UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Percorsi Abilitanti Speciali (PAS), Area Didattica di Scienze MFN

A.A. 2013/14

DIDATTICA DELLA FISICA

Docente: Lorenzo Manti, Dipartimento di Fisica, Stanza 1G14

tel. 081 676262; e-mail: manti@na.infn.it

Propagazione degli errori massimi: riepilogo

Sia x una grandezza legata ad altre due, a e b, le quali sono misurate direttamente.

Se:

$x = a + b$ con $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$ $\longrightarrow$ $\Delta x = \Delta a + \Delta b$

$x = a - b$ con $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$ $\longrightarrow$ $\Delta x = \Delta a + \Delta b$

$x = a\, b$, con $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$ $\longrightarrow$ $\Delta x = a\, \Delta b + b\, \Delta a$

in questo ultimo caso conviene usare il concetto di *errore relativo* e scrivere:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

O, meglio:

$$\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

dovendo essere l'errore relativo una grandezza positiva a prescindere dal valore della grandezza fisica cui è associato

Anche nel caso del quoziente, ossia se $x = \frac{a}{b}$, si ha che

l'errore propagato relativo si può scrivere come:

$$\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

Nel caso la grandezza misurata sia legata a quella misurata direttamente da un'espressione del tipo prodotto per una costante, ossia x = kb con k costante, l'errore massimo su x sarà:

$$\Delta x = |k| \Delta b$$

Nel caso, poi, la relazione funzionale che lega la grandezza misurata indirettamente sia quella di elevazione a potenza, cioè se la grandezza in questione è legata a quella misurata direttamente da una relazione del tipo: $x = a^n$, l'errore sarà più

semplicemente scritto nella forma di errore relativo come

$$\frac{\Delta x}{|x|} = n \frac{\Delta a}{|a|}$$

Nel caso di una relazione funzionale generica y = f(x), si dimostra che l'errore massimo è genericamente dato da:

$$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x$$

Se, poi, due grandezze x e y sono legate ad una terza grandezza q da una generica relazione funzionale

$$q = q\ (x, y)$$

e sia la misura di x che quella di y siano affette da errori massimi, l'errore si propaga su q secondo la relazione:

$$\Delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \Delta y$$

Infine, nel caso generale in cui y sia funzione di k grandezze x_j misurate direttamente, ossia:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

L'errore massimo propagato su y sarà:

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \Delta x_j$$

Propagazione degli errori casuali

Si supponga che una grandezza fisica sia legata ad un’altra grandezza x misurata direttamente da una relazione del tipo

$$y = f(x)$$

Si eseguano n misure dirette indipendenti e nelle stesse condizioni della grandezza x, in modo tale cioè che queste si assumano affette da un errore casuale (statistico), da cui si calcolino la media aritmetica $\bar{x}$ e la deviazione standard (scarto quadratico medio) $\sigma(x)$.

Si può dimostrare che per il valor medio, ossia la migliore stima del valore vero di y vale:

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

mentre per la deviazione standard si trova che :

$$\sigma[f(x)] = \left|\frac{df}{dx}\right| \sigma(x)$$

Questo risultato è formalmente identico a quello trovato per gli errori massimi se si pone $\sigma(x)$ al posto di Δx.

Nel caso di due applicazioni di uso frequente:

- Moltiplicazione per una costante y = a x

$$\sigma(y) = |a|\,\sigma(x)$$

- Elevamento a potenza $y = x^a$

$$\frac{\sigma(y)}{y} = |a|\,\frac{\sigma(x)}{x}$$

Si dimostra, in generale, che, se una grandezza è legata ad altre due da una relazione di somma, ossia q = x + y, con x e y misurate direttamente con errori σ_x e σ_y **indipendenti e casuali**, una stima dell'errore finale su q, più realistica (e più piccola) dell'errore massimo, può essere ottenuta *sommando le incertezze in quadratura*.

La somma $\sigma_x + \sigma_y$ è, infatti, una sovrastima dell'incertezza massima su q perché è improbabile che si commetta un errore nella stima sia di x che di y pari alla somma delle loro incertezze $\sigma_x + \sigma_y$ dal momento che, per esempio, si può verificare una cancellazione/compensazione parziale degli errori su x e y.

- *Pertanto, se x e y sono misurati indipendentemente e gli errori sono casuali, una scelta migliore per esprimere l'errore casuale propagato è*

$$\sigma_q = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2} \leq \sigma_x + \sigma_y$$

Questo vale anche per le deviazioni standard della media delle singole variabili.

