

Soluzione problemi di cinematica esonero del 04-04-2014

- 1) Un'automobile A viaggia lungo una strada rettilinea con velocità costante di modulo v_A . Una seconda automobile B, ferma ad un lato della strada, si mette in marcia nella stessa direzione di moto di A con accelerazione costante di modulo a_B quando A è ancora lontana da essa una distanza d . Si determini il valore minimo di a_B affinché A non raggiunga B e si traccino i grafici qualitativi $v(t)$ e $s(t)$ delle due macchine

SOLUZIONE:

Consideriamo un sistema di riferimento unidimensionale fissando come verso positivo quello concorde al moto delle due auto; fissiamo l'origine nel punto in cui si trova l'auto A all'istante $t=0$. Con questa scelta del sistema di riferimento, le leggi orarie delle due auto sono, rispettivamente:

$$A) x_A(t) = v_A t$$

$$B) x_B(t) = d + \frac{1}{2} a_B t^2$$

Affinchè A non raggiunga B, bisogna uguagliare le due leggi orarie e imporre che l'equazione risultante non ammetta soluzione per alcun t , ossia che il determinante dell'equazione risultante di 2 grado sia minore di zero:

$$v_A t = d + \frac{1}{2} a_B t^2 \rightarrow a_B t^2 - 2v_A t + d = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = v_A^2 - a_B d \leq 0 \rightarrow a_B \geq \frac{v_A^2}{d}$$

Dunque, il valore minimo di a_B affinché A raggiunga B vale $\frac{v_A^2}{d}$; $\forall a_B > \frac{v_A^2}{d}$, A non raggiungerà B.

- 2) Una particella, inizialmente ferma nell'origine del sistema di riferimento, ha la seguente legge oraria $x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \frac{c}{k} t$, con c e k costanti. Si determinino:

I) le dimensioni della costante $\frac{c}{k}$

II) i valori di A e ϕ in funzione di c e k

III) la velocità istantanea $v(t)$

IV) l'accelerazione istantanea in funzione di $x(t)$

SOLUZIONE:

- I) La costante $\frac{c}{k}$ deve avere dimensioni tali che il prodotto $\frac{c}{k} t$ sia uno spazio; ciò implica che $\left[\frac{c}{k} \right] = \left[\frac{m}{s} \right]$.

È da notare che non è possibile determinare univocamente le dimensioni delle due costanti c e k singolarmente; ci sono infatti infinite combinazioni tali che il rapporto $\left[\frac{c}{k}\right] = \left[\frac{m}{s}\right]$; ad esempio: $[c] = [m]$ e $[k] = [s]$, $[c] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$ e $[k] = [s^{-2}]$, $[c] = [m^3]$ e $[k] = [s^{-1}m^{-2}]$, etc.

II) La particella all'istante $t=0$ parte dall'origine del sistema di riferimento: imponiamo, dunque, la condizione che $x(0)=0$:

$$x(0) = 0 = A \operatorname{sen} \varphi$$

Derivando la legge oraria rispetto al tempo, si ottiene la funzione $v(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{c}{k}$$

Imponiamo la condizione per cui per $t=0$, $v(0)=0$ (particella ferma):

$$v(0)=0 = A\omega \cos \varphi + \frac{c}{k}$$

Otteniamo quindi un sistema di due equazioni in due incognite (A e φ) in cui compaiono i parametri c e k :

$$0 = A \operatorname{sen} \varphi$$

$$0 = A\omega \cos \varphi + \frac{c}{k} \rightarrow A \cos \varphi = -\frac{c}{\omega k}$$

Dalla prima equazione scritta si osserva subito che un possibile valore per φ è 0 (o π).

