Forze

Dinamica

- Sistema: corpo o corpi di cui vogliamo studiare il moto (es. un solo corpo puntiforme)
- Tutto il resto dell'universo lo chiamiamo ambiente
- Tra sistema e ambiente in generale sono possibili interazioni
- le forze descrivono interazioni tra sistemi e tra sistema ed ambiente
- Scopo della dinamica: studiare moto del sistema sottoposto ad interazioni dell'ambiente

Le forze

- Cosa sono secondo te le forze? Fai alcuni esempi
- Quali sono le principali proprietà o attributi delle forze?
- Come fa una persona ferma ad iniziare a muoversi?
- Come fa un oggetto fermo a iniziare a muoversi?

Cosa non è la forza

- Non sono esercitate solo dagli esseri animati
- Negli esseri animati non sono dovute ai muscoli
- Non esistono solo quando c'è movimento
- Non causano il movimento
- Non sono sinonimo di energia

Cosa non sono le forze

- Non sono sinonimo di potenza, lavoro, pressione …
- Non agiscono solo nel contatto
- Non sono “contenute” negli oggetti inanimati né li spingono a muoversi
- Non si conservano
- Non provocano variazioni di posizione, cioè velocità

Idee comuni <u>non</u> corrette

- Un corpo sottoposto ad una forza costante si muove con velocità costante. In assenza di forze, ogni oggetto rimane a riposo

- Un corpo inizialmente fermo viene messo in moto da una “forza di spinta”, che si consuma durante il moto. Il moto termina quando la forza di spinta è dissipata

Idee comuni non corrette

- Un corpo, una volta in moto, possiede una forza interna (“impetus”, “capitale di forza”). In assenza di attrito è costante, altrimenti diminuisce finché il corpo si ferma

Idee comuni <u>non</u> corrette

- Il tempo impiegato da un corpo a percorrere una certa distanza quando agisce una forza su di esso è proporzionale all’inverso dell’intensità della forza stessa
- Una forza non può muovere un corpo fintanto che essa è minore del peso del corpo
- L’inerzia (talvolta è chiamata anche “peso” o “massa”) è la resistenza intrinseca di un corpo al moto

Idee comuni non corrette

- Il corpo che causa il moto di un altro corpo esercita forza maggiore, perché deve superarne l'inerzia

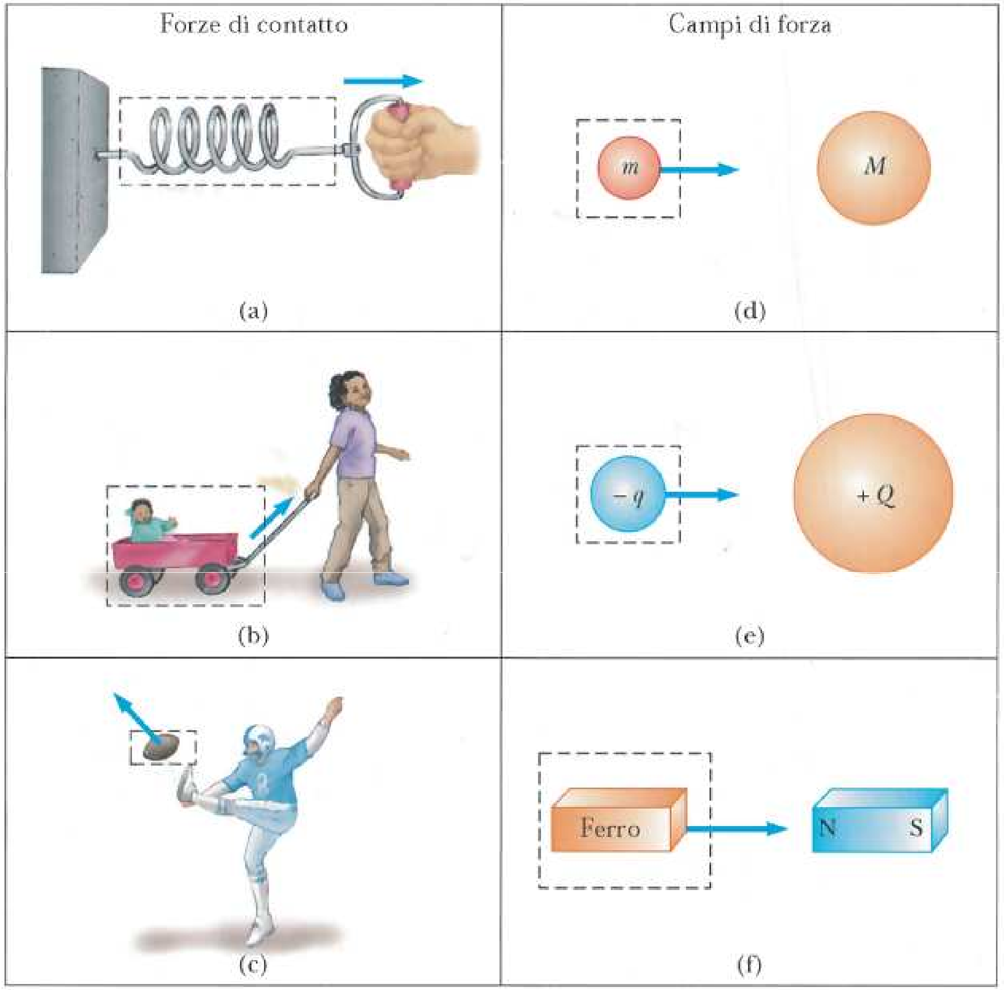
- Il corpo di massa maggiore esercita forza maggiore

La forza

- Forza è *“schematizzazione delle interazioni fra sistemi o tra sistema ed ambiente”*
- Schematizzazione → modello matematico
- Nel SI la forza e` una grandezza derivata la cui unità è il newton (N)

Come agiscono le forze

- Deformazioni (es. spugne, palline…)
  - corpi sono deformabili o non deformabili (corpi rigidi)
- Forze a contatto e a distanza
  - contatto: si manifestano solo quando si fa qualcosa sul sistema (reazioni vincolari, deformazioni, impulsi)
  - distanza: il sistema risente della presenza nella spazio di un altro sistema (sorgente)

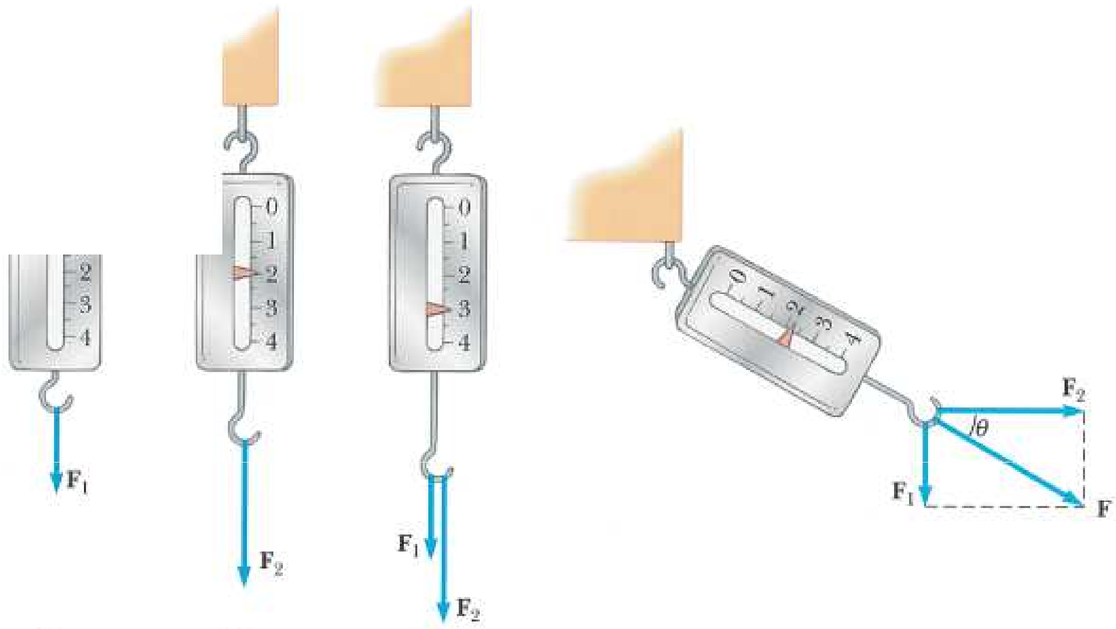

Forze di contatto
Campi di forza
m
M
(a)
(d)
(b)
− q
+ Q
(e)
(c)
Ferro
N
S
(f)

Modelli di interazione

- Detti anche leggi di forze:
  - Elastica
  - Gravitazionale
  - Elettrica
  - Magnetica
  - …
- Necessità di descrivere l’interazione nello spazio → le forze sono descritte da vettori

Trattazione matematica delle forze

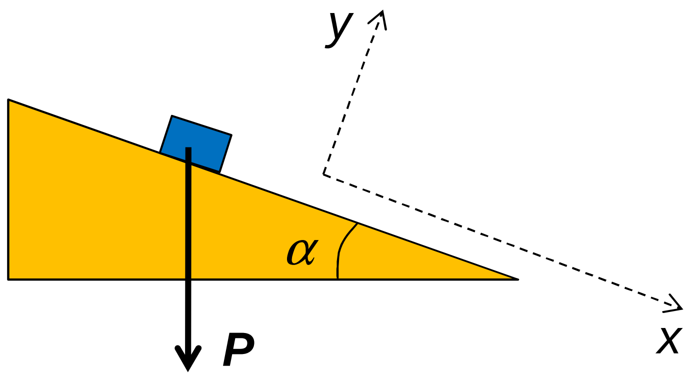
- Si applicano tutte le regole dei vettori (somma, sottrazione, prodotto scalare e vettoriale)
- Fondamentale saper scomporre le forze lungo assi scelti per descrivere la situazione

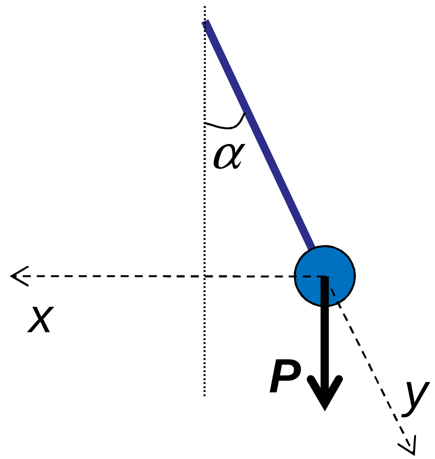


(a) (b) (c) (d)