Nel caso più generale, in cui una grandezza y sia funzione di più grandezze misurate direttamente e ciascuna affetta da errori casuali, ossia $y = f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ con errori di entità $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k$, ci si trova in una situazione diversa dal caso degli errori massimi, in quanto, ripetendo le misure, gli errori casuali si possono combinare in maniera imprevedibile.

Si può dimostrare che le somme in quadrature rappresentano le incertezze propagate anche nel caso di differenze, prodotti e quozienti di grandezze.

In questo caso, la formula generale di propagazione degli errori statistici per la varianza è data dalla somma in quadratura dei prodotti delle derivate parziali per gli errori statistici delle singole variabili, ossia:

$$\sigma^2(y) = \sum_{j=1}^{k} (\frac{\partial f}{\partial x_j})^2 \sigma^2(x_j)$$

Quindi, la deviazione standard è data da:

$$\sigma(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\frac{\partial f}{\partial x_j})^2 \sigma^2(x_j)}$$

Casi frequenti:

- Somma o differenza g = x ± y

$$\sigma(g) = \sqrt{\sigma^2(x) + \sigma^2(y)}$$

- Combinazioni lineari g = ± ax ± by ±…

$$\sigma(g) = \sqrt{a^2\sigma^2(x) + b^2\sigma^2(y) + \cdots}$$

- Moltiplicazione o divisione g = x y o g = x/y

$$\frac{\sigma(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(z)}{z}\right)^2}$$

- Elevazione a potenza

$$f = x^n$$

$$\frac{\sigma(f)}{|f|} = |n| \frac{\sigma(x)}{|x|}$$

Combinazione di errori massimi e statistici

L'incertezza dipenderà dal tipo di errore:

- $\Delta M_Z = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial M_{G_i}} \right| \Delta M_{G_i}$ *se si hanno errori massimi (somma lineare)*
- $\delta_Z = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial M_{G_i}} \right)^2_{\overline{M_{G_i}}} \delta^2_{G_i}}$ *se si hanno errori statistici (somma in quadratura)*

Può verificarsi il caso in cui la misura di una grandezza fisica dipenda da grandezze affette sia da errori massimi che statistici. Se lo scopo è conoscere con "certezza" l'intervallo entro cui il valore vero della grandezza cade, si userà la trattazione degli errori massimi.

- *Se si hanno errori massimi e statistici insieme si userà la somma lineare tipica degli errori massimi usando Δm per la grandezza affetta da errore massimo e 3σ per quelle affette da errore statistico*
- *L'intervallo 3σ è un'ottima approssimazione dell'errore massimo*

Ciò ha la sua giustificazione teorica dal fatto che, nel caso ideale della distribuzione gaussiana, la probabilità di osservare uno scarto dalla media maggiore in modulo di 3σ è inferiore allo 0.3% (quindi molto piccola).

<u>I° esempio</u>: ***misura di g col pendolo semplice***

✓ *È noto che* $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ *e quindi* $g = 4\pi^2 L / T^2$

Si supponga che le misure, effettuate per un solo valore della lunghezza L del pendolo, siano:

- L = (92,95 ± 0,10) cm (errore massimo, legato alla sensibilità dello strumento)

- T = (1,936 ± 0,004) s (errore statistico dovuto al fatto di aver ripetuto molte volte la misura del period con uno strumento molto sensibile)

Sostituendo i valori medi nella formla ed eseguendo I calculi, si trova:

- $g = [4\ \pi^2\ (92.95\ cm)]/(1.936\ s)^2 = 979\ cm/s^2 = 9{,}79\ m/s^2$

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial L}\right| \Delta L + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right| \Delta T$$

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T^2}\,\Delta L + \frac{8\pi^2 L}{T^3}\,\Delta T$$

con $\Delta L = 0{,}10$ cm e $\Delta T = 3\ \sigma_T = 3 \times 0{,}004 = 0{,}012$ s

Quindi,

$$\Delta g = 13{,}2\ cm/s^2 = 0{,}13\ m/s^2$$

Pertanto, il risultato della misura sarà scritto come:

$$g = (9{,}79 \pm 0{,}13)\ m/s^2$$

A questo proposito va ribadita l'importanza della corretta scrittura del risultato della misura

- Se il risultato della misura di una massa è, ad esempio,

  $$m = 23 \pm 1\ g$$

  è importante rendersi conto che non avrebbe senso scrivere m=(23,12 ± 1) g poiché, se l'incertezza associata al risultato della misura è di 1 g, non ha alcuna rilevanza l'informazione sui decimi o i centesimi di grammo che, invece, possono derivare dal calcolo matematico del valore medio. Si deve quindi prestare attenzione al numero di cifre da riportare sia per il risultato della misura che per quello dell'incertezza.