Elevando al quadrato la 1 e la 2 equazione e sommando membro a membro si ottiene:

$$A^2 (\operatorname{sen} \varphi)^2 + A^2 (\cos \varphi)^2 = \frac{c^2}{k^2 \omega^2} \rightarrow A^2 = \frac{c^2}{k^2 \omega^2} \rightarrow A = \pm \frac{c}{\omega k} \text{ (la soluzione positiva corrispondente a } \varphi = 0, \text{ quella negativa a } \varphi = \pi).$$

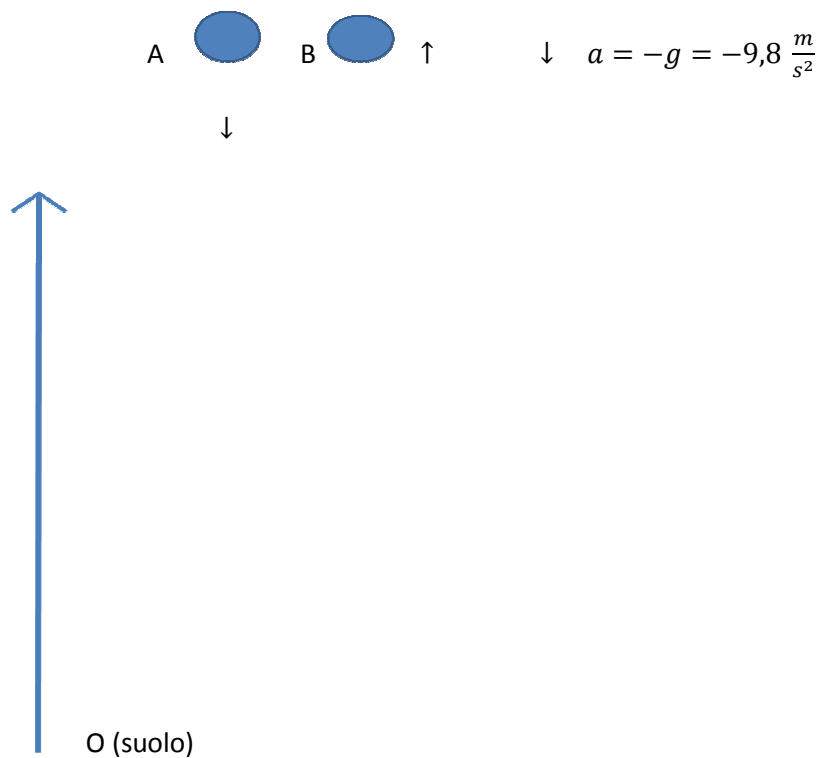
III)
$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{c}{k}$$

IV)
$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) + \frac{c\omega^2}{k} t$$

3) In assenza di attrito, se si lascia cadere una sferetta verso terra essa cade con accelerazione g diretta verso il basso. Un'altra sferetta è lanciata in diagonale verso il basso con una velocità diversa da zero. Come cambia la sua accelerazione rispetto al caso precedente? Sempre in assenza di attrito, le due sferette sono lanciate dalla stessa altezza h . Una è lanciata verso l'alto con velocità V , l'altra è lanciata nello stesso istante, con la stessa velocità, ma verso il basso. Quale delle due sferette arriverà con velocità maggiore in modulo al suolo?

SOLUZIONE:

- 1) L'accelerazione della sferetta non cambia se essa viene lasciata cadere verso il basso o in diagonale, in quanto vale sempre g ($\approx 9,81 \frac{m}{s^2}$). Ciò che cambia lanciando la pallina in diagonale è solo la direzione della sua velocità iniziale, e il tipo di moto che non sarà più unidimensionale bensì parabolico.
- 2) Il moto delle due palline è unidimensionale e avviene lungo la direzione verticale; fissiamo l'origine del sistema di riferimento al suolo e il suo verso positivo come in figura:



Scriviamo le leggi orarie delle due palline nel sistema di riferimento scelto:

$$x_A(t) = h - Vt - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_A(t) = -V - gt$$

$$x_B(t) = h + Vt - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_B(t) = V - gt$$