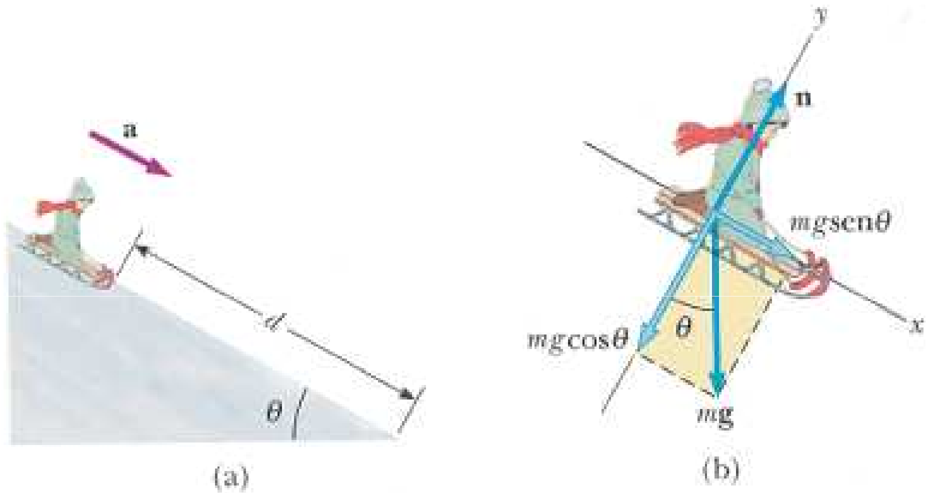
Esercizi

- 1) scomporre la forza peso in direzione parallela e perpendicolare ad un piano inclinato



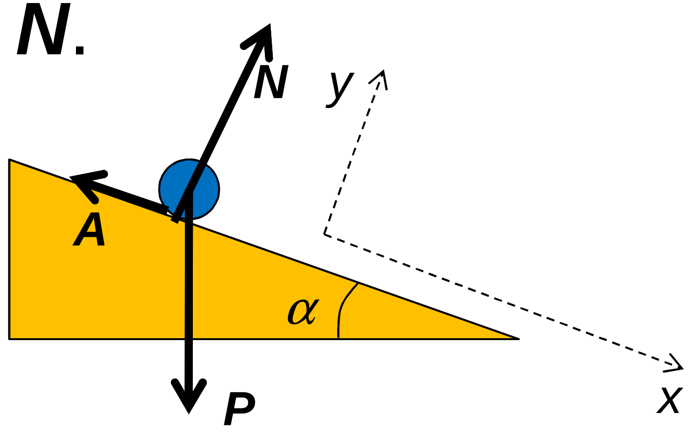


- 2) scomporre la forza peso di un pendolo nelle direzioni orizzontale e della fune

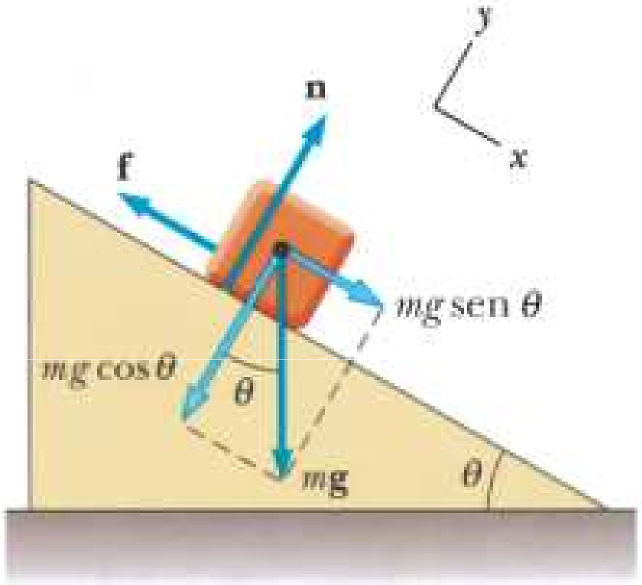

a
d
θ
(a)
y
n
mgsenθ
mgcosθ
θ
x
mg
(b)

Esercizi

- 3) un corpo su un piano inclinato e` soggetto alla forza peso ***P***, alla forza d'attrito ***A*** e alla reazione vincolare normale ***N***.



- Scomporre la forza risultante in direzione parallela e perpendicolare al piano inclinato


y
x
n
f
mg sen θ
mg cos θ
θ
mg
θ

Forza e quantità di moto

- Per descrivere le interazioni di un sistema occorre conoscere come si muove
- Cinematicamente, il moto di un corpo non dipende dalla sua massa
- Ma quando deve interagire con altri sistemi o con l'ambiente la sua massa deve necessariamente entrare in gioco
- Introduciamo quindi la grandezza fisica *quantità di moto:*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Proprietà della quantità di moto

- Un corpo in movimento ha quantità di moto
- Un corpo fermo non ha quantità di moto
- Maggiore la velocità o la massa, maggiore la quantità di moto
- La quantità di moto può essere trasferita da un sistema ad un altro oppure distribuire su più sistemi

Proprietà della quantità di moto

- Quando un corpo si ferma la sua quantità di moto si distribuisce nell'ambiente (es. manto stradale)
- Ambiente ha usualmente massa molto maggiore sistema → ambiente non comincia a muoversi
- Se il sistema è isolato, ed è fatto da due corpi essi possono fermarsi perchè quantità di moto è un vettore
- La massa puo` essere considerata costante a tutti gli effetti e quindi la quantità di moto di un corpo che si muove a velocità costante è costante → si conserva

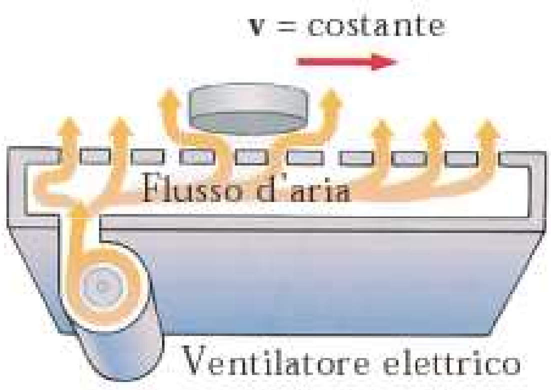
Il 1º principio della dinamica

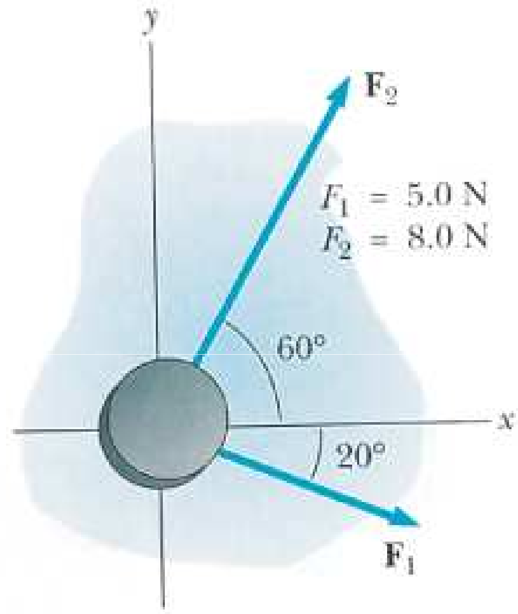
- Conservazione della quantità di moto: se il sistema è isolato, ed è fatto da un solo corpo esso continuerà a muoversi con quantità di moto costante
- Primo principio di Newton: "Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse"
- Sistemi di riferimento in cui vale questo principio sono detti sistemi inerziali
- Le leggi della dinamica sono applicabili nella loro forma piu` semplice solo in questi sistemi
- Per sistemi non inerziali (p.e. la superficie terrestre) bisogna terner conto di opportune forze inerziali addizionali

Il 1° principio della dinamica

- Affinche’ avvenga un cambiamento di quantita` di moto (ovvero di velocità) è necessario che l’ambiente circostante interagisca con il sistema
- Piu` precisamente occorre tenere conto della risultante di tutte le interazioni tra ambiente e corpo, ovvero la forza netta
- Se sono presenti forze, ma la loro risultante è nulla, la quantità di moto non varia nel tempo
- Quindi se osserviamo che la quantità di moto di un corpo non varia, possiamo dire che il sistema è isolato o equivalentemente le forze esterne sono nulle

$$\Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} = 0 \qquad \vec{p}_f = \vec{p}_i$$


v = costante
Flusso d'aria
Ventilatore elettrico


y
F2
F1 = 5.0 N
F2 = 8.0 N
60°
x
20°
F1

Il 2° principio della dinamica

- Viceversa se la quantità di moto non è costante, <u>necessariamente è presente una interazione tra sistema ed ambiente, cioè forza</u>
- Variazione di quantità di moto → variazione di velocità → corpo ha accelerazione
- il 2° principio specifica <u>quantitativamente</u> la relazione tra forza e accelerazione

Il 2° principio della dinamica

- Il principio: "Il cambiamento della <u>quantità di moto di un corpo</u> è *proporzionale* alla risultante delle forze esterne ed avviene *lungo la direzione lungo la quale la forza agisce*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Il 2° principio della dinamica

- E si ottiene il 2° principio nella forma

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

- Il che significa che l'accelerazione di un corpo è proporzionale alle forze esterne tramite una costante propria del corpo che è l'inverso della massa del corpo
- Per sistema composto da più corpi:

$$\vec{a} = \sum_i \vec{a}_i = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = \frac{\vec{R}}{m}$$

Ciascuna forza agisce <u>indipendentemente</u> dalle altre

Equilibrio statico

- Se la risultante ***R*** delle forze agenti su un corpo è nulla e il corpo ha inizialmente velocita` nulla, esso rimane in quiete → <u>equilibrio statico</u>
- L'annullarsi di ***R*** equivale all'annullarsi di tutte le sue componenti
- Per un sistema cartesiano $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$ significa:

$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0$$

$$R_y = \sum_i F_{iy} = 0$$

$$R_z = \sum_i F_{iz} = 0$$

Il 3º principio della dinamica

- Se spostiamo l'attenzione dal *sistema* all'insieme *sistema* + *ambiente* otteniamo che la risultante delle forze esterne è sempre nulla → quantità di moto *totale* si conserva cioè

