ANALISI della DEFORMAZIONE

Introduciamo preliminarmente la terminologia

- (campo di) spostamenti
- (campo di) spostamenti deformativi
- (campo di) deformazioni
- (campo di) deformazione estensionale
- (campo di) scorrimento angolare

ANALISI della DEFORMAZIONE

Spostamento:

E' il movimento di un punto di un corpo rispetto ad un assegnato sistema di riferimento

Campo di spostamenti:

rappresenta la funzione (vettoriale di variabile vettoriale) che definisce gli spostamenti di tutti i punti di un assegnato corpo

ANALISI della DEFORMAZIONE

Campo di spostamenti deformativi:

rappresenta un campo (vettoriale) di spostamenti in grado di produrre cambiamenti di forma e/o dimensioni del corpo;

in tal senso esso è l'opposto del campo di spostamenti rigidi che è quello associato ad un moto di traslazione e/o rotazione di un corpo.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

Campo di deformazioni:

rappresenta il campo (tensoriale) che misura gli effetti associati al campo di spostamenti deformativi.

Essenzialmente esso dipende dal gradiente del campo di spostamenti deformativi attraverso sue opportune misure.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

(Campo di) deformazione estensionale

Misura in ogni punto del corpo l'entità delle variazioni di dimensioni infinitesime ε lungo assegnate direzioni (parallele agli assi del sistema di riferimento)

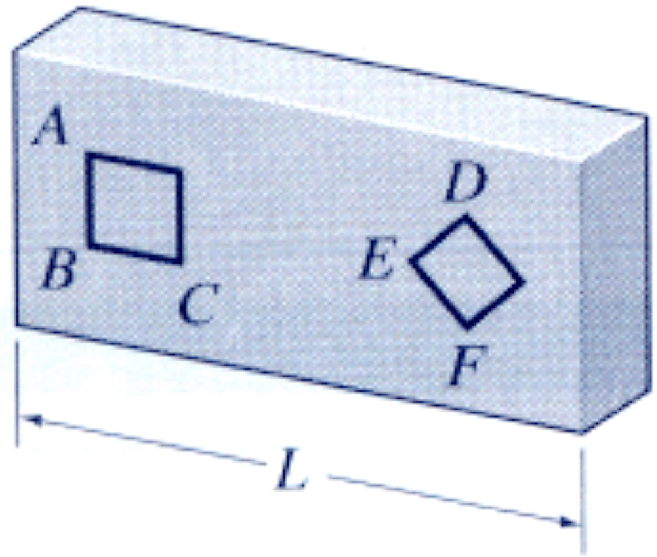
ANALISI della DEFORMAZIONE

(Campo di) deformazione angolare

Misura in ogni punto del corpo l'entità delle variazioni di forma infinitesime γ fra assegnate direzioni ortogonali (parallele agli assi del sistema di riferimento). Tali variazioni di forma vengono quantificate mediante variazioni di angoli tra direzioni ortogonali.

ANALISI della DEFORMAZIONE

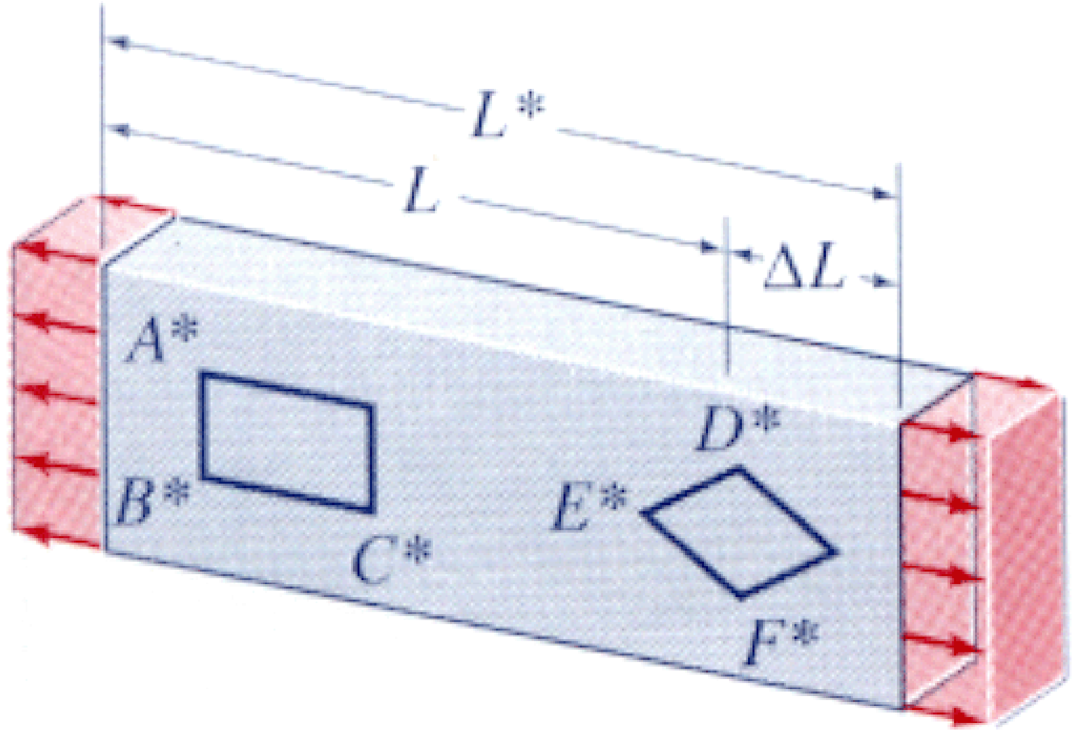
In generale gli spostamenti deformativi (d'ora innanzi semplicemente "spostamenti") producono sia variazioni di lunghezza che di angoli