Esempi:

- Si ottiene come valore misurato di una velocità 92,81 m/s e l'errore sulla misura è 0,3 m/s;
  - si deve scrivere velocità misurata = 92,8 ± 0,3 m/s
- Sia l'errore sulla misura 3 m/s,
  - si deve scrivere velocità misurata = 93 ± 3 m/s
- Se l'errore sulla misura è 30 m/s,
  - si deve scrivere velocità misurata = 90 ± 30 m/s

L’ultima cifra a destra con cui si scrive la stima del valore vero, ossia il valore medio, e quindi il **numero di cifre significative,** indica il grado di precisione con cui si ritiene di conoscere la grandezza che esso rappresenta e dà **un’indicazione approssimativa dell’incertezza relativa** per quella grandezza

Si ricorda che le cifre significative di un numero sono quelle che si incontrano a partire dalla prima cifra di sinistra diversa dallo zero: ad esempio, 0,0103 ha 3 cifre significative; 0,01032 ne ha 4.

- ✓ Anche lo zero dopo la virgola è una cifra significativa in quanto indica che la misura è nota fino alla cifra indicata: 7,10 ha 3 cifre significative mentre 7,1 ne ha solo 2.

Come per il risultato di una misura non ha senso riportare un numero di cifre significative arbitrariamente grande, così per l’errore, anch’esso misura di qualcosa, cioè dell’indeterminazione associata alla misura, non può essere espresso da un numero illimitato di cifre.

L’errore sperimentale deve di regola essere arrotondato a una cifra significativa

La regola per scrivere correttamente il risultato della misura è di arrotondare **prima l’incertezza** e poi, sulla base di quante cifre decimali l’errore eventualmente possiede, **arrotondare il valore stesso della misura**

Questo perché, nell'arrotondare l'errore, si deve tener conto che esso è a sua volta affetto da un'incertezza: in altre parole, si può fornire solo una stima dell'incertezza da cui è affetta una misura, la quale sarà tanto migliore quante più misure saranno state effettuate; tuttavia, questa stima sarà a sua volta un'approssimazione.

Un'eccezione a questa regola si ha quando la prima cifra dell'errore è 1 (o 2); in tal caso, si può esprimere l'errore anche con due cifre, specialmente se la seconda è 4, 5 o 6, perché l'arrotondamento ad una cifra significativa, in questo caso, potrebbe portare ad un errore relativo eccessivo

- Ad esempio, sia l'errore di una misura 0,015; se lo si approssima a 0,01, si commette un errore percentuale pari a $|(0{,}01\text{-}0{,}015)|/0{,}01= 50\%$, ma se si approssima 0,95 a 0.9, l'errore è solo $|(0{,}09\text{-}0{,}095)|/0{,}09=5{,}5\%$

In definitiva, le regole da osservare per scrivere il risultato della misura possono essere così riassunte:

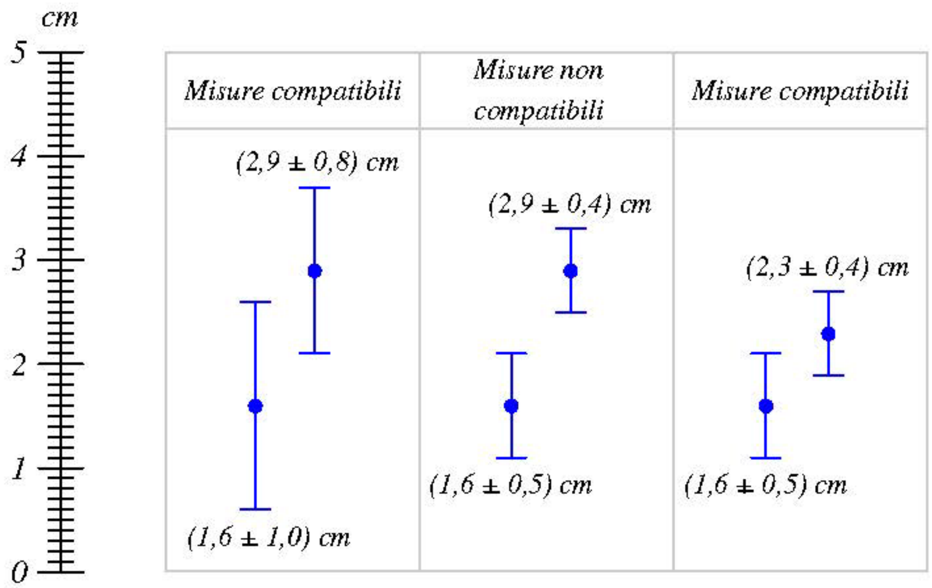
- **Arrotondare l'errore con una sola cifra significativa, massimo due se la prima cifra è 1 o 2**
- **Arrotondare il risultato della misura in modo che il numero di cifre dopo la virgola coincida con il numero di cifre dopo la virgola dell'errore arrotondato**

Il problema della compatibilità delle misure: valutazione della discrepanza

Spesso si presenta l'esigenza di confrontare fra loro i risultati di due misure della stessa grandezza o la misura di una variabile con i valori noti (accettati) di essa.