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0$$

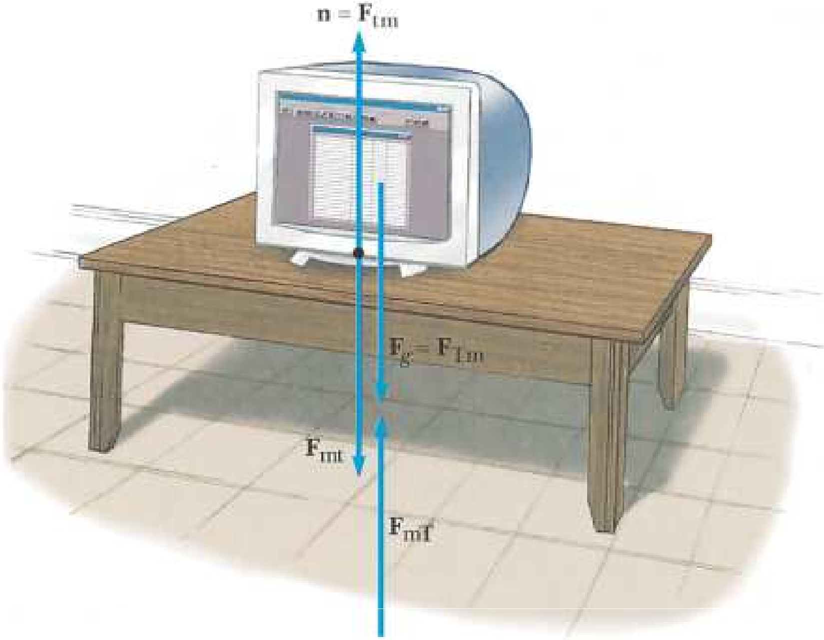
- Ma allora:

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{sistema}}{dt} + \frac{d\vec{p}_{ambiente}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{sistema}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{ambiente}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_{sistema}}{dt} = F_{ambiente \to sistema}$$

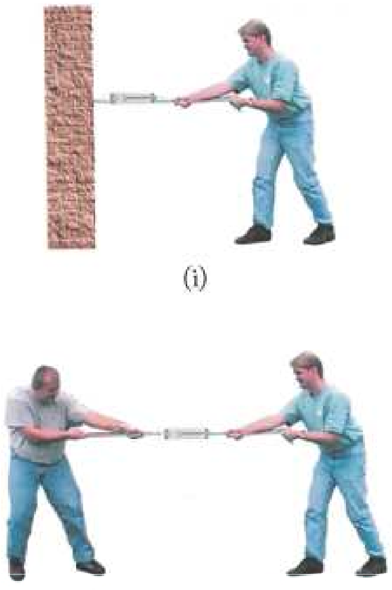
$$\frac{d\vec{p}_{ambiente}}{dt} = F_{sistema \to ambiente}$$

$$F_{ambiente \to sistema} = -F_{sistema \to ambiente}$$



(a)

(b)



(i)

(ii)

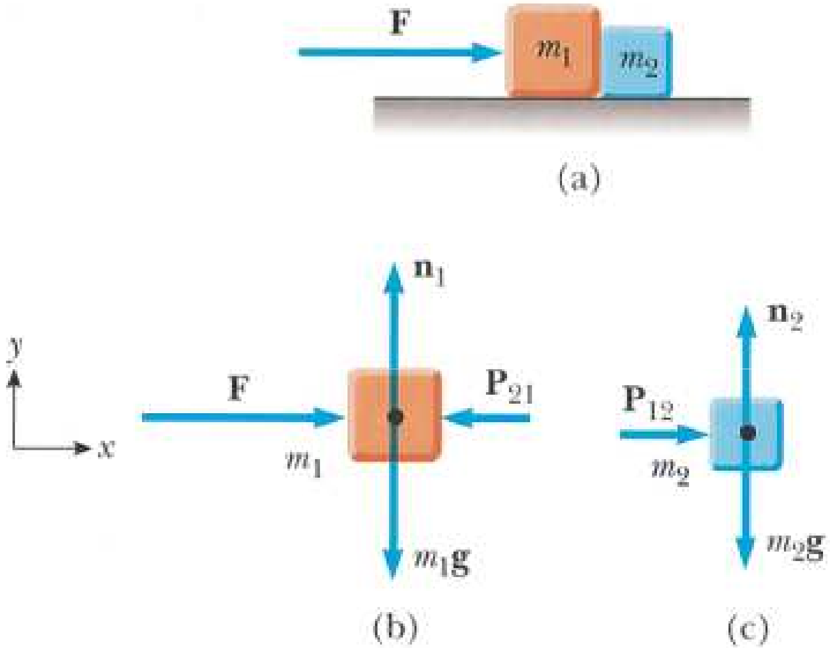
(b)

(c)

Esercizi

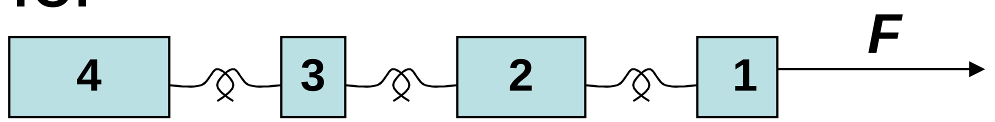
- 1) due corpi di massa m_1 e m_2 sono posti su un piano orizzontale e sono a contatto

- Applicando una forza ***F***, parallela al piano, al corpo 1, i due corpi, mantenendosi in contatto, si mettono in moto con una accelerazione ***a***
- Trovare ***a*** e la forza di interazione tra i due corpi


F
m_1
m_2
(a)
$\mathbf{n}_1$
y
x
F
$\mathbf{P}_{21}$
m_1
$m_1\mathbf{g}$
(b)
$\mathbf{n}_2$
$\mathbf{P}_{12}$
m_2
$m_2\mathbf{g}$
(c)

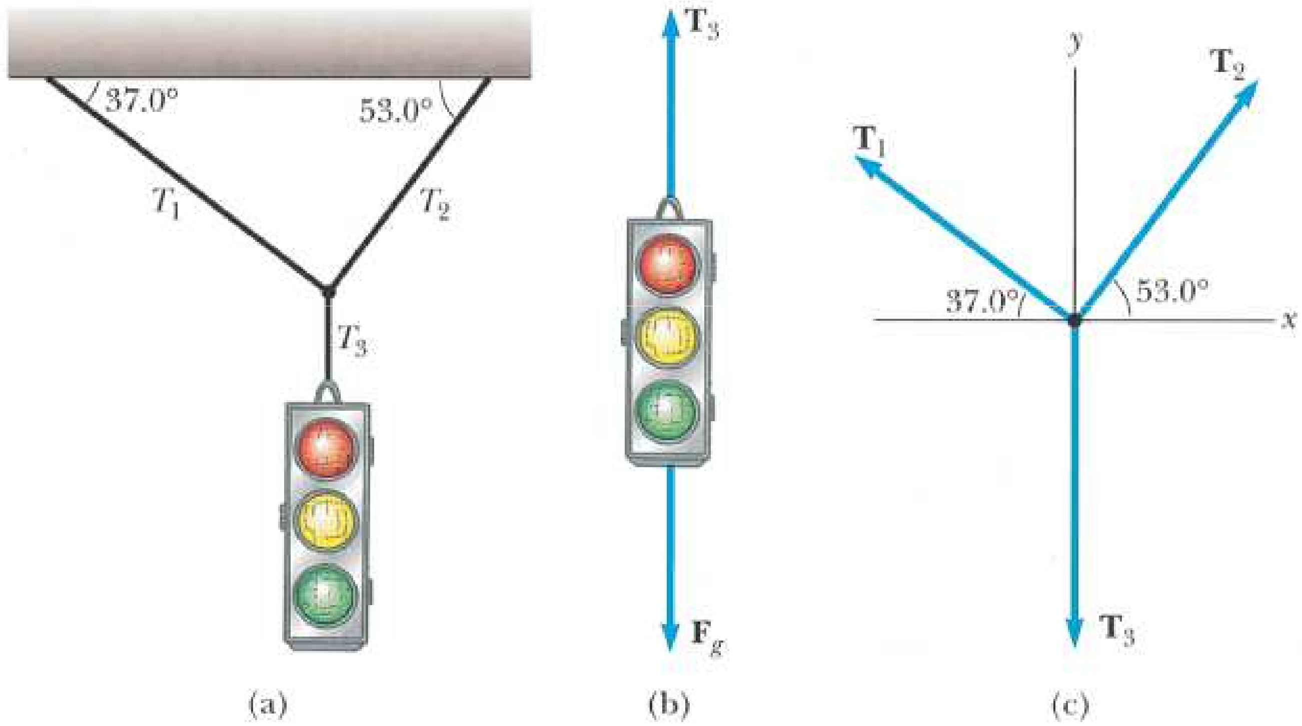
Esercizi

- Quattro corpi di massa m_1, m_2, m_3, m_4, sono disposti come in figura e collegati tramite ganci



- Al corpo 1 viene applicata una forza F
- Trovare: a) l'accelerazione del sistema; b) la tensione agente sui ganci; c) la forza agente su ciascun corpo

Esercizi

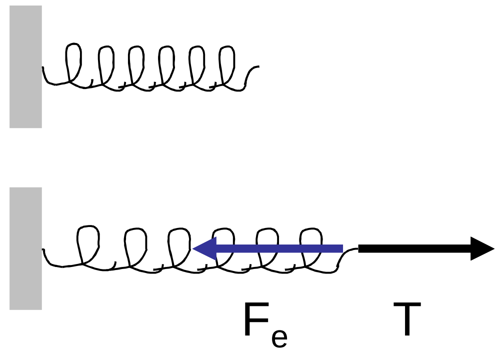

37.0°
53.0°
T_1
T_2
T_3
$\mathbf{T}_3$
$\mathbf{F}_g$
y
x
$\mathbf{T}_1$
$\mathbf{T}_2$
37.0°
53.0°
$\mathbf{T}_3$
(a)
(b)
(c)

Legge di forza elastica

- Una molla non sollecitata ha una lunghezza a riposo x_0
- Sollecitata da una forza ***T*** si allunga (o si comprime)
- La forza coniugata a ***T*** secondo la 3ª legge, generata dalla molla, è la forza elastica $\boldsymbol{F_e}$
- Per una molla ideale, l'allungamento (o accorciamento) e l'intensita` della forza sono proporzionali