Un modo semplice (anche se un po' laborioso!) per rispondere al quesito è quello di calcolare i tempi t^* impiegati dalle due palline per arrivare al suolo e sostituire tali valori nelle equazioni $v_A(t)$ e $v_B(t)$, confrontando i due valori ottenuti, $v_A(t^*)$ e $v_B(t^*)$:

$$x_A(t^*) = 0 \rightarrow h - Vt^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \rightarrow t^* = \frac{-2V + \sqrt{4V^2 + 8gh}}{2g} \text{ (delle due soluzioni scegliamo solo quella positiva, che ha senso fisico)}$$

$$x_B(t^*) = 0 \rightarrow h + Vt^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \rightarrow t^* = \frac{2V + \sqrt{4V^2 + 8gh}}{2g}$$

$$v_A(t^*) = -V - g \left(\frac{-2V + \sqrt{4V^2 + 8gh}}{2g} \right) = \frac{\sqrt{4V^2 + 8gh}}{g}$$

$$v_B(t^*) = V - g \left(\frac{2V + \sqrt{4V^2 + 8gh}}{2g} \right) = \frac{\sqrt{4V^2 + 8gh}}{g}$$

Dunque, le due palline arrivano a terra con la stessa velocità.

Allo stesso risultato si poteva pervenire ragionando in altro modo: calcoliamo il tempo impiegato dalla pallina B per tornare ad altezza h rispetto al suolo dopo essere arrivata nel punto più alto ed aver invertito il senso del moto; tale istante di tempo t^* si ottiene imponendo che $x_B(t^*) = h$:

$h + Vt^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = h \rightarrow t^* = \frac{2V}{g}$, scartando la soluzione banale $t^* = 0$ (in quanto anche all'istante iniziale la pallina si trova a quota h dal suolo).

$$v_B(t^*) = V - g\left(\frac{2V}{g}\right) = -V$$

Dunque, la pallina B ritorna a quota h con velocità $-V$, così come la pallina A.

Le condizioni iniziali delle due palline A e B (spazio iniziale e velocità iniziale) sono dunque le stesse, dunque necessariamente le palline giungeranno al suolo con uguale velocità.

- 4) Un'automobile in moto con velocità di modulo v_0 e, muovendosi di moto rettilineo, comincia a frenare fino ad arrestarsi. Si determini il tempo di frenata t e la distanza percorsa l dal momento in cui si inizia a frenare fino alla fermata per il seguente valore dell'accelerazione impressa: $A(t) = b(v(t) + v_0)$. Si tracci un grafico qualitativo della velocità e della legge oraria.

SOLUZIONE:

Ricaviamo le equazioni di $v(t)$ e di $x(t)$:

$$A(t) = b(v(t) + v_0) \rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = b(v(t) + v_0)$$

Risolviamo l'equazione per separazione di variabili:

$$\frac{dv(t)}{v(t)+v_0} = bdt \rightarrow \int \frac{dv(t)}{v(t)+v_0} = \int bdt \rightarrow \ln(v(t) + v_0) = bt + k \rightarrow v(t) + v_0 = e^{bt+k} = e^{bt} \cdot e^k$$

Per determinare il valore della costante k , imponiamo la condizione che per $t=0$, $v(t=0) = v_0$:

$$v_0 + v_0 = e^k \rightarrow e^k = 2v_0$$

Dunque:

$$v(t) = 2v_0 \cdot e^{bt} - v_0$$

Ricaviamo la legge oraria sapendo che $x(t) = \int v(t)dt$:

$$x(t) = \int (2v_0 \cdot e^{bt} - v_0)dt = \frac{2v_0}{b} \cdot e^{bt} - v_0t + q,$$

dove di nuovo la costante q si ottiene considerando le condizioni al contorno, ossia che $x(t=0)=0$ (in assenza di informazioni, assumiamo che l'auto parta dall'origine del sistema di riferimento per $t=0$).

