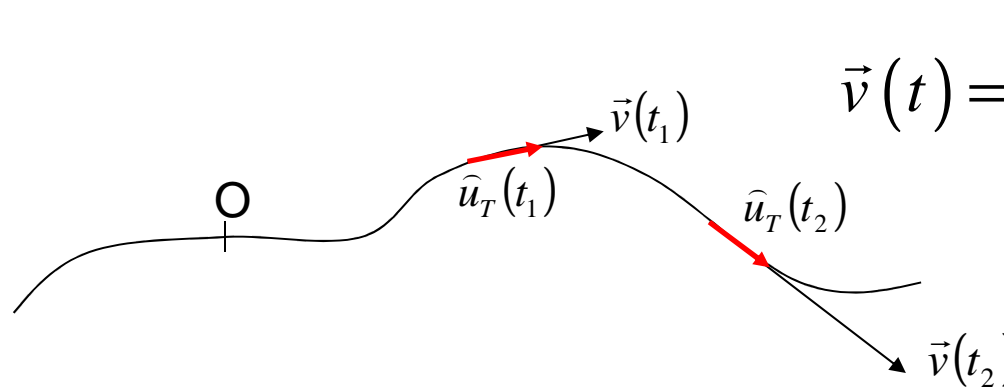
$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2$$





# Coordinata curvilinea

- Il moto lungo una traiettoria qualsiasi può essere descritto mediante una coordinata curvilinea  $s$ , misurata da un'origine arbitraria sulla traiettoria e che esprime la lunghezza della traiettoria
- $ds/dt$  = variazione temporale della posizione sulla traiettoria  $\rightarrow$  velocità istantanea
- Il vettore velocità è determinato dal modulo  $|ds/dt|$  e dal versore  $\mathbf{u}_T$  che individua la direzione della tangente alla curva



The diagram shows a curved path starting from an origin  $O$ . At two points,  $t_1$  and  $t_2$ , the tangent unit vectors  $\hat{u}_T(t_1)$  and  $\hat{u}_T(t_2)$  are shown. The corresponding velocity vectors  $\vec{v}(t_1)$  and  $\vec{v}(t_2)$  are also shown, pointing in the direction of motion along the curve.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds \cdot \hat{u}_T}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T$$
$$d\vec{r}(t) = ds \cdot \hat{u}_T$$

# Vettore accelerazione su traiettoria qualsiasi

- E' definito come

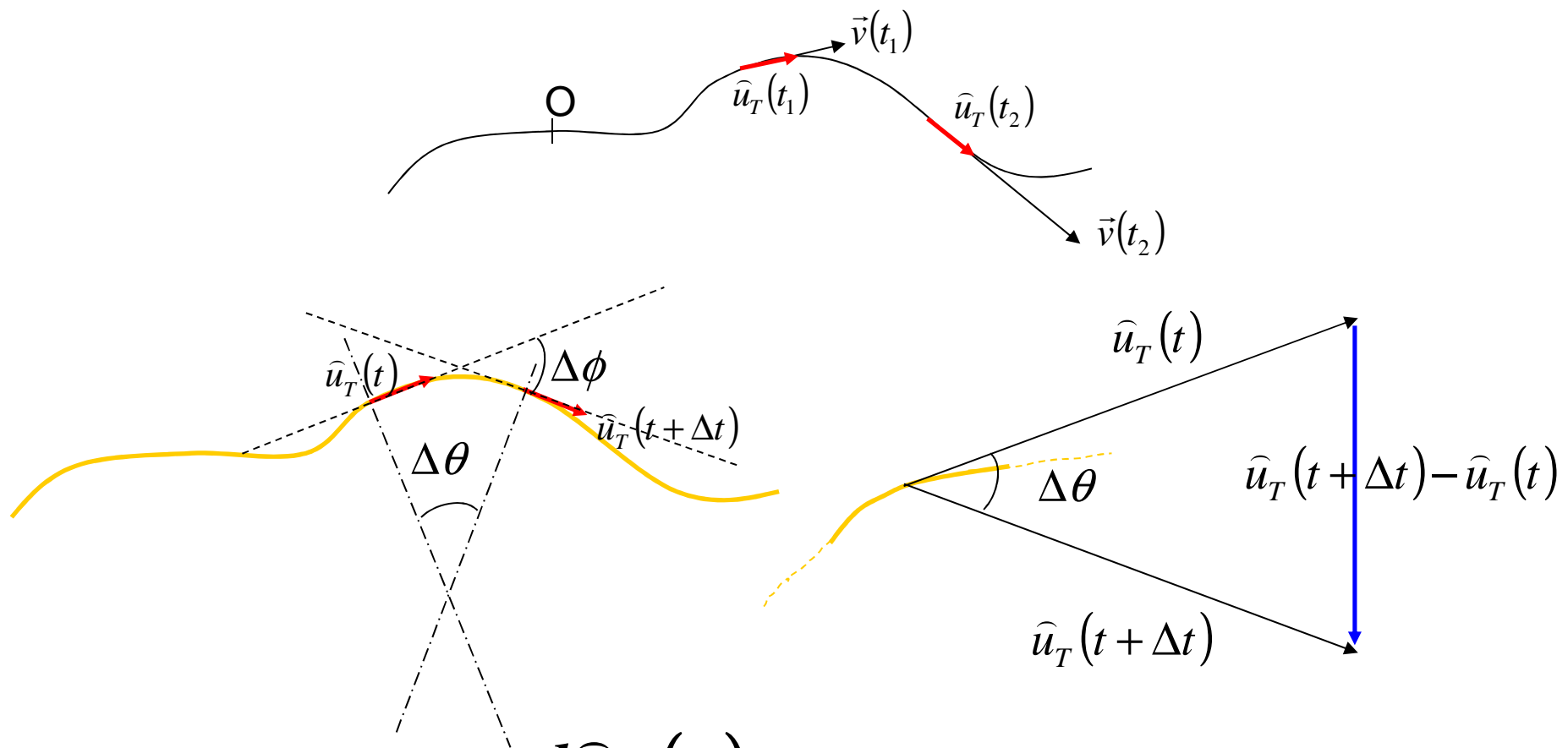
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Usando per convenienza la coordinata curvilinea, eseguiamo la derivata del vettore velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\hat{u}_T(t)]}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\hat{u}_T(t) + v(t)\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt}$$