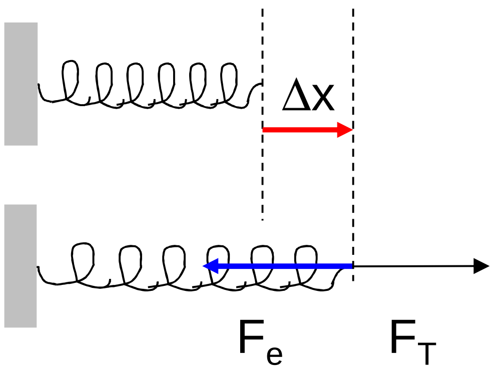
$$F = k(x - x_0) = k\Delta x$$

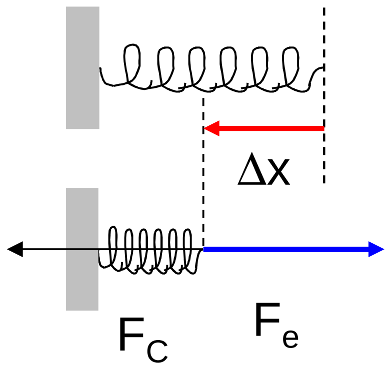
- Ove *k* e` la costante elastica della molla



Legge di Hooke

- In termini vettoriali: $\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) = -k\Delta\vec{x}$
- Il <u>segno meno</u> indica che la forza, pur avendo ugual direzione, e` sempre diretta in <u>verso opposto</u> allo spostamento



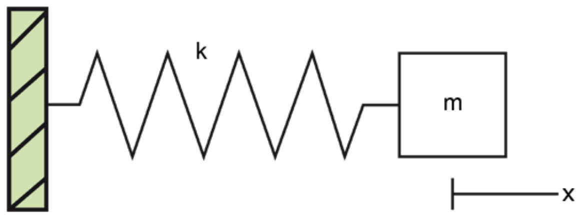


- Per ogni molla ciò è valido in un intervallo limitato di intensita` di forza che non superi il cosiddetto <u>limite elastico</u> della molla

Ancora sul moto armonico

- Studiamo il moto di un corpo soggetto ad una forza ***F***: $m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$
- Se ***F*** e` la forza di Hooke $\vec{F} = -k\left(\vec{x} - \vec{x}_0\right)$
- Se il moto è in una dimensione, possiamo scrivere l'equazione

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - x_0\right)$$



Ancora sul moto armonico

- Ponendo $y=x-x_0$ $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$
- L'equazione del moto diviene $\quad m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky$
- Dividendo i membri per *m* e ponendo $\quad \omega^2 = \dfrac{k}{m}$
- Otteniamo $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$
- Forze di tipo elastico provocano un moto armonico

Misura di *k*

Progettare un esperimento con l'apparato in figura

Forza gravitazionale

- Due corpi qualunque esercitano tra loro una forza del tipo:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad G = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

ove m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e r la loro distanza e G e\` la costante di gravitazione universale

- Si assume che le dimensioni dei corpi siano trascurabili rispetto alla loro distanza, altrimenti questa non sarebbe definita
- Questa forza e\` sempre attrattiva

Forza gravitazionale

- Nel caso della forza di gravita` agente su un corpo di massa *m*, possiamo scrivere

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{(R_T + h)^2}\hat{r} = \left(-G\frac{M}{R_T^{\;2}}\hat{r}\right)\frac{m}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \equiv m\vec{g}$$

$$\vec{g} = \frac{\left(-G\frac{M}{R_T^{\;2}}\hat{r}\right)}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \cong G\frac{M}{R_T^{\;2}}(-\hat{r}) \Rightarrow |\vec{g}| \cong \qquad (6{,}6742 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}})\ \frac{5{,}9736 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6{,}37101 \times 10^{6}\ \mathrm{m})^2} = 9{,}822\ \mathrm{m/s^2}$$

- L’accelerazione di gravità *g* non dipende dal corpo, ma solo dalla massa e raggio della Terra e dalla posizione del corpo sulla Terra (altitudine e latitudine)

Vincoli

- Un vincolo e` una qualunque limitazione dell’ambiente al moto del corpo
- Questa limitazione avviene per contatto tra corpo e vincolo
- Esempi:
  – una fune
  – una superficie d’appoggio o rotaia
  – un asse fisso
  – un punto fisso

Reazioni vincolari

- Il contatto tra corpo e vincolo produce un’interazione che si può modellizzare con una forza
- Per il 3º principio, la forza con cui il corpo agisce sul vincolo e\` uguale e contraria a quella, detta reazione vincolare, con cui il vincolo agisce sul corpo
- Generalmente si suppone, almeno in prima approssimazione, che il vincolo sia indeformabile, cioè che riesca a generare la reazione senza deformarsi apprezzabilmente
- Le forze vincolari non sono in generale note a priori, ma si possono dedurre a posteriori esaminando il comportamento del sistema

Reazioni vincolari

- Esempio: corpo vincolato in equilibrio statico
- Supponiamo che il corpo sia soggetto, oltre alla forza di vincolo ***V***, ad altre forze di risultante ***R*** diversa da zero
- Se il corpo e` in equilibrio statico, allora la risultante di <u>tutte</u> le forze, compresa quella di vincolo, dev'esser nulla:

$$\vec{R}_{tot} = \vec{R} + \vec{V} \equiv 0$$

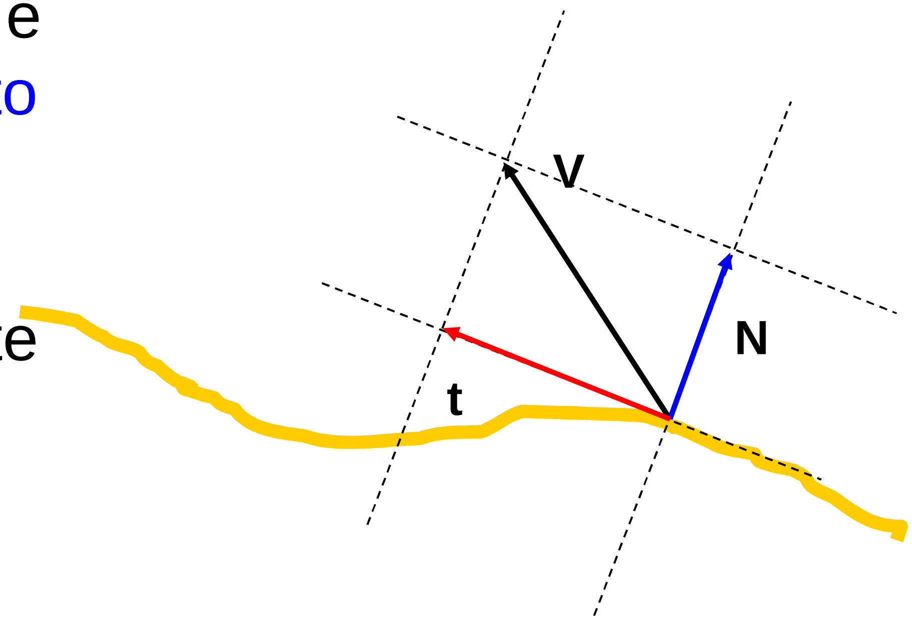
- Da questa relazione possiamo calcolare, <u>a posteriori</u>, la forza di vincolo:

$$\vec{V} = -\vec{R}$$

Reazione vincolare di una superficie di appoggio o di una rotaia

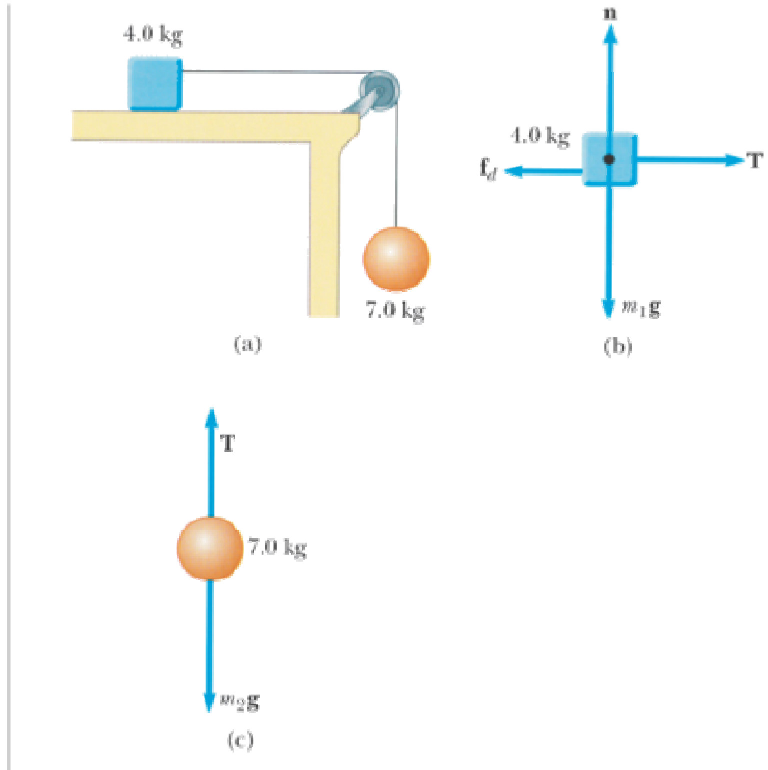
- È comodo talvolta scomporre la forza ***V*** esercitata dal vincolo nelle componenti parallela e perpendicolare al vincolo

- La componente tangente **t** è usualmente dovuta all'attrito con la superficie (scabra)
- La componente ***N*** è usualmente l'unica presente



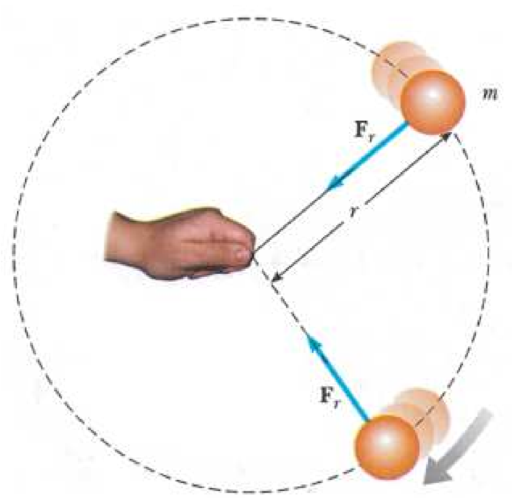
Fili e funi

- Sono oggetti che trasmettono la forza solo in trazione



Fili e funi

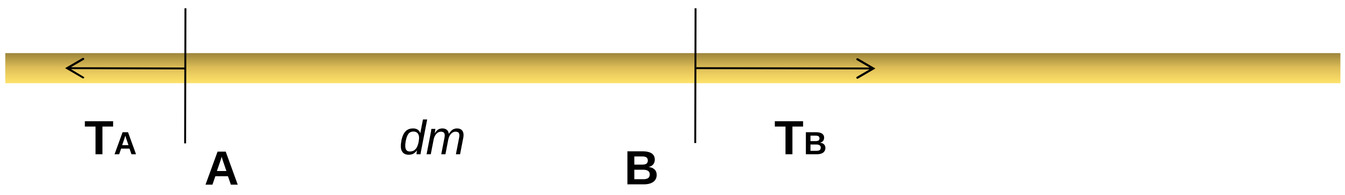
- Spesso supporremo per semplicita` che le funi siano
  - <u>inestensibili</u> (cioe` la lunghezza non cambi)
  - <u>di massa trascurabile</u>