(a) The undeformed bar.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

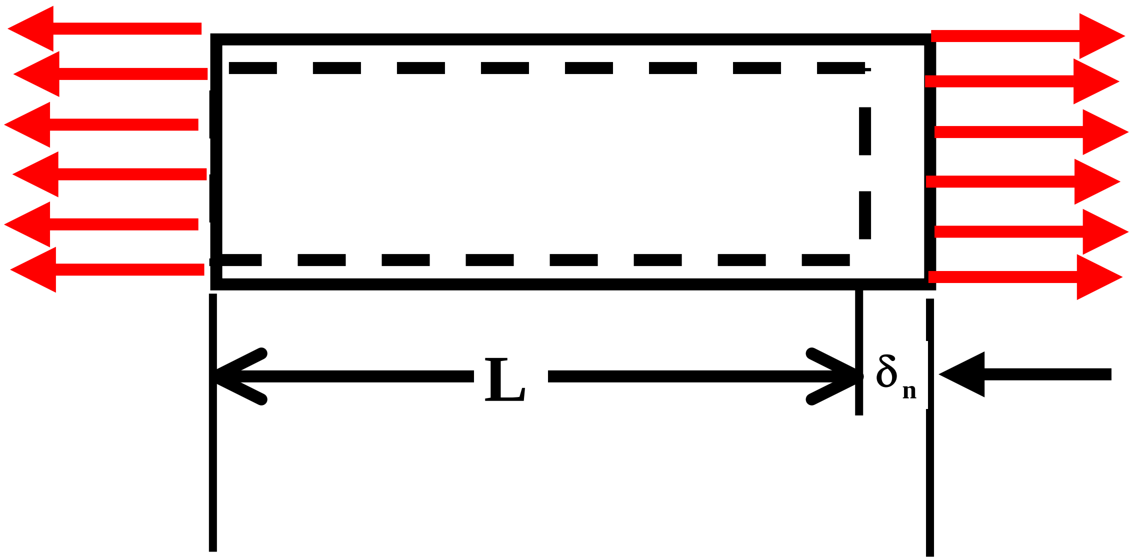


(*b*) The deformed bar.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

L'effetto macroscopico di deformazione del corpo è



e rappresenta un campo di deformazione omogeneo, cioè costante in tutti i punti del corpo.

ANALISI della DEFORMAZIONE

In tal caso (deformazioni omogenee) è ragionevole e significativo ai fini tecnici definire una misura di deformazione globale, cioè relativa all'intero corpo, in quanto essa coincide con quella relativa agli infiniti punti che lo compongono.

$$\varepsilon = \varepsilon_X(P) = \varepsilon_{media} = \frac{\Delta L}{L}$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

In situazioni più complesse, che costituiscono la maggior parte dei casi, il campo (tensoriale) di deformazione varia da punto a punto e avrà una espressione del genere