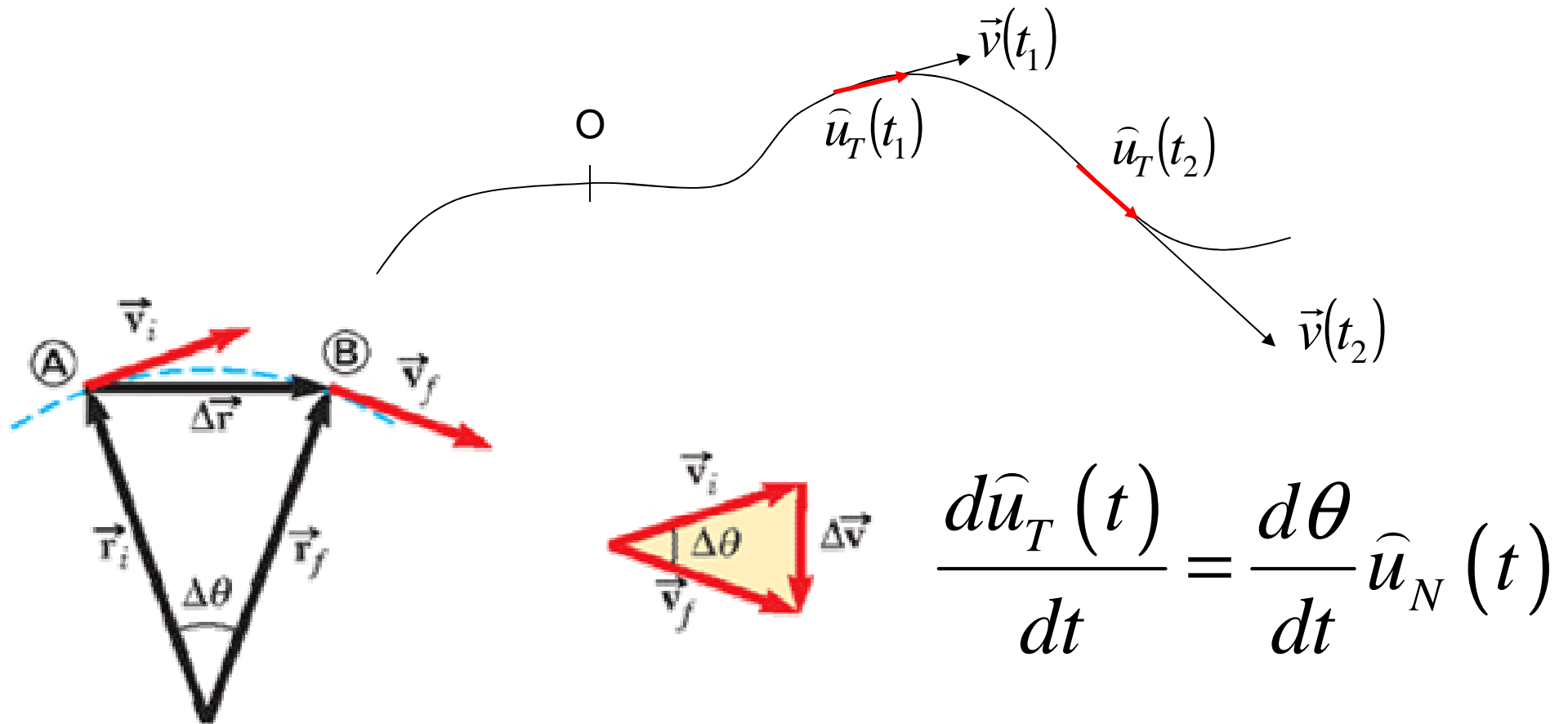
- Derivata del versore  $\mathbf{u}_T$  ?