Tensione di una fune in quiete

- Sia data una fune in equilibrio statico, tesa mediante due forze $\boldsymbol{F}_s$ e $\boldsymbol{F}_d$ applicate ai suoi capi

- Consideriamo due sezioni arbitrarie A e B e sia *dm* la massa della fune compresa tra le due sezioni



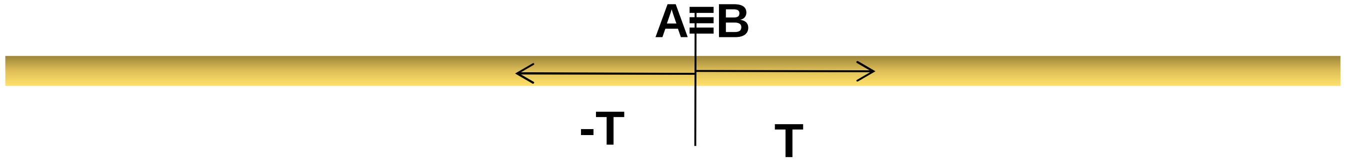
Tensione di una fune in quiete

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_B = 0$$

- Ne segue che le tensioni ***T*A** (sezione A) e ***T*B** (sezione B) devono essere <u>uguali in modulo e opposte in verso</u>

$$\vec{T}_A = -\vec{T}_B$$

- Se A →B le tensioni sui due lati di una sezione sono uguali e contrarie



Tensione di una fune in quiete

- Dall'arbitrarieta` di A e B, segue che <u>la tensione statica</u> di una fune <u>ha ugual valore *T* (in modulo) in ogni punto</u> della stessa
- In particolare cio` vale anche alle estremita`, per cui $$F_s = F_d = T$$
- Cioe` le <u>forze esterne</u> che tendono la fune sono uguali, in modulo, alla tensione della fune

Tensione di una fune in movimento

- Ripetendo il ragionamento per una fune in movimento, abbiamo $\vec{T}_A + \vec{T}_B = m\vec{a}$
- Ora le tensioni nelle due sezioni non sono piu` uguali fra loro: cio` è dovuto al fatto che per accelerare la fune e` necessario che una tensione sia maggiore dell'altra
- Se A e B coincidono, pero`, le tensioni sui due lati di una sezione sono uguali e contrarie anche nel caso dinamico
- Solo se ipotizziamo che la massa della fune sia trascurabile, possiamo imporre che la tensione abbia ugual valore in ogni punto della fune, <u>come nel caso statico</u>

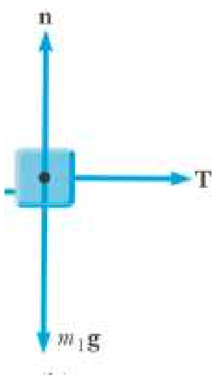
Inestensibilità

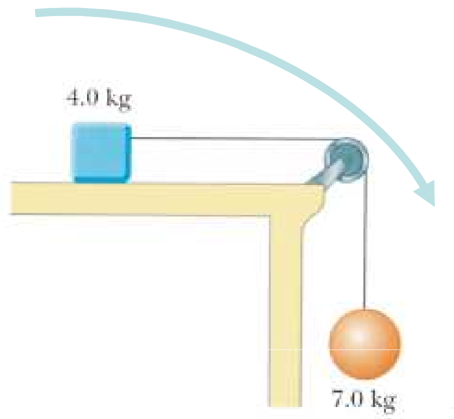
- Questa ipotesi → due punti arbitrari della fune A e B <u>mantengono la loro distanza</u> indipendentemente dal fatto che siano in quiete o in moto (accelerato)
- Questo implica che abbiano <u>velocita` uguali</u> e <u>accelerazioni uguali</u>

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Macchina di Atwood semplice

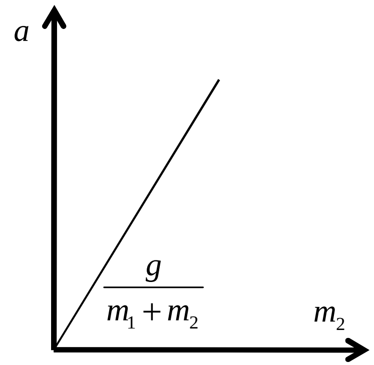
Ascissa curvilinea





$$m_2 a_2 = -T + m_2 g$$

$$m_1 a_1 = T$$



$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2$$

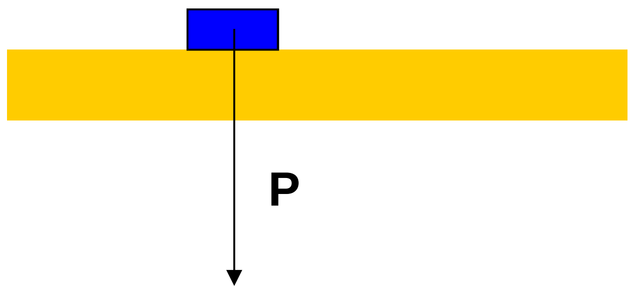
$$m_1 a + m_2 a = m_2 g \Rightarrow a = \frac{g}{m_1 + m_2} m_2$$

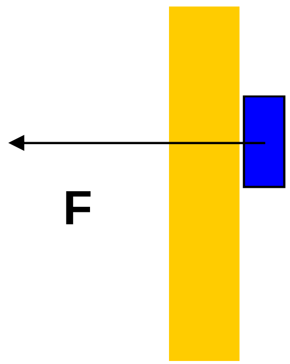
$$T = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Pendolo semplice

Attrito su superficie o rotaia

- Che il corpo sia in quiete (caso statico) o in moto (caso dinamico), il fenomeno dell'attrito ha origine dalle <u>forze di coesione</u> che si stabiliscono nel contatto tra i materiali di cui sono costituiti il corpo e la superficie d'appoggio, premuti l'uno contro l'altro (dalla forza peso del corpo o da altre forze opportune)

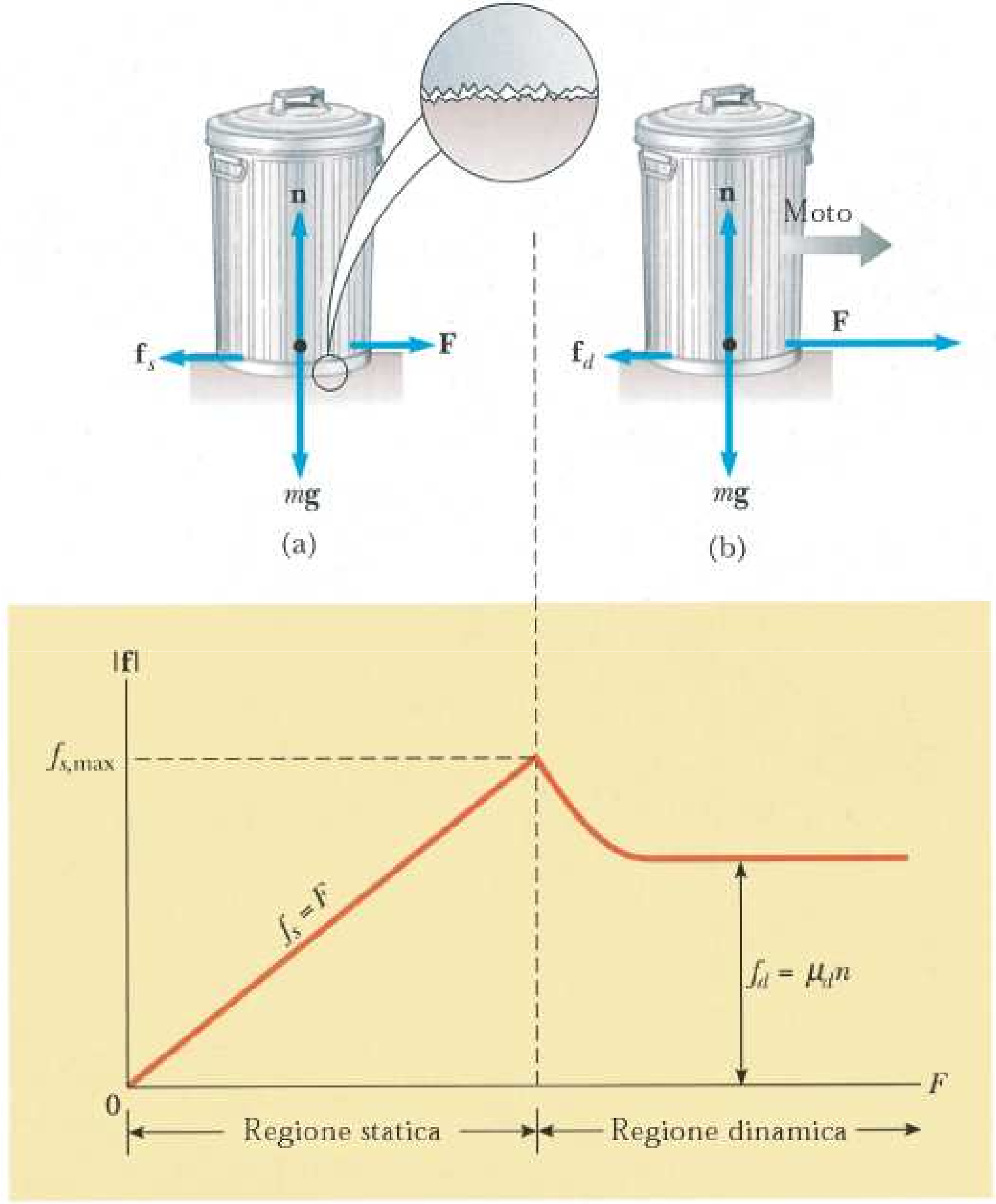




Attrito statico su superficie

- Ad un corpo posto su un piano orizzontale applichiamo una forza ***F*** parallela al piano

- Sperimentalmente si vede che il corpo non si mette in movimento fintanto che l’intensita` di ***F*** non diventa maggiore di un valore di soglia minimo