Due misure della stessa grandezza possono essere diverse, ma **compatibili, ossia non statisticamente discrepanti,** se la loro differenza cade all'interno dell'errore sperimentale, cioè se esiste un valore che rientra in entrambi gli intervalli delle misure.

Esempio:
le due misure (10 ± 2) cm e (7,5 ± 1,5) cm sono compatibili perché le misure tra 8 cm e 9 cm soddisfano entrambi gli intervalli. Al contrario, le due misure (10 ± 1) cm e (8,0 ± 0,5) cm non sono compatibili, perché la prima indica che la misura vera al minimo vale 9 cm, mentre la seconda dice che al massimo vale 8,5 cm



Se due misure della stessa grandezza non sono compatibili, si dice che vi è una **discrepanza**, definita numericamente come la differenza tra le migliori stime delle due misure

- Tra (10 ± 2) cm e (7,5 ± 1,5) cm la discrepanza è di 2,5 cm

Una **discrepanza può essere statisticamente significativa o meno.** Per stabilirlo, le discrepanze tra misure della stessa quantità devono essere valutate confrontandole con le incertezze sulle singole misure. Esistono due procedimenti a seconda del tipo di errore da cui le misure da confrontare sono affette.

<u>*Errori massimi*</u>

Se si misura una stessa grandezza fisica in due esperimenti o con due procedimenti diversi, è importante poter concludere se le due stime siano consistenti entro gli errori sperimentali. A tale scopo, detta d la discrepanza[1]

$$d = x_1 - x_2$$

si supponga che le stime di x_1 e x_2 siano affette da errori di tipo massimo, rispettivamente Δx_1 e Δx_2: affinché le due misure siano compatibili (statisticamente consistenti fra di loro), l'intervallo $x_1 - \Delta x_1 \div x_1 + \Delta x_1$ e l'intervallo $x_2 - \Delta x_2 \div x_2 + \Delta x_2$ devono avere almeno un punto in comune.

Questo si traduce analiticamente nel seguente criterio

- Detto Δd l'errore sulla discrepanza, dove $\Delta d = \Delta x_1 + \Delta x_2$ per le formule di propagazione degli errori massimi, se

[1] Definire $d = x_2 - x_1$ è del tutto equivalente.

l'estremo superiore di un intervallo coincide con l'estremo inferiore dell'altro, la discrepanza in modulo coincide con il suo errore, cioè $d = \Delta d$, mentre se gli intervalli hanno più punti in comune $|d| < \Delta d$ e se non hanno punti in comune $|d| > \Delta d$; pertanto, la regola è che, detto t il rapporto $|d|/ \Delta d$, se $t \leq 1$, la discrepanza non è significativa

Errori statistici

Di una stessa grandezza fisica siano note due diverse stime x_1 e x_2 con le corrispondenti incertezze statistiche σ_{x1} e σ_{x2}. Se tali valori non sono compatibili, ossia la loro discrepanza è statisticamente significativa, esisteranno due distribuzioni gaussiane, centrate sui rispettivi valori attesi della x_1 e x_2, e con diverse σ.

Se si considera la discrepanza d come una variabile casuale data da $d = x_1 - x_2$, essa si distribuisce secondo una gaussiana centrata sullo zero e con deviazione standard σ_d data, secondo la formula di propagazione degli errori statistici, da $\sigma_d = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}$. Di nuovo, il criterio da seguire è analizzare il rapporto t fra $|d|$ e σ_d: se t è molto grande, significa che la discrepanza cade sulle code della distribuzione, il che può essere causato da motivi statistici o per errori sistematici che rendono grande la discrepanza. Per evitare di assumere per buone ipotesi false, per convenzione si assumono significative le discrepanze per quali risulti un valore di t maggiore di 1.96, cui corrisponde cioè una probabilità[2] P (al di fuori di $t\sigma$) < 5%

[2] Si ricordi che ciò si rifà al concetto di intervallo di confidenza e quindi alla probabilità di ottenere un risultato della misura entro $t\sigma$ dal valore atteso: nel

Media pesata

Spesso capita di dover combinare i risultati di misure distinte ed indipendenti, ad esempio misure di una stessa grandezza fisica fatte in laboratori diversi e/o con diversi apparati o, comunque, con precisioni (varianze) diverse tra loro, per ricavarne una singola migliore stima.