# Derivata del versore



$$\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N(t)$$

# Derivata del versore



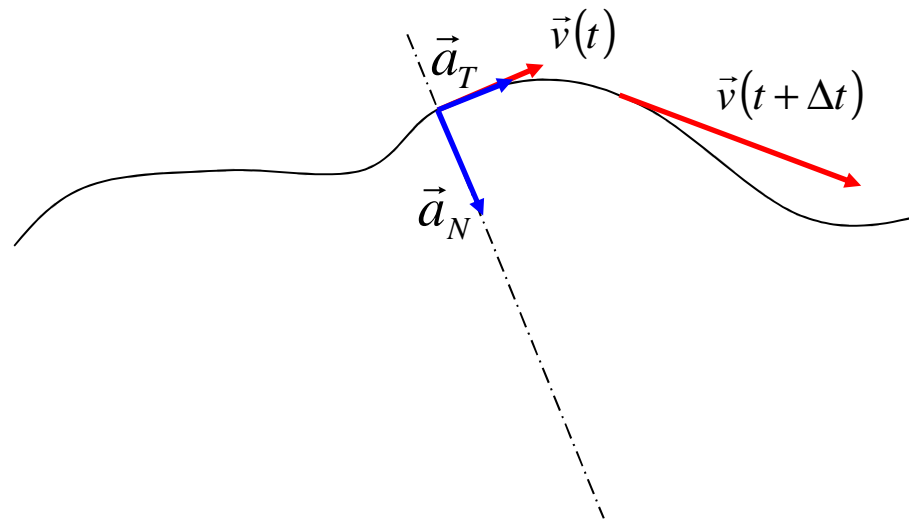
# Vettore accelerazione

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N \equiv \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

- accelerazione tangenziale, tangente alla traiettoria → variazione di modulo della velocità
- accelerazione normale, perpendicolare alla traiettoria e rivolto verso la convessità di questa: → variazione di direzione della velocità

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T$$

$$\vec{a}_N = v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N$$



# Moti circolari

- Sono i moti che avvengono lungo una circonferenza
- Velocità cambia direzione continuamente → deve essere sempre presente un'accelerazione
- Se la velocità è costante in modulo il moto si dice uniforme
- Si può descrivere il moto o con la coordinata curvilinea  $s$  o con la coordinata angolare  $\theta$ , corrispondente all'angolo al centro sotteso da  $s$

$$s = R\theta$$

# Moto circolare

- Si definiscono
  - Posizione angolare  $\theta$
  - Spostamento angolare  $\Delta\theta$
  - Velocità angolare media  $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
  - Velocità angolare istantanea  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
  - Accelerazione angolare media  $\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
  - Accelerazione angolare istantanea  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$

# Velocità nel moto circolare

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds \cdot \hat{u}_T}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T \quad s = R\theta$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d(R\theta)}{dt} \hat{u}_T = |v| \hat{u}_T$$

$$|v| = \frac{dR\theta}{dt} = \theta \frac{dR}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} = 0 + R\omega$$

$$|v_R| = \frac{dR}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad |v(t)| = R\omega(t)$$

# Accelerazione nel moto circolare uniforme

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N \equiv \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T = \frac{d(R\omega)}{dt} \hat{u}_T = 0$$

$$\vec{a}_N = v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N = v\omega \hat{u}_N = \omega R \omega \hat{u}_N = \omega^2 R \hat{u}_N$$

$$\vec{a}_N = v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N = v\omega \hat{u}_N = v \frac{v}{R} \hat{u}_N = \frac{v^2}{R} \hat{u}_N$$

$$|a| = |a_N| = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

- Il moto è periodico con periodo  $T$  pari al tempo di percorrenza della circonferenza:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

# Moto circolare non uniforme

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N \equiv \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

- $\omega \neq \text{costante} \rightarrow \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T = \frac{dR\omega(t)}{dt} \hat{u}_T = R \frac{d\omega(t)}{dt} \hat{u}_T \equiv R\alpha(t) \hat{u}_T$

$$\vec{a}_N = v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N = v\omega(t) \hat{u}_N = R\omega^2(t) \hat{u}_N$$

$$|\vec{a}|^2 = \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( v \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = (R\alpha(t))^2 + (\omega^2(t)R)^2 = R^2 (\alpha^2(t) + \omega^4(t))$$