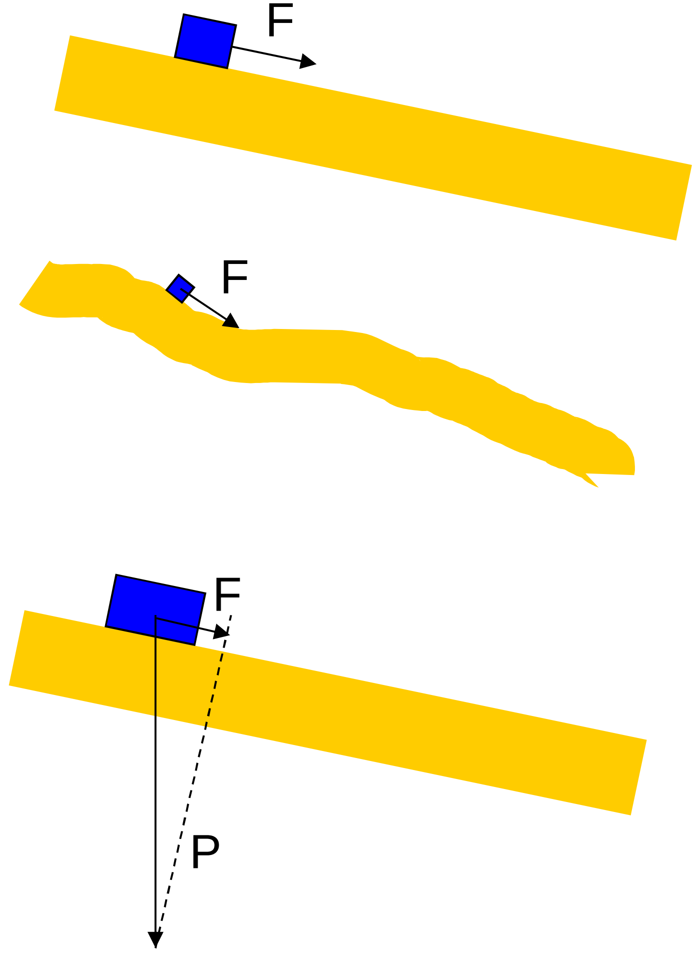


n
f
F
mg
(a)
n
Moto
F
f
mg
(b)
|f|
f s,max
fs = F
fd = μd n
0
F
Regione statica
Regione dinamica

(c)

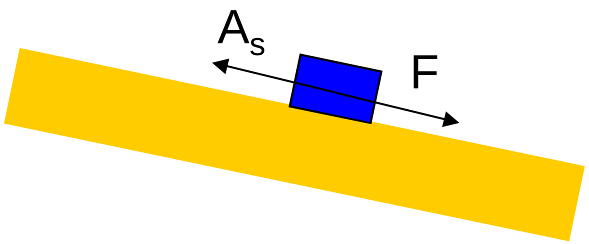
Attrito statico su superficie

- La forza di attrito puo` essere dovuta tutta o in parte alla componente della forza peso parallela (localmente) alla superficie



Attrito statico su superficie

- Se un corpo è tale che a= 0, per il terzo principio, la superficie agisce sul corpo con una forza ***F***$_s$ uguale e contraria a ***F*** in modo tale che garantisca l'equilibrio statico del corpo
- Tale forza è detta d'attrito statico
- Non e` nota a priori, ma si ricava dalla condizione di equilibrio statico $\vec{F} + \vec{F}_s = 0$ da cui:

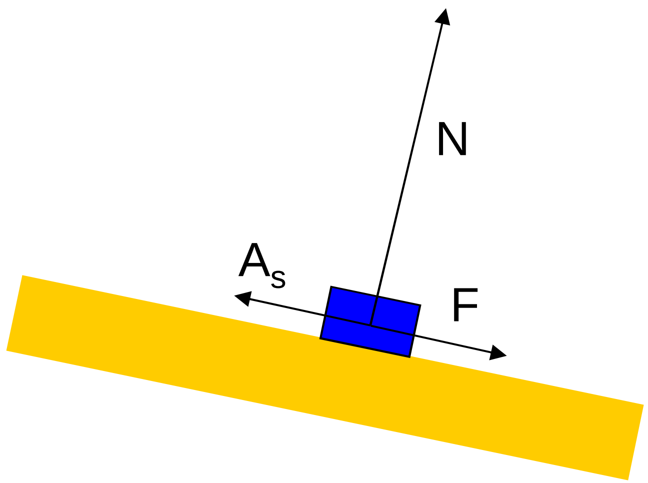


$$F_s = -\vec{F}$$

Attrito statico su superficie

- Il valore di soglia minimo di ***F*** corrisponde al massimo valore della la forza di attrito che la superficie puo` sviluppare $\boldsymbol{F}_s^{max}$
- Si trova sperimentalmente che, almeno in prima approssimazione, $F_s^{\max} = \mu_s N$

  e la forza non dipende dall'area di contatto col vincolo
- μ_s e` il coefficiente di attrito statico e *N* e` il modulo della componente, della reazione vincolare, normale (localmente) alla superficie
- Il coefficiente μ_s dipende dai materiali e dalla lavorazione delle superfici a contatto



Attrito statico su superficie

- Attenzione: l'equazione $F_s^{\max} = \mu_s N$
- e` <u>un'equazione tra moduli</u>, che non si estende ai vettori, e` sbagliato percio` scrivere

$$\cancel{\vec{F}_s^{\max} = \mu_s \vec{N}}$$

- perche' $\boldsymbol{F_s}$ e $\boldsymbol{N}$ sono sempre perpendicolari fra loro
- $\boldsymbol{F_s}$ ha sempre la stessa direzione e <u>verso opposto</u> a $\boldsymbol{F}$
- <u>Inoltre</u> l'equazione dice qualcosa <u>solo sul valore massimo</u> della forza d'attrito, non sul valore che, di volta in volta, equilibra la forza $\boldsymbol{F}$

Attrito statico su superficie

- Riepilogando avremo due condizioni:

- <u>condizione di equilibrio statico</u>

$$F \leq F_s^{\max} = \mu_s N$$

- <u>condizione di moto</u>

$$F > F_s^{\max} = \mu_s N$$

Attrito dinamico su superficie

- Il valore massimo della forza di attrito statico ci da` l’importante informazione su quando l’equilibrio statico non è piu` possibile e il corpo comincia a muoversi
- Abbiamo allora a che fare con una forza d’attrito dinamico
- Si trova sperimentalmente che, almeno in prima approssimazione, $F_d = \mu_d N$

  e la forza non dipende dalla velocita` del corpo o dall’area di contatto col vincolo
- μ_d e` il coefficiente di attrito dinamico e dipende dai materiali e dalla lavorazione delle superfici a contatto

Attrito dinamico su superficie

- Attenzione: l'equazione $F_d = \mu_d N$
- è <u>un'equazione tra moduli</u>, che non si estende ai vettori

$$\cancel{\overrightarrow{F_d} = \mu_d \vec{N}}$$

- Perche' $\boldsymbol{F_d}$ e $\boldsymbol{N}$ sono sempre perpendicolari fra loro
- $\boldsymbol{F_d}$ ha sempre la stessa direzione e <u>verso opposto</u> alla velocita`
- <u>A differenza del caso statico</u> ora l'equazione dice proprio il valore della forza d'attrito, che istante per istante agisce sul corpo
- L'equazione del moto e`:

$$ma = F - F_d \equiv F - \mu_d N$$

Coefficienti di attrito

- Il coefficiente di attrito statico e` sempre maggiore di quello dinamico:

$$\mu_s > \mu_d$$

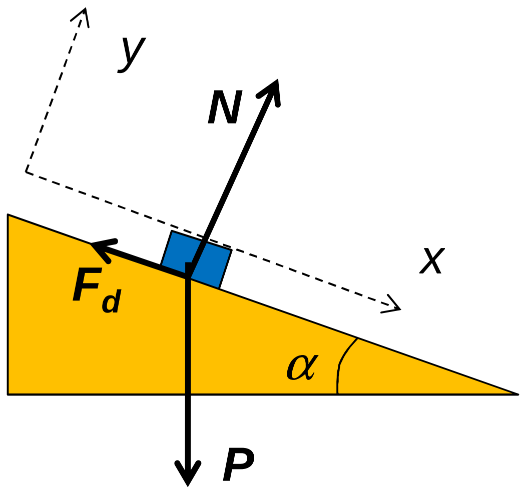
- Al momento del distacco la forza d’attrito dinamico è minore della massima forza d’attrito statico: $F_s^{\max} > F_d$

Esercizio

- Trovare le equazioni del moto di un punto materiale su un piano inclinato soggetto a forza d'attrito dinamico