Si supponga che due studenti, A e B, misurino una stessa grandezza x ed ottengano questi risultati:

$$\text{studente A:} \quad x = x_A \pm \sigma_A$$
$$\text{studente B:} \quad x = x_B \pm \sigma_B$$

e che le due misure siano consistenti, cioè che la discrepanza $|x_A - x_B|$ non sia significativa. Chiaramente, se le due incertezze σ_A e σ_B sono uguali, si applica semplicemente la media matematica delle due misure.

Se le incertezze sono diverse, invece, si deve trovare un modo per dare "più importanza" alla misura più precisa.

Applicando il principio della massima verosimiglianza ed assumendo che entrambe le misure siano governate dalla distribuzione di Gauss, la probabilità che si ottengano le due misure, indicato con X il valor vero incognito è data dall'espressione:

---

nostro contesto, minore è p, minore è il rischio di star escludendo un'ipotesi vera.

$$P_X(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-(x_A - X)^2 / 2\sigma_A^2}$$

Analoga espressione varrà per la probabilità di ottenere B.

La probabilità che lo studente A trovi la sua misura e B l'altra, è quindi il prodotto di queste due probabilità:

$$P_X(x_A, x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\chi^2/2} \quad \text{con} \quad \chi^2 = \left(\frac{x_A - X}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{x_B - X}{\sigma_B}\right)^2$$

In base al principio della massima verosimiglianza, secondo cui la migliore stima di X è quel valore per cui le effettive osservazioni x_A e x_B hanno la massima probabilità, si deve calcolare il valore che rende questa probabilità massima, cioè l'esponente χ^2 minimo (minimizzare la somma di quadrati o metodo dei minimi quadrati) e si trova

$$(\text{miglior stima per } X) = \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right)$$

che, definendo come "pesi" i termini

$$w_A = \frac{1}{\sigma_A^2} \qquad e \qquad w_B = \frac{1}{\sigma_B^2}$$

può essere riscritta come **media pesata** x_{wav}

$$(\text{miglior stima per } X) = x_{wav} = \frac{w_A x_A + w_B x_B}{w_A + w_B}$$

Se le due misure originali sono ugualmente incerte ($\sigma_A = \sigma_B$ e quindi $w_A = w_B$), la media pesata si riduce alla semplice media matematica $(x_A + x_B)/2$. Se la misura A è più precisa di B, cioè $\sigma_A < \sigma_B$, $w_A > w_B$ e quindi la migliore stima di X è più vicina a x_A che a x_B. La nostra analisi può essere generalizzata a *N* misure distinte di una grandezza *x*

$$x_1 \pm \sigma_1, \quad x_2 \pm \sigma_2, \ldots, \quad x_N \pm \sigma_N$$

La migliore stima per il valore vero di *x* è data dalla media pesata

$$x_{wav} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

dove le somme sono estese a tutte le *N* misure e i pesi w_i sono definiti come

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Si consideri che una misura, ad esempio 4 volte meno precisa delle altre, ha un peso sedici volte inferiore.

L'incertezza in x_{wav} è ricavabile dalla propagazione degli errori e vale

$$\sigma_{wav} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}$$

dove le somme sono estese a tutte le *N* misure.

Criterio di Chauvenet per il rigetto di dati

Si ottenga un valore che spiccatamente si discosta dagli altri valori ottenuti in una serie di misure, ad esempio 6 misure di tempo (espresse in secondi):

3,8; 3,5; 3,9; 3,9; 3,4 e 1,8

con $\overline{x}$ = *3.4 s* e σ_x = *0.8 s*

Lo scarto del valore "anomalo" 1,8 dalla media è di circa due deviazioni standard. Assumendo le misure distribuite secondo una curva di Gauss con centro e larghezza della distribuzione date dai valori di cui sopra, si può calcolare la probabilità P di ottenere un valore che scarti più di due volte la deviazione standard:

$$P\ (\text{al di fuori di } 2\sigma) = 1 - P\ (\text{entro } 2\sigma) = 0{,}05$$

Ciò significa che, se i valori ottenuti sono legittimi, ci si deve aspettare che una misura ogni 20 differisca dalla media di quanto differisce il valore anomalo; però, in questo caso, le misure effettivamente fatte sono solo 6.