# Esempio: moto circolare uniformemente accelerato

$$\alpha(t) = c$$

$$|\vec{a}_T| = R\alpha$$

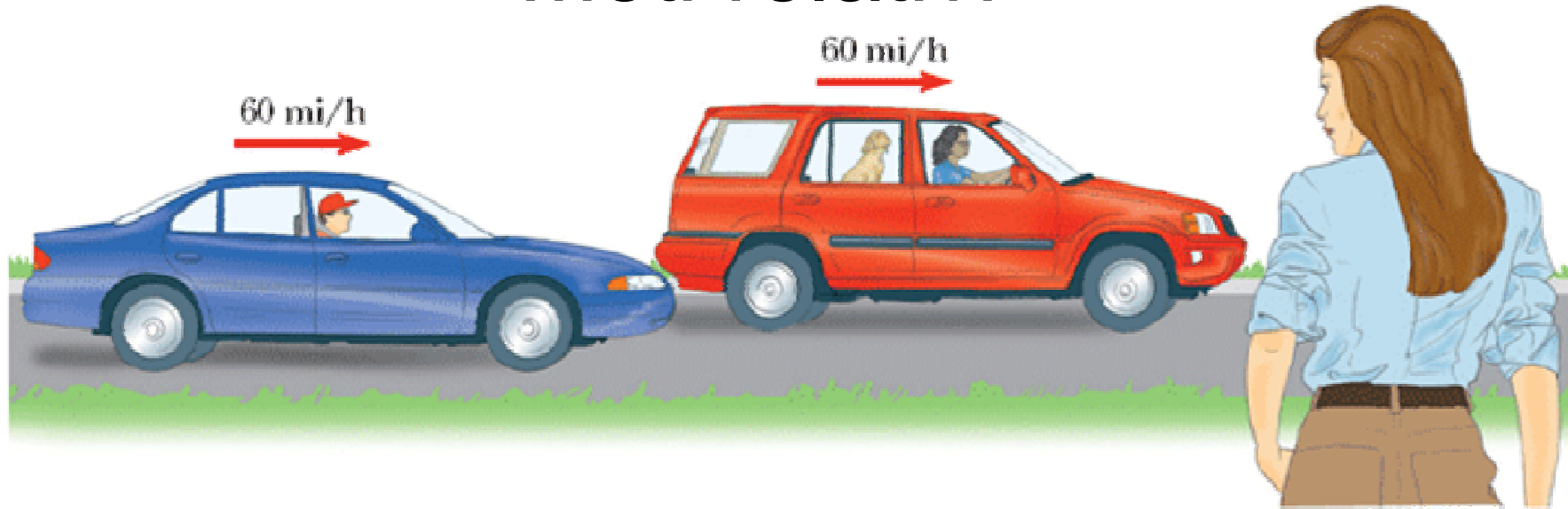
- Integrando l'equazione che definisce  $\alpha$ , troviamo per la velocità angolare:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

- L'accelerazione centripeta diventa:

$$|a_N| = \omega^2 R = R(\omega_0 + \alpha t)^2$$

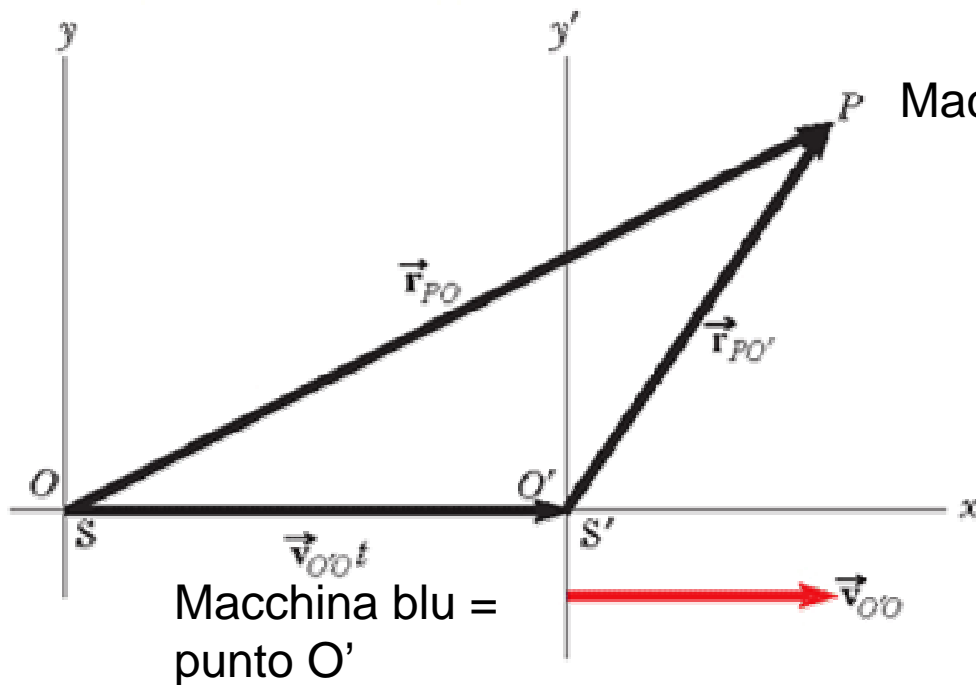
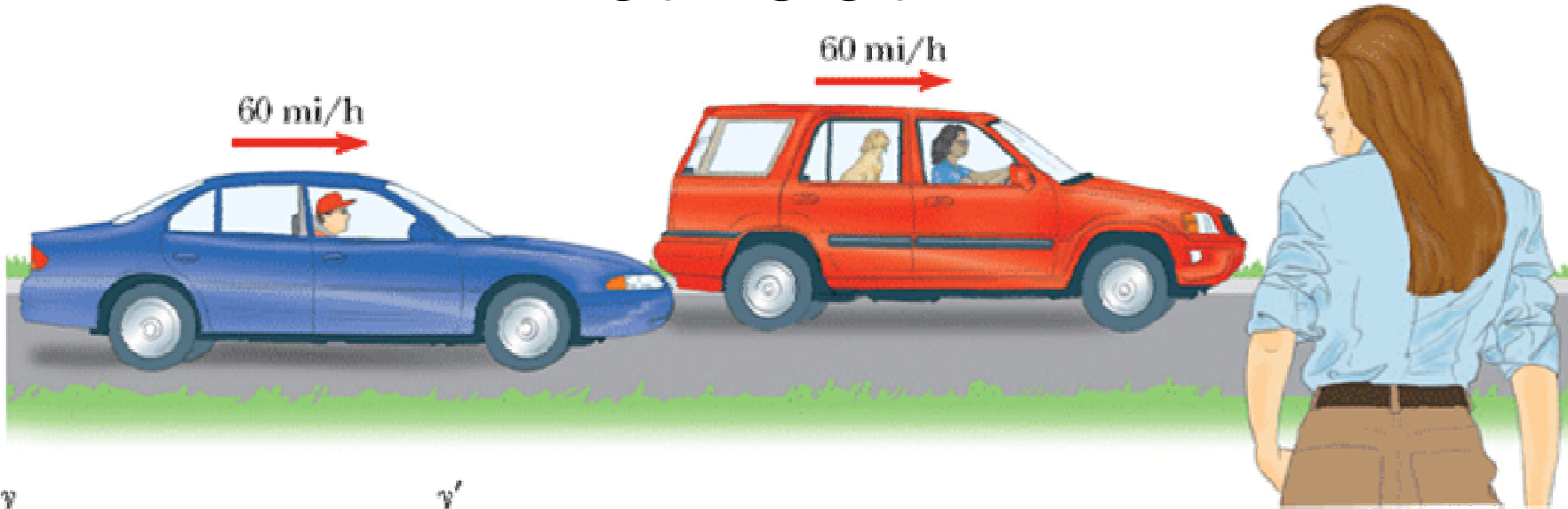
# Moti relativi



Velocità misurate rispetto  
all'osservatore fermo

Qual è la velocità della macchina  
rossa quando viene misurata  
dall'osservatore nella macchina blu?