$$ma_x = F_x = P_x - F_d$$

$$ma_y = F_y = -P_y + N$$



$$ma_y = 0 \Rightarrow N = P_y \quad F_d = \mu_d N = \mu_d P_y$$

$$ma_x = P_x - F_d = P_x - \mu_d P_y$$

$$a_x = g_x - \mu_d g_y$$

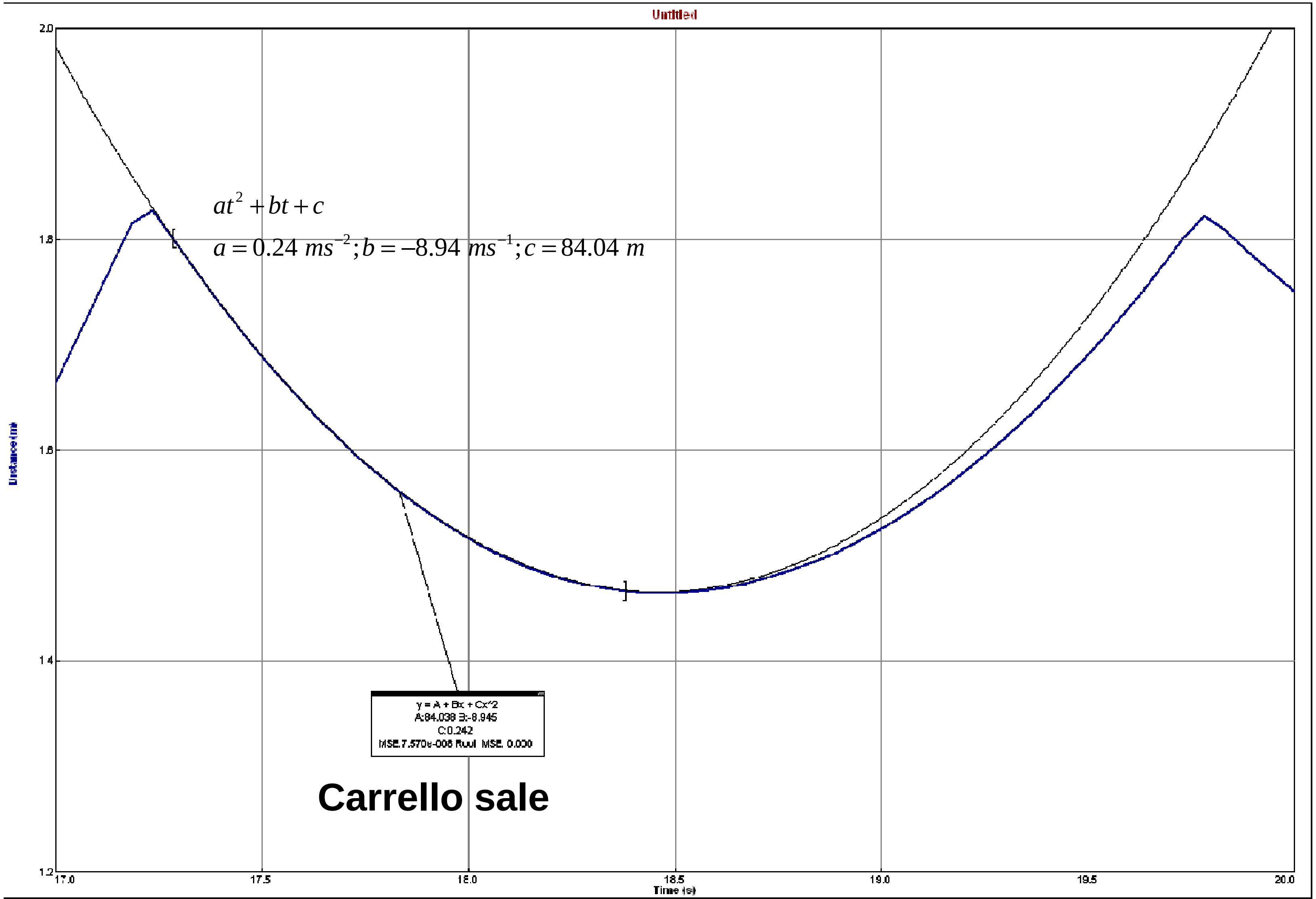
$$g_x = g\sin(\alpha)$$

$$g_y = g\cos(\alpha)$$

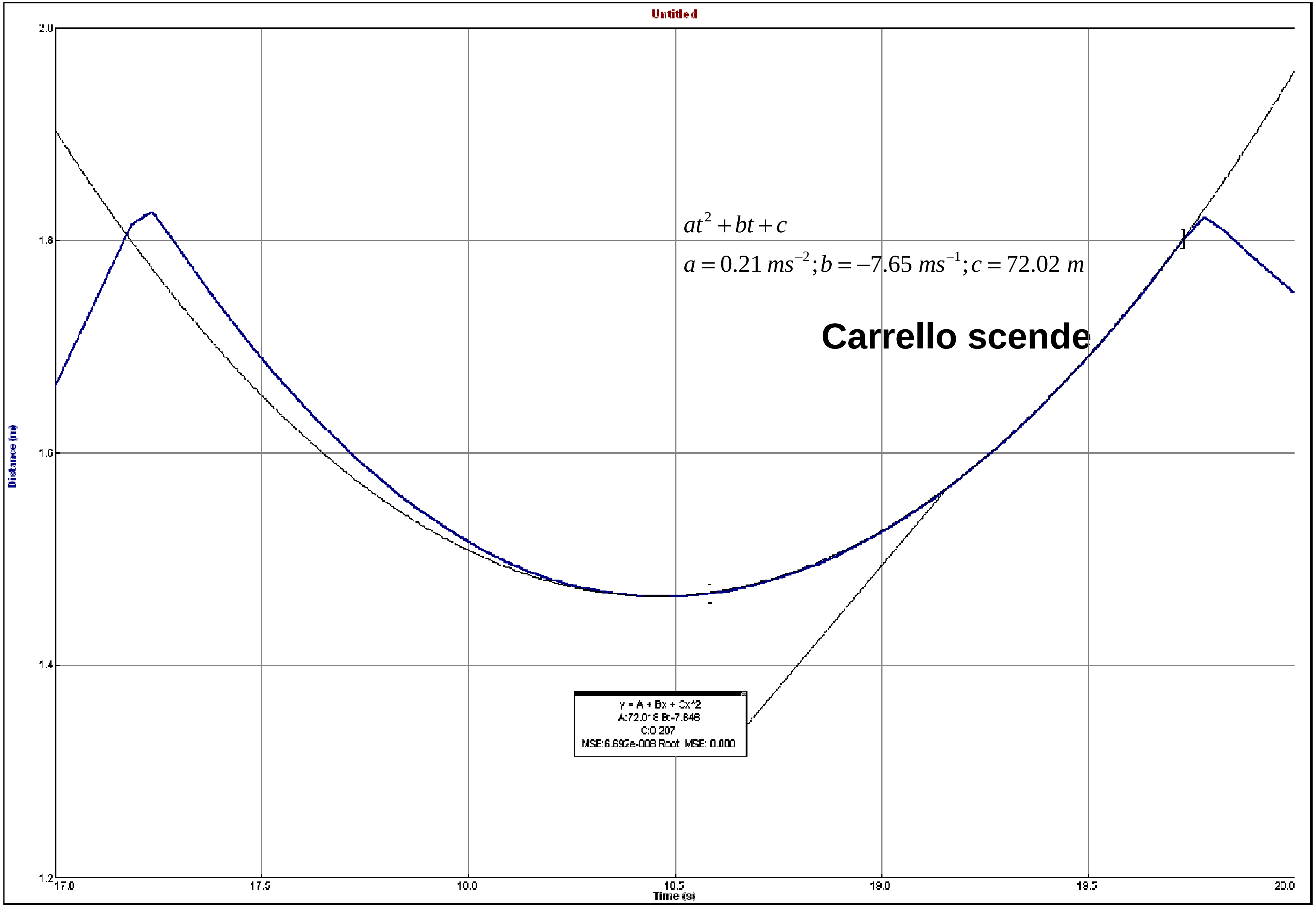
$$a_x = g\left(\sin(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha)\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + s_0$$

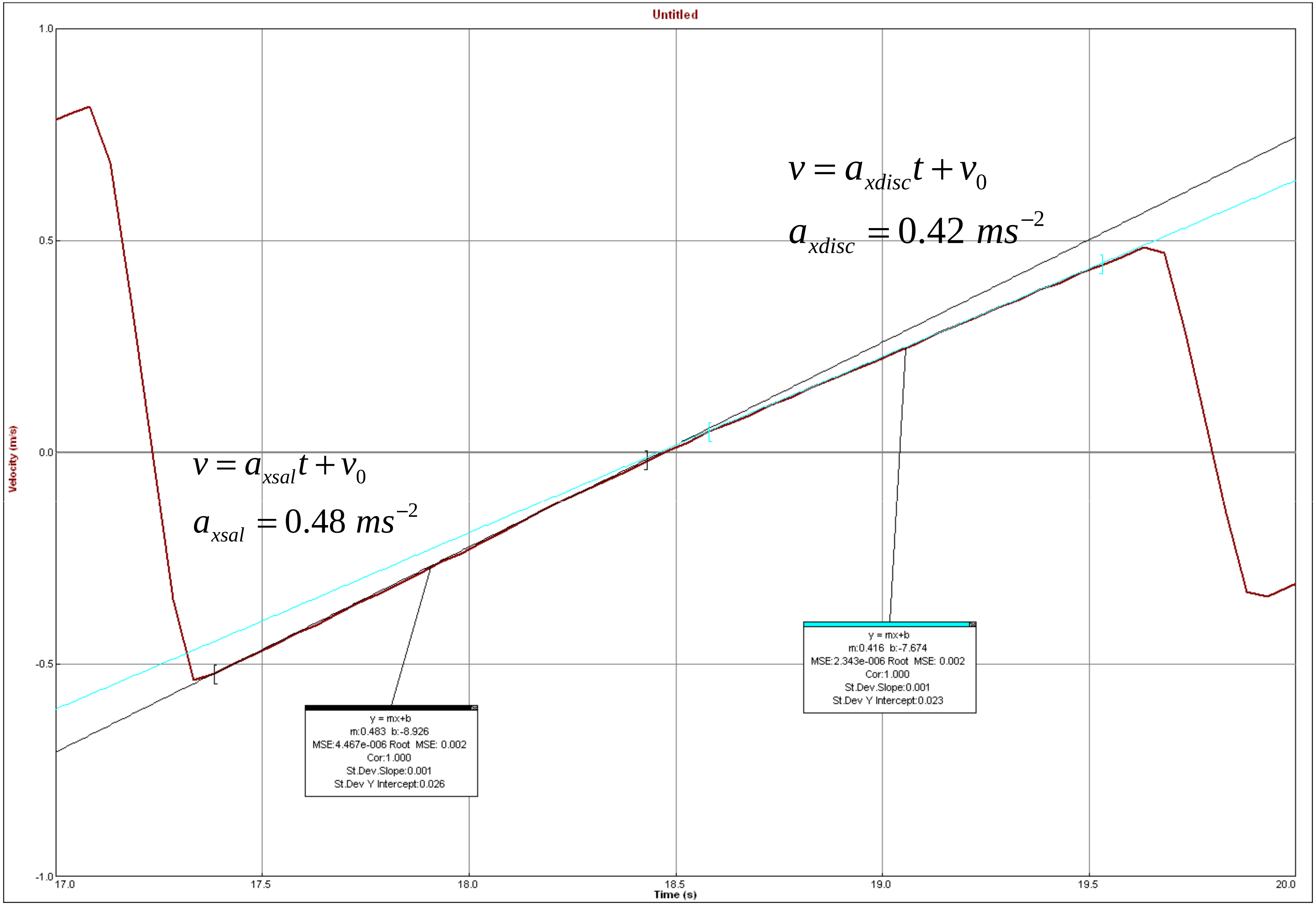
ATTENZIONE: SI SOTTINTENDE CHE IL CORPO SCENDA!!!