Il numero atteso di misure "cattive", ossia con uno scarto quanto quello associato al nostro valore "anomalo" 1,8 s, è **il numero delle misure moltiplicato la probabilità** calcolata sopra, ossia 6 x 0,05, quindi 0,3.

Ciò significa che solo "un terzo" di una misura ogni 6 può essere così anomalo; quindi, il valore può essere scartato.

Generalizzando al caso di N misure $x_1, \ldots, x_N$ della stessa grandezza x, da cui si siano calcolati $\overline{x}$ e σ_x, si calcoli il numero di deviazioni standard di cui un valore "sospetto" differisce dal valor medio

$$t_{sos} = \left| x_{sos} - \overline{x} \right| / \sigma_x$$

Si calcoli poi la probabilità P (al di fuori di $t_{sos}\sigma$) che una misura legittima scarti dal valor medio di t_{sos} volte la deviazione standard. Moltiplicando tale probabilità per il numero N di misure effettuate si ottiene il numero atteso di misure anomale quanto x_{sos}.

Se tale numero è minore di ½, il valore "sospetto" o anomalo x_{sos} può essere rigettato; è chiaro che valor medio e deviazione standard andranno ricalcolati.

Si tenga però presente che molti ritengono comunque sbagliato scartare dati sperimentali, anche se deviano molto dagli altri.

METODO DEI MINIMI QUADRATI

Finora ci si è occupati del problema di misure ripetute di una singola grandezza, che è propedeutico ad uno dei più comuni problemi sperimentali, che è la verifica sperimentale di una relazione funzionale tra due o più variabili fisiche.

In tal senso, gli esperimenti più semplici ed importanti sono quelli in cui la relazione attesa è di tipo lineare o che possa essere linearizzata opportunamente.

- Ad esempio, nel caso del pendolo semplice, si sa che il periodo di oscillazione τ è legato alla lunghezza del filo da una relazione del tipo $\tau = k\, L^{1/2}$.
- Eseguendo una serie di misure per diversi valori di queste due grandezze e riportando su un grafico i valori di τ^2_m in funzione di L_m, ci si aspetta che i risultati sperimentali giacciano su una retta.
- Questo sarebbe vero se le misure non fossero affette da errori.
- In realtà, esisterà una famiglia di rette, in questo caso passanti per l'origine, compatibili con i dati sperimentali.

Assumendo per buona che la relazione tra due variabili sia lineare, un primo problema è, quindi, determinare quale retta, e quindi quale coefficiente angolare, approssima meglio i dati sperimentali.

Il metodo della regressione lineare (adattamento dei minimi quadrati per una retta), basato sul principio di massima verosimiglianza, **consente analiticamente di risolvere il problema dell'aggiustamento (o fit) dei dati sperimentali**[3]**.**

Si considerino due variabili *x* e *y* legate da una **relazione lineare:**

$$y = A + Bx$$

dove *A* e *B* sono costanti, il cui significato geometrico è indicato in figura. Misurati *N* valori di *x*, ciascuno dei punti (x_i, y_i) dovrebbe giacere sulla retta. In realtà, ogni punto è misurato con un certo errore, per cui ci si augura che la distanza di ciascun punto sperimentale dalla retta sia ragionevolmente confrontabile con gli errori.