$$x(0) = 0 = \frac{2v_0}{b} + q \rightarrow q = -\frac{2v_0}{b}$$

Quindi:

$$x(t) = \frac{2v_0}{b} \cdot e^{bt} - v_0 t - \frac{2v_0}{b}$$

Ricaviamo il tempo di frenata t^* imponendo la condizione che $v(t^*) = 0$:

$$v(t^*) = 2v_0 \cdot e^{bt^*} - v_0 = 0 \rightarrow e^{bt^*} = \frac{1}{2} \rightarrow t^* = \frac{1}{b} \ln \frac{1}{2} \rightarrow t^* = -\frac{\ln 2}{b}$$

Lo spazio percorso prima che l'automobile si fermi si ottiene sostituendo t^* nella legge oraria:

$$x(t^*) = \frac{2v_0}{b} e^{-\ln 2} + v_0 \frac{\ln 2}{b} - \frac{2v_0}{b} = -\frac{v_0}{b} + v_0 \frac{\ln 2}{b}$$

- 5) Una particella è in moto con velocità di modulo v_0 . Ad un certo istante, mantenendosi su una traiettoria rettilinea, comincia a frenare sotto l'azione di una forza. Si determini l'istante di tempo in cui la particella inverte la direzione di moto e la velocità per $t \rightarrow \infty$ se l'accelerazione è del tipo:

$$A(t) = \gamma e^{-\frac{t}{\tau}}. \text{ Si tracci un grafico qualitativo della velocità e della legge oraria}$$

SOLUZIONE:

Ricaviamo le equazioni di $v(t)$ e di $x(t)$:

$$A(t) = \gamma e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \gamma e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Risolviamo l'equazione per separazione di variabili:

$$dv(t) = \gamma e^{-\frac{t}{\tau}} dt \rightarrow \int dv = \int \left(\gamma e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt \rightarrow v(t) = -\gamma \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + k$$

Ricaviamo la costante k sapendo che all'istante iniziale $t=0$, $v(t=0) = v_0$:

$$v(t=0) = v_0 = -\gamma \tau + k \rightarrow k = \gamma \tau + v_0$$

Dunque:

$$v(t) = -\gamma \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \gamma \tau + v_0$$

Ricaviamo la legge oraria sapendo che $x(t) = \int v(t) dt$:

$$x(t) = \int \left(-\gamma \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \gamma \tau + v_0 \right) dt \rightarrow x(t) = -\gamma \tau \cdot (-\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0 t + q$$

ove di nuovo la costante q si ottiene considerando le condizioni al contorno, ossia che $x(t=0)=0$ (in assenza di informazioni, assumiamo che l'auto parta dall'origine del sistema di riferimento per $t=0$):

$$x(0) = 0 = \tau^2 + q \rightarrow q = -\tau^2$$

Quindi:

$$x(t) = \gamma \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0 t - \tau^2$$

Ricaviamo il tempo t^* in cui l'automobile si ferma e inverte il senso del moto imponendo la condizione che $v(t^*) = 0$:

$$0 = -\gamma e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \gamma + v_0 \rightarrow e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\gamma + v_0}{\gamma} \rightarrow -\frac{t^*}{\tau} = \ln\left(\frac{\gamma + v_0}{\gamma}\right) \rightarrow t^* = -\tau \ln\left(\frac{\gamma + v_0}{\gamma}\right)$$

Per $t \rightarrow \infty$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau + v_0 \right) = \gamma + v_0 \text{ (velocità limite).}$$

6) Una particella, inizialmente ferma, comincia sotto l'effetto di una forza a muoversi lungo l'asse x con la seguente accelerazione: $A(t) = (bt + c)$. Si determini:

I) la velocità in funzione del tempo e la legge oraria della particella ed i loro grafici qualitativi

II) le dimensioni e le condizioni su b e c affinché la particella inverta il moto e la distanza percorsa prima di tale inversione del moto

III) come cambia qualitativamente il moto della particella nel caso in cui essa parta con V diversa da zero

SOLUZIONE:

Ricaviamo le equazioni di $v(t)$ e di $x(t)$:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (bt + c) dt = \frac{b}{2} t^2 + ct + k$$

Ricaviamo la costante k imponendo la condizione che $v(t=0)=0$:

$$v(t=0)=0=k \rightarrow k = 0$$

Dunque:

$$v(t) = \frac{b}{2} t^2 + ct$$

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{b}{2} t^2 + ct \right) dt = \frac{b}{6} t^3 + c \frac{t^2}{2} + q$$

ove di nuovo la costante q si ottiene considerando le condizioni al contorno, ossia che $x(t=0)=0$ (in assenza di informazioni, assumiamo che la particella parta dall'origine del sistema di riferimento per $t=0$):

$$x(t=0)=0=q \rightarrow x(t) = \frac{b}{6} t^3 + c \frac{t^2}{2}$$

Inoltre:

$$[c] = \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$[b] = \left[\frac{m}{s^3} \right]$$

Affinchè la particella inverta il moto, essa deve prima fermarsi; determiniamo dunque il tempo di arresto t^* imponendo che $v(t^*) = 0$:

$$v(t^*) = 0 = \frac{b}{c} \frac{t^2}{2} + ct \rightarrow t^* = -\frac{2c}{b}$$

Affinchè la soluzione abbia senso fisico, deve essere $t^* > 0 \rightarrow c$ e b devono avere segni discordi.

Se la particella ha una velocità iniziale V , si modifica il valore della costante k calcolata inizialmente imponendo che $v(0)=0$:

$v(0)=V=k$, da cui:

$$v(t) = \frac{b}{c} \frac{t^2}{2} + ct + V$$

e:

$$x(t) = \frac{b}{c} \frac{t^3}{6} + c \frac{t^2}{2} + Vt$$

Calcolando il tempo di frenata t^* si ha:

$$v(t^*) = 0 = \frac{b}{c} \frac{t^2}{2} + ct + V$$

Imponiamo che il discriminante dell'equazione sia positivo:

$$\frac{\Delta}{4} = c^2 - 2Vb > 0$$

- 7) Un'automobile è in moto con velocità di modulo v_0 . Ad un certo istante, mantenendosi su una traiettoria rettilinea, comincia a frenare fino ad arrestarsi. Si determini il tempo di frenata t e la distanza dal momento in cui si inizia a frenare fino alla fermata se l'accelerazione è del tipo:

$$A(t) = -\frac{k}{v(t)}$$

Si tracci un grafico qualitativo della velocità e della legge oraria

SOLUZIONE:

Determiniamo le equazioni $v(t)$ e $x(t)$:

$$A(t) = -\frac{k}{v(t)} \rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k}{v(t)}$$

Risolviamo l'equazione per separazione di variabili:

$$v dv = -k dt \rightarrow \int v dv = \int -k dt \rightarrow \frac{v^2(t)}{2} = -kt + q \rightarrow v(t) = \sqrt{-2kt + 2q}$$

Determiniamo la costante q imponendo la condizione che $v(t=0)=v_0$:

$$v_0 = \sqrt{2q} \rightarrow q = \frac{v_0^2}{2}$$

Dunque:

$$v(t) = \sqrt{-2kt + v_0^2}$$

Ricaviamo la legge oraria $x(t)$ sapendo che $x(t) = \int v(t)dt$:

$$x(t) = \int \sqrt{-2kt + v_0^2} dt = \frac{2}{3(-2k)} (-2kt + v_0^2)^{\frac{3}{2}} + m$$

Determiniamo la costante m imponendo la condizione che $x(t=0)=0$:

$$x(t=0)=0 = -\frac{1}{3k} v_0^3 + m \rightarrow m = \frac{1}{3k} v_0^3$$

Quindi:

$$x(t) = -\frac{1}{3k} (-2kt + v_0^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3k} v_0^3$$