# Moti relativi



Macchina rossa = punto  $P$

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}t$$

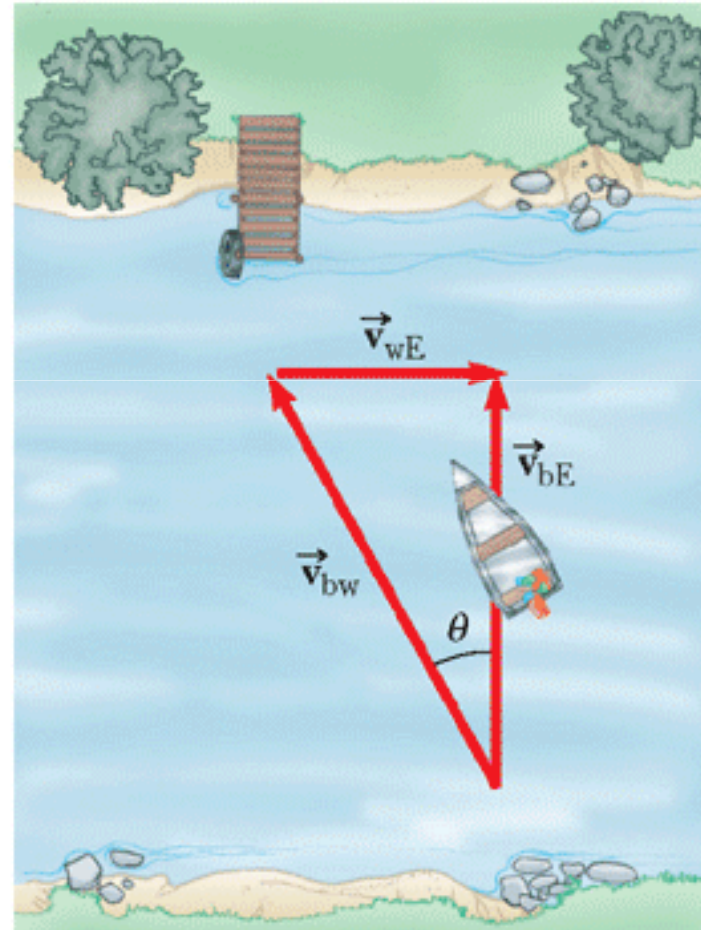
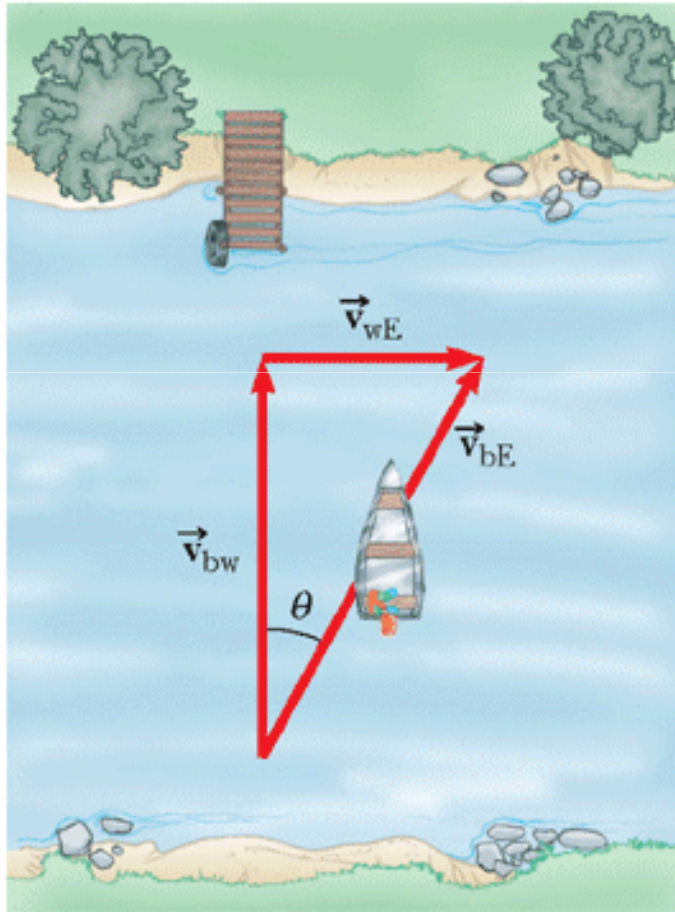
$$\vec{v}_{PO} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}$$

# Leggi di composizione dei moti

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}t$$

$$v_{PO} = \frac{d}{dt} r_{PO} = v_{PO'} + v_{O'O} \Rightarrow v_{PO'} = v_{PO} - v_{O'O}$$

# Esercizio su moti relativi

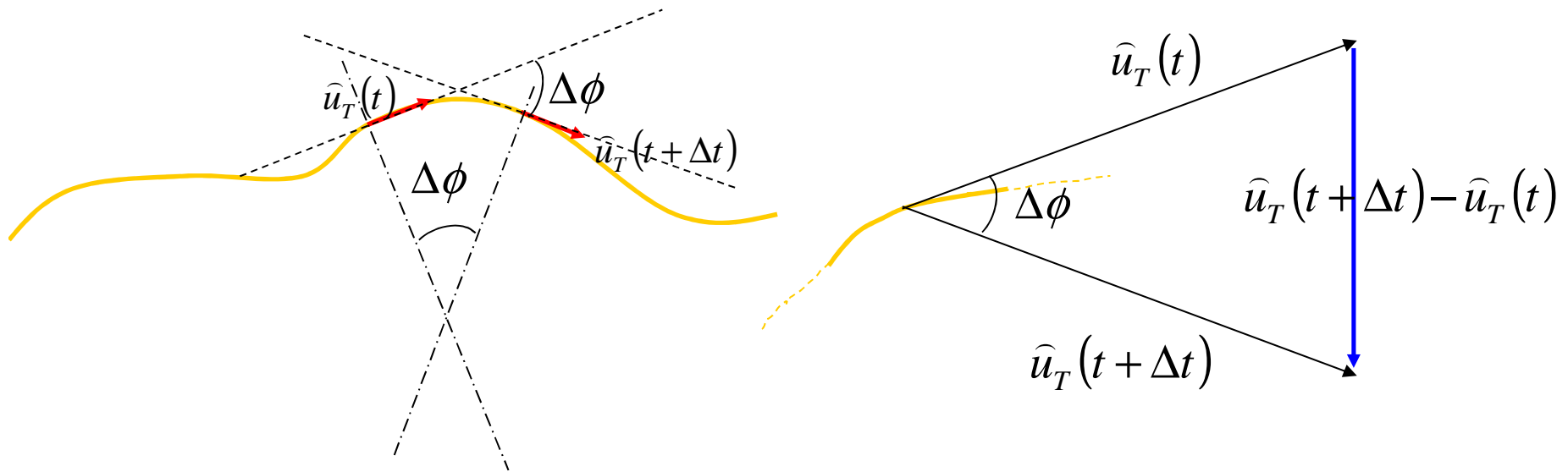


Quale direzione mantenere se si vuole che la barca prosegua perpendicolarmente alla riva?