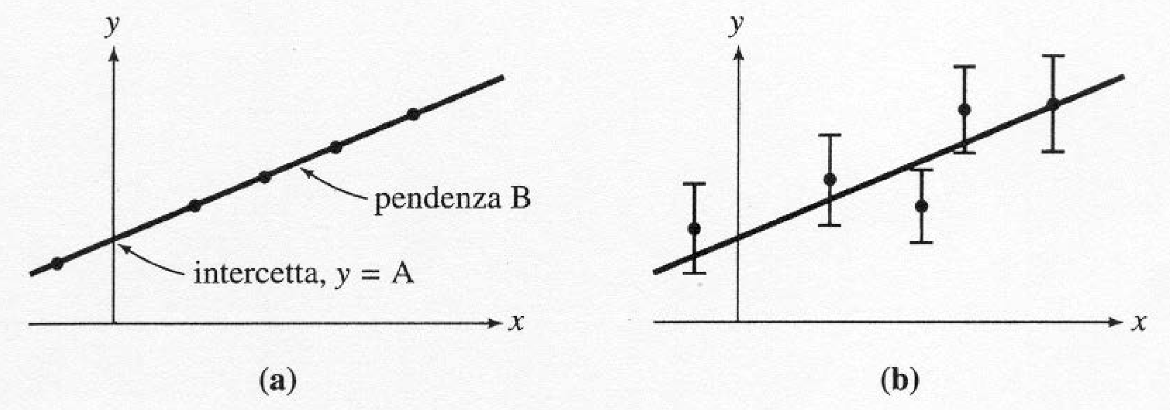


Figura 8.1. (a) Se le due variabili y e x sono in relazione lineare come nella Equazione (8.1), e se non vi fossero incertezze sperimentali, allora i punti misurati (x_i,y_i) dovrebbero giacere tutti esattamente sulla retta $y = A + Bx$. (b) In pratica ci sono sempre incertezze, che possono essere rappresentate con barre di errore e ci si può aspettare soltanto che i punti (x_i,y_i) cadano ragionevolmente vicino alla retta. Qui viene mostrato il caso in cui soltanto y è soggetto ad incertezze apprezzabili.

ato

Trovare la linea retta che meglio si adatta alle misure significa trovare la miglior stima per le costanti *A* e *B* basandosi sui dati sperimentali (x_1, y_1), …, (x_N, y_N).

Per poter calcolare le costanti *A* e *B* facciamo dellle ipotesi semplificative:

1. Che le misure di *x* abbiano incertezze trascurabili
2. Che le misure di *y* siano governate da una distribuzione di Gauss con larghezza uguale per tutte le misure, cioè che siano uguali le incertezze su *y*.

Il principio della massima verosimiglianza stabilisce che, dati N valori misurati, le migliori stime per i parametri della distribuzione (valor medio e deviazione standard) sono quelli per cui i valori misurati assumono la massima probabilità.

Se le costanti A e B fossero note, per ogni dato valore x_i (privo di errore) si potrebbe calcolare il valore vero del corrispondente y_i

$$\text{(valore vero di } y_i) = A + Bx_i$$

Avendo supposto che le misure di y_i sono governate da una distribuzione di Gauss, la probabilità di ottenere il valore osservato y_i è quindi:

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-(y_i - A - Bx_i)^2 / 2\sigma_y^2}$$

dove σ_y è la larghezza della distribuzione dell'i-esimo valore y_i, ed identica per tutti i valori misurati di y

Applicando il principio di massima verosimiglianza alla distribuzione dei valori $y_i = Ax_i + B$, la probabilità di ottenere l'insieme completo di misure $y_1, y_2, \ldots, y_N$ è massima quando è minimo l'esponente della distribuzione gaussiana.

Quindi, nell'espressione della probabilità "totale"

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_N) = P(y_1)P(y_2)\ldots P(y_N)$$

la probabilità di ottenere il valore osservato y_i sarà

$$P(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

dove l'esponente è stato posto, per semplicità, uguale a χ^2 dato da

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

Le migliori stime per le costanti incognite A e B, basate sulle misure date, sono quei valori di A e B per i quali la probabilità $P_{A,B}(y_1, \ldots, y_N)$ è massima, cioè per i quali la somma dei quadrati χ^2 è minima (da cui il nome di **metodo di adattamento dei minimi quadrati**).

Per trovare questi valori, differenziamo χ^2 rispetto ad A e B e poniamo le derivate uguali a zero

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \frac{-2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} x_i \, (y_i - A - Bx_i) = 0$$

Queste equazioni possono essere risolte per dare la stima dei minimi quadrati per le costanti A e B

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

dove è stata introdotta la convenzione

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$$

La retta $y = A + Bx$ basata sui dati sperimentali con questi coefficienti A e B è chiamata **retta dei minimi quadrati** per i dati o **retta di regressione di *y* in *x*.**

Esempio:

Si calcoli la lunghezza in funzione della massa per una bilancia a molla.

Si può realizzare un esperimento per verificare la legge di Hooke sospendendo la molla verticalmente e appendendo ad essa differenti masse *m;* bisogna trovare la relazione di calibrazione tra la lunghezza *l* della molla e la massa *m* che, sollecitando la molla, la fa allungare.

A questo scopo vengono eseguite le misure riportate in tabella.

Tabella 8.1. Masse m_i (in kg) e lunghezze l_i (in cm) per una bilancia a molla. Le "x" e "y" tra virgolette indicano quali variabili giocano il ruolo di x e y in questo esempio

numero della prova i	"x" *carico* m_i	"y" *lunghezza* l_i	m_i^2	$m_i l_i$
1	2	42,0	4	84
2	4	48,4	16	194
3	6	51,3	36	308
4	8	56,3	64	450
5	10	58,6	100	586
$N = 5$	$\sum m_i = 30$	$\sum l_i = 256{,}6$	$\sum m_i^2 = 220$	$\sum m_i l_i = 1\,622$

Assumendo che la molla segua la legge di Hooke, che stabilisce che l'allungamento di una molla è proporzionale alla forza applicata:

$$F = kl$$

dove *k* è la costante della molla, si può ipotizzare una dipendenza lineare per l del tipo

$$l = A + Bm$$

con A lunghezza a riposo della molla e B che gioca il ruolo della costante elastica della molla; bisognerà, però, trovare i valori delle costanti *A* e *B*, in modo da utilizzare questa relazione per ricavare qualsiasi massa incognita *m* dalla corrispondente lunghezza *l*.