Determiniamo il tempo di frenata t^* imponendo la condizione che $v(t^*) = 0$:

$$v(t^*) = 0 = \sqrt{-2kt^* + v_0^2} \rightarrow t^* = \frac{v_0^2}{2k}$$

Sostituendo t^* nella legge oraria, si ottiene lo spazio richiesto:

$$x(t^*) = -\frac{1}{3k} (-2kt^* + v_0^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3k} v_0^3 = \frac{1}{3k} v_0^3$$

8) Un'automobile A viaggia lungo una strada rettilinea con velocità costante di modulo v_A . Una seconda automobile B, ferma ad un lato della strada, si mette in marcia nella stessa direzione di moto di A con accelerazione costante di modulo a_B quando A è ancora lontana da essa a una distanza d . Si determini il valore minimo di v_A affinché A raggiunga B e si traccino i grafici qualitativi $v(t)$ e $s(t)$ delle due macchine

SOLUZIONE:

Il moto è unidimensionale; fissiamo come verso positivo quello corrispondente al senso di marcia delle due auto e supponiamo che all'istante $t=0$ l'auto A si trovi nell'origine del sistema di riferimento. In queste ipotesi, scriviamo le equazioni del moto delle due automobili:

$$\text{Auto A: } x_A(t) = v_A t$$

$$\text{Auto B: } x_B(t) = d + \frac{1}{2} a_B t^2$$

Uguagliamo le due leggi orarie per determinare l'istante di tempo t^* in cui le due auto si incontrano, che sarà funzione dei parametri a_B e v_A :

$$x_A(t^*) = x_B(t^*)$$

$$v_A t^* = d + \frac{1}{2} a_B t^{*2} \rightarrow a_B t^{*2} - 2v_A t^* + 2d = 0$$

Imponiamo che il delta dell'equazione sia positivo o al più uguale a 0:

$$\frac{\Delta}{4} = v_A^2 - 2a_B d \geq 0 \rightarrow v_A \geq \sqrt{2a_B d}$$

- 9) All'istante $t = 0$ da una quota h si lascia cadere una sferetta metallica da ferma e all'istante $t = \tau$ si lancia verso il basso con velocità V una seconda sferetta. Supponendo che non vi sia rimbalzo al suolo, si determini il valore minimo di V per il quale le due sferette si scontrano prima di arrivare al suolo e si traccino i grafici qualitativi $v(t)$ e $s(t)$ delle due sferette

SOLUZIONE:

Il moto delle due palline è unidimensionale, e si svolge lungo la direzione verticale (moto di caduta). Fissiamo come verso positivo del sistema di riferimento quello concorde al senso del moto (verso il basso), e poniamo l'origine nel punto di partenza delle due palline, ad una distanza h dal suolo. Con queste ipotesi, le leggi orarie delle due palline sono rispettivamente:

$$x_A(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_B(t) = V(t - \tau) + \frac{1}{2} g (t - \tau)^2$$

in quanto la pallina B parte dopo un tempo $t = \tau$ rispetto alla pallina A. Per convincersi che la legge oraria di B sia proprio questa, si può osservare che $x_B(\tau) = 0$, in accordo con il fatto che all'istante $t = \tau$ la pallina si trovi nell'origine.

Per determinare l'istante di tempo t^* in cui le due palline si incontrano, uguagliamo le due leggi orarie:

$$x_A(t^*) = x_B(t^*)$$

$$\frac{1}{2} g t^2 = V(t - \tau) + \frac{1}{2} g (t - \tau)^2 \rightarrow t^* = \frac{\frac{1}{2} g \tau^2 - V \tau}{g \tau - V}$$

Tale tempo deve essere minore del tempo di caduta della pallina A, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, in quanto le due palline devono incontrarsi prima che A tocchi il suolo:

$$t^* < \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}g\tau^2 - V\tau}{g\tau - V} < \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

da cui, risolvendo rispetto a V si ottiene:

$$V < \frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}2g\tau - g\tau^2}{2\sqrt{\frac{2h}{g}} - 2\tau}$$