# **DIMOSTRAZIONI E APPROFONDIMENTI**

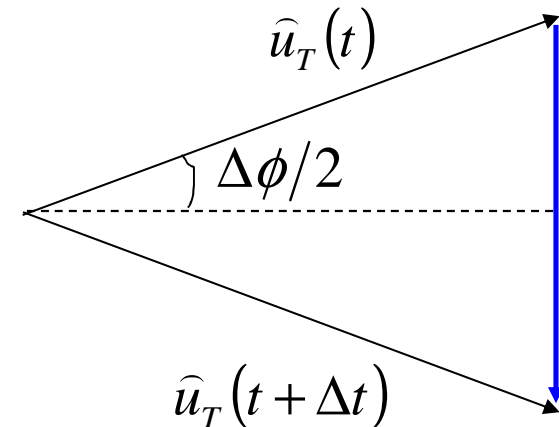
# Derivata del versore $\mathbf{u}_T$

- Calcoliamo la derivata di  $\mathbf{u}_T$  rispetto al tempo



# Derivata del versore $\mathbf{u}_T$

- Troviamo la differenza dei versori  $\mathbf{u}_T$  calcolati nei due istanti di tempo, con considerazioni geometriche
- La direzione sia individuata da un versore  $\mathbf{e}$ , che dipende dai due istanti di tempo
- Il modulo e' dato dalla formula trigonometrica  $2 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$
- Avremo  $\hat{\mathbf{u}}_T(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}_T(t) = 2 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}(t, \Delta t)$



# Derivata del versore $\mathbf{u}_T$

- La derivata è il limite del rapporto

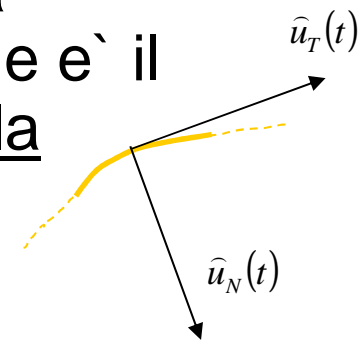
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{u}_T(t + \Delta t) - \hat{u}_T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ 2 \frac{\sin \Delta\phi/2}{\Delta t} \hat{e}(t, \Delta t) \right]$$

- Semplificando si ha:

$$\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \Delta\phi/2}{\Delta\phi/2} \right] \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{e}(t, \Delta t)$$

- Il primo termine vale 1, il secondo termine è la derivata temporale dell'angolo  $\phi$ , il terzo termine è il versore  $\mathbf{u}_N$  perpendicolare a  $\mathbf{u}_T$  e rivolto verso la convessità locale della traiettoria

$$\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_N(t)$$

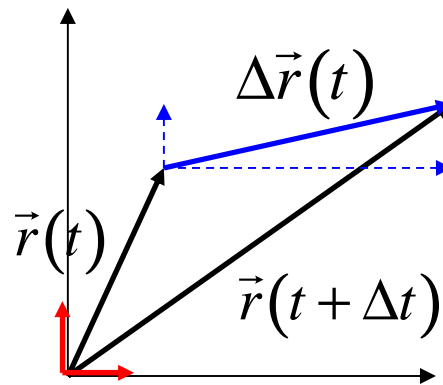


# Vettore spostamento

- In coordinate cartesiane lo spostamento si può esprimere

$$\Delta\vec{r}(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]\hat{u}_x + [y(t + \Delta t) - y(t)]\hat{u}_y$$

- Ove non c'è ambiguità sui versori da usare, in quanto sono gli stessi per i due vettori posizione



# Vettore posizione

- Il vettore posizione si può quindi scrivere

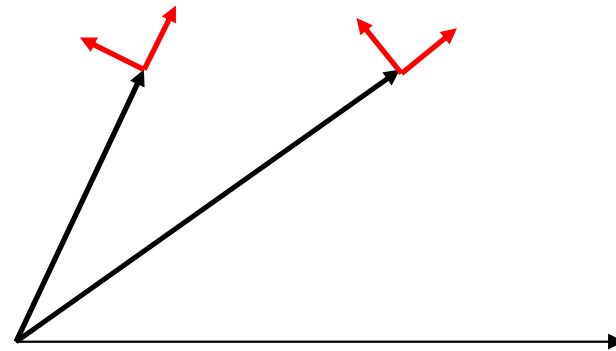
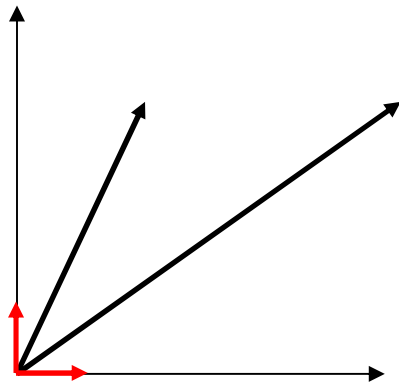
- $$\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