Conviene, come prima cosa, calcolare il termine

$$\begin{aligned} \Delta &= N\sum m^2 - \left(\sum m\right)^2 \\ &= 5 \times 220 - 30^2 = 200 \end{aligned}$$

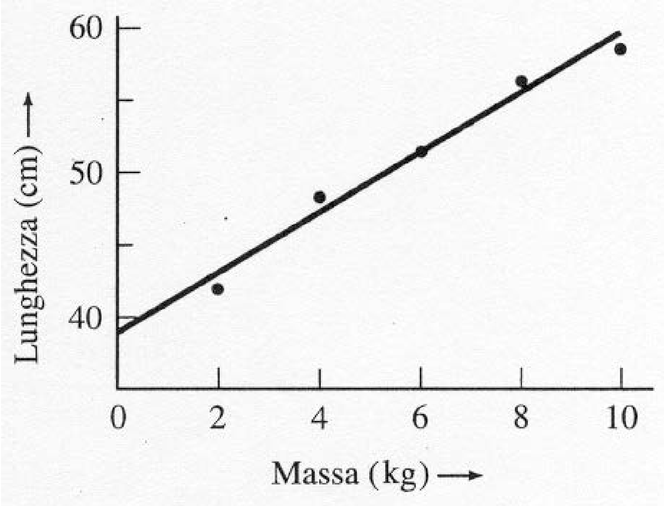
per poi trovare l'intercetta *A*

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sum m^2 \sum l - \sum m \sum ml}{\Delta} \\ &= \frac{220 \times 256{,}6 - 30 \times 1\,622}{200} = 39{,}0 \text{ cm} \end{aligned}$$

e la pendenza *B* della retta

$$B = \frac{N\sum ml - \sum m \sum l}{\Delta}$$
$$= \frac{5 \times 1\,622 - 30 \times 256{,}6}{200} = 2{,}06 \text{ cm/kg}$$

Con questi valori si può tracciare la retta mostrata in figura:



Incertezza nella misura di *y* e nelle costanti *A* e *B*

I numeri $y_1, \ldots, y_N$ non sono N misure della stessa grandezza, quindi non possiamo farci un'idea della loro affidabilità esaminando lo sparpagliamento dei loro valori. Possiamo però assumere che la misura di ogni y_i sia normalmente distribuita attorno al suo valore vero ($A + Bx_i$), con larghezza σ_y.
Questo suggerisce di assumere come miglior stima della larghezza della distribuzione gaussiana degli scarti $\delta = y_i - Ax_i - B$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - A - Bx_i)^2}$$

Il termine (N – 2) tiene conto del fatto che il valore di σ_y è indeterminato, diventando 0/0, se si dispongono di due (N = 2), sole coppie di valori x_i, y_i in quanto per due punti possiamo sempre trovare una retta che passa esattamente attraverso entrambi i punti e il metodo dei minimi quadrati ci fornirà

proprio questa retta, ma con solo due punti non possiamo quindi dedurre nulla circa l'affidabilità delle nostre misure.

Le stime di A e B sono funzioni ben definite dei numeri misurati $y_1, \ldots, y_N$, allora le incertezze in A e B sono ottenute dalla propagazione degli errori in termini di quelli in $y_1, \ldots, y_N$

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Metodo dei minimi quadrati pesato

- Si misurino N coppie di valori (x_i, y_i) di due variabili x e y che si suppone soddisfino la relazione lineare y = A + Bx
  - Si supponga che l'incertezza sulla variabile x sia, al solito, trascurabile rispetto a quella con cui si misura y
- I valori y_i abbiano però incertezze tutte differenti fra loro, cioè y_1 ha un errore σ_1, y_2 un errore σ_2 e così via.
- Come illustrato per la media pesata, si definisca il peso della *i*esima misura come

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

- Si può dimostrare che le migliori stime dei parametri della retta di best fit sono date da:

$$\boxed{A = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta}}$$

$$\boxed{B = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}}$$

con Δ dato da

$$\boxed{\Delta = \sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2}$$