Carrello inizialmente in basso sale, raggiunge la quota massima e riscende



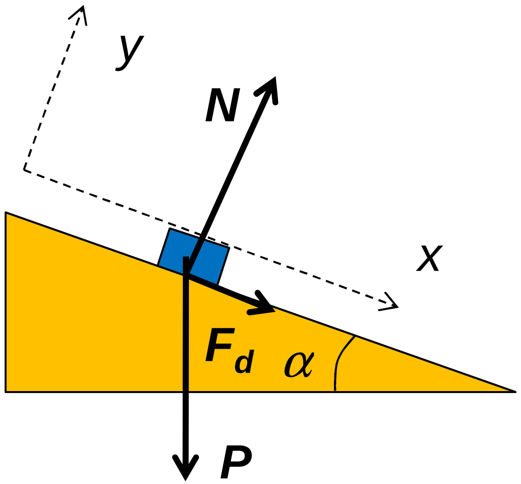
Carrello inizialmente in basso sale, raggiunge la quota massima e riscende



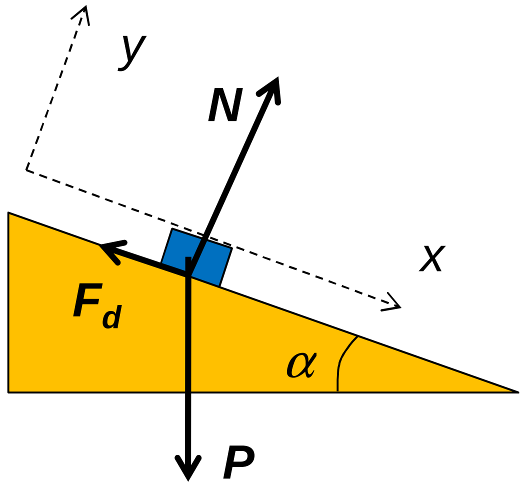
Untitled
Velocity (m/s)
Time (s)
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
17.0
17.5
18.0
18.5
19.0
19.5
20.0
$v = a_{xdisc} t + v_0$
$a_{xdisc} = 0.42\ ms^{-2}$
$v = a_{xsal} t + v_0$
$a_{xsal} = 0.48\ ms^{-2}$
y = mx+b
m:0.483 b:-8.926
MSE:4.467e-006 Root MSE: 0.002
Cor:1.000
St.Dev.Slope:0.001
St.Dev Y Intercept:0.026
y = mx+b
m:0.416 b:-7.674
MSE:2.343e-006 Root MSE: 0.002
Cor:1.000
St.Dev.Slope:0.001
St.Dev Y Intercept:0.023

Miglioriamo le equazioni

- Salita



- Discesa

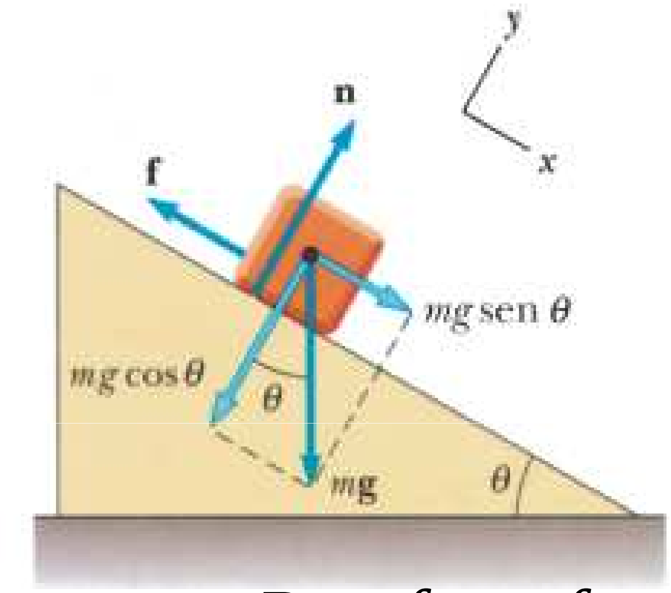


$$a_{xsal} = g\left(\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)\right) \qquad a_{xdis} = g\left(\sin(\alpha) - \mu_d \cos(\alpha)\right)$$

$$\mu_d = \frac{a_{xsal} - a_{xdisc}}{2g\cos(\alpha)}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a_{xsal} + a_{xdisc}}{2g}\right)$$

Piano inclinato con angolo variabile: fino a quale angolo il corpo resta fermo?



$$ma_x = F_x = P_x - f$$

$$ma_y = F_y = -P_y + N$$

$$ma_y = 0 \Rightarrow N = P_y$$

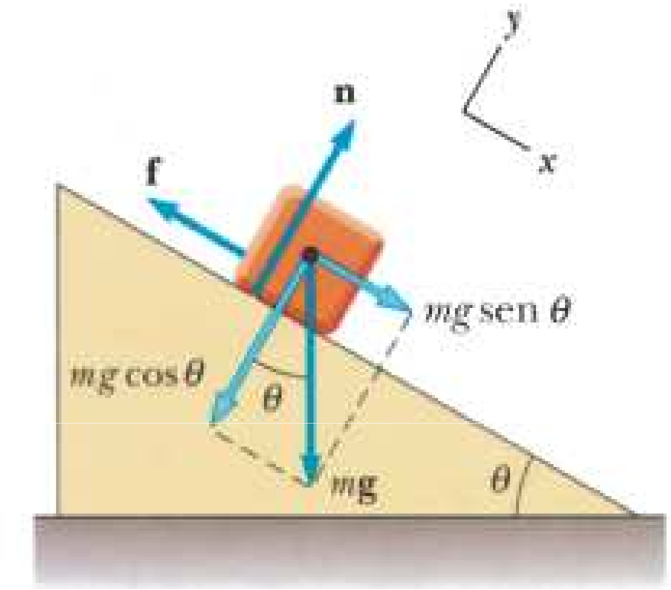
$$f \le F_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s P_y$$

$$ma_x = P_x - f \Rightarrow f = P_x - ma_x \le F_s^{\max} = \mu_s P_y$$

$$P_x - ma_x \le \mu_s P_y \Rightarrow P_x - \mu_s P_y \le ma_x = 0 \Rightarrow P_x - \mu_s P_y \le 0$$

$$\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta) \le 0 \Rightarrow \tan(\theta) \le \mu_s$$

Piano inclinato con angolo variabile: per quale angolo il corpo comincia a muoversi?



$$ma_x = F_x = P_x - f$$

$$ma_y = F_y = -P_y + N$$

$$ma_y = 0 \Rightarrow N = P_y$$

$$f > F_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s P_y$$

$$ma_x = P_x - f \Rightarrow f = P_x - ma_x > F_s^{\max} = \mu_s P_y$$

$$P_x - ma_x > \mu_s P_y \Rightarrow P_x - \mu_s P_y > ma_x = 0 \Rightarrow P_x - \mu_s P_y > 0$$

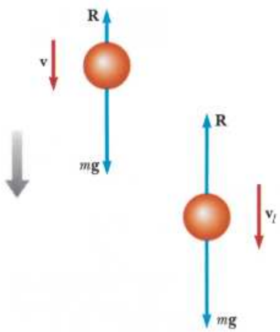
$$\sin(\theta) - \mu_s \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \tan(\theta) > \mu_s$$

Forza di attrito viscoso

- La sua direzione è <u>opposta</u> alla direzione del moto
- Il modulo è <u>proporzionale alla velocita`</u> del corpo

$$\vec{F}_v = -\beta \vec{v} = -\frac{\beta}{m}\vec{p}$$

- Ha luogo nel moto di un corpo in un fluido in particolari condizioni, generalmente <u>a basse velocita`</u>
- Se il corpo è inizialmente fermo, all'inizio F_v è nulla, poi F_v aumenta in modulo perchè il corpo accelera e quindi aumenta v. Ma, man mano che v aumenta anche F_v aumenta e quindi la velocità non potrà aumentare ma ad un certo punto le sue variazioni saranno nulle (a = 0)

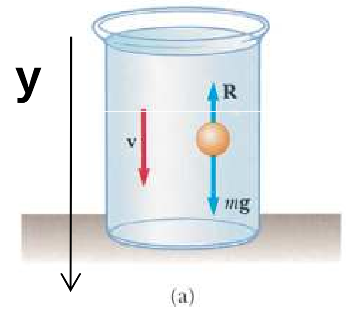


Forza di attrito viscoso

- Troviamo la legge oraria di un corpo che cade nella glicerina (fluido molto viscoso)

$$m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{F}_v = m\vec{g} - \beta\vec{v}$$

$$ma = \dot{p} = mg - \beta v = mg - \frac{\beta}{m} mv = P - \frac{\beta}{m} p$$



(a)

$$P - \frac{\beta}{m} p \equiv \zeta \Rightarrow p = (P - \zeta)\frac{m}{\beta}; \tau \equiv \frac{m}{\beta}$$

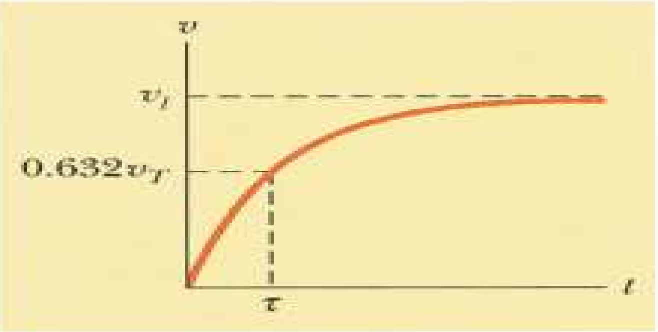
$$p = (P - \zeta)\tau \Rightarrow \dot{p} = -\tau\dot{\zeta} \qquad \dot{p} = P - \frac{\beta}{m} p \Rightarrow -\tau\dot{\zeta} = \zeta \Leftrightarrow \dot{\zeta} = -\frac{\zeta}{\tau}$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{\zeta}{\tau} \Rightarrow \int \frac{d\zeta}{\zeta} = -\int \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln\zeta = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \zeta(t) = \zeta_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow P - \frac{p(t)}{\tau} = \left(P - \frac{p_0}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Forza di attrito viscoso

$$P-\left(P-\frac{p_0}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{p(t)}{\tau}$$

$$P\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)+\frac{p_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{p(t)}{\tau}$$



$$p(t)=p_0e^{-\frac{t}{\tau}}+P\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\quad \lim_{t\to 0}p(t)=\lim_{t\to\infty}p_0e^{-\frac{t}{\tau}}+P\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=p_0$$

$$\lim_{t\to\infty}p(t)=\lim_{t\to\infty}p_0e^{-\frac{t}{\tau}}+P\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=P\tau=p_\infty \longleftarrow$$

Risultante delle forze è nulla!

$$\vec{F}_v(t)=-\frac{\beta}{m}\vec{p}=-\frac{\vec{p}}{\tau}=-\left(\frac{p_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+P\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\vec{F}_v(t)=-\vec{P}=-m\vec{g}$$

$$\lim_{t\to 0}\overrightarrow{F_v}(t)=-\frac{\overrightarrow{p_0}}{\tau}=-\frac{m\overrightarrow{v_0}}{\frac{m}{\beta}}=-\beta\overrightarrow{v_0}$$