- $$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{u}_\rho + r_\phi(t)\hat{u}_\phi$$

- Le funzioni che moltiplicano i versori sono dette proiezioni del vettore lungo le direzioni dei versori stessi

# Vettore posizione

- Una importante differenza tra sistema cartesiano e polare è che nel primo l'orientazione dei versori è indipendente dal particolare vettore posizione e quindi dal tempo, mentre nel secondo in generale dipende da questi



# Interpretazione vettoriale della velocità angolare $\omega$

- Definiamo il vettore *velocità angolare* di modulo

$$|\omega| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

- La direzione sia per definizione perpendicolare al piano del moto circolare
- Il verso per convenzione sia determinato con regola della mano destra: è indicato dal pollice e la rotazione dalle altre quattro dita
- Introduciamo l'asse di rotazione: è la retta perpendicolare al piano del moto circolare passante per il centro della circonferenza che è la traiettoria del motop
- Il vettore  $\omega$  è *applicato ad un punto* (arbitrario) *dell'asse di rotazione*

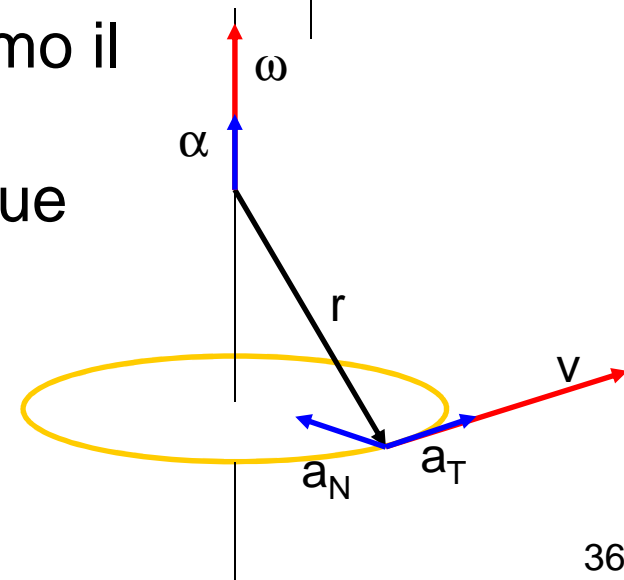
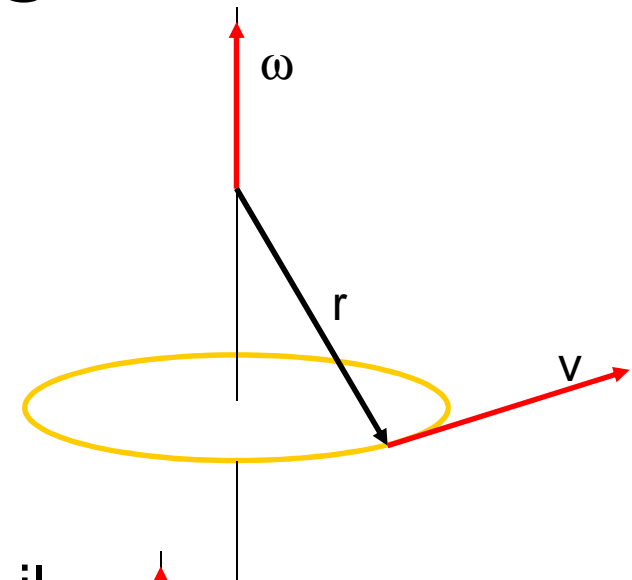
# Vettore velocita` angolare $\omega$

- Possiamo esprimere allora la velocita` come

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Ove  $r$  e` il vettore distanza tra il punto di applicazione di  $v$  e quello di  $\omega$  (punto arbitrario sull'asse di rotazione)
- Derivando  $\vec{\omega}$  rispetto al tempo otteniamo il vettore accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$
- Calcoliamo l'accelerazione  $a$  con le due componenti tangenziale e centripeta:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_N\end{aligned}$$



# Vettore velocita` angolare $\omega$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \hat{u}_N & \hat{u}_t & \hat{z} \\ 0 & 0 & \alpha \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{u}_N \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \hat{u}_t \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ r & 0 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -r & 0 \end{vmatrix} = \alpha r \hat{u}_t$$

$$|\vec{a}_N| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \begin{pmatrix} \hat{u}_N & \hat{u}_t & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega r & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{u}_N \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ \omega r & 0 \end{vmatrix} - \hat{u}_t \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega r \end{vmatrix} = \omega^2 r \hat{u}_N$$