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

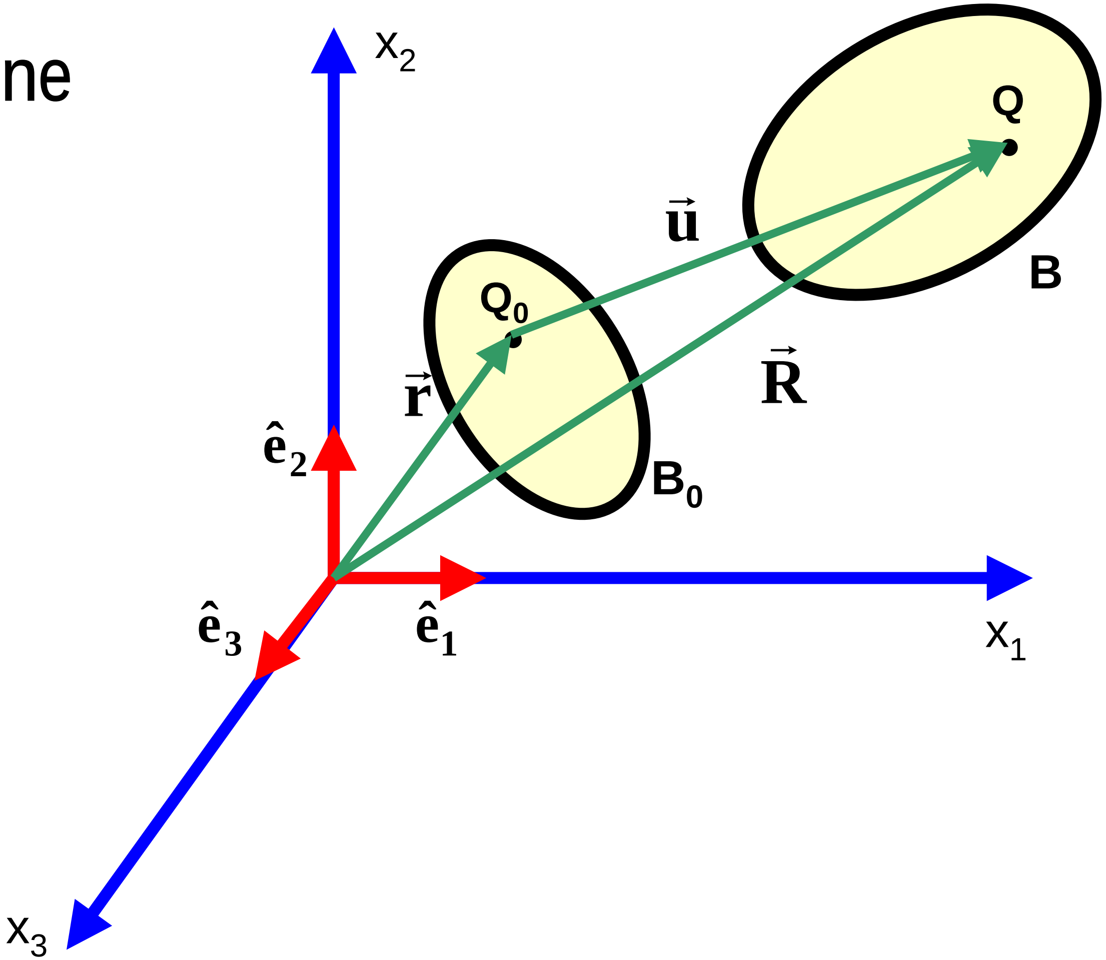
ANALISI della DEFORMAZIONE

Vediamo come è possibile caratterizzare tali quantità.

Consideriamo un corpo nella sua configurazione di riferimento (e cioè quando iniziamo a studiarne il moto) B_0 e nella generica configurazione deformata B.

ANALISI della DEFORMAZIONE

Configurazione iniziale e deformata



ANALISI della DEFORMAZIONE

Il vettore posizione di una particella Q nella configurazione indeformata è fornita da:

$$\vec{\mathbf{r}} = a_i \hat{\mathbf{e}}_\mathrm{i}$$

Il vettore posizione della stessa particella Q nella configurazione deformata è fornita da:

$$\vec{\mathbf{R}} = x_i \hat{\mathbf{e}}_\mathrm{i}$$

ANALISI della DEFORMAZIONE

Il vettore spostamento associato a tale particella è fornito da:

$$\vec{\mathbf{u}} = u_i \hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}$$

da cui

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{u}}$$

ANALISI della DEFORMAZIONE

VARIABILI INDIPENDENTI

per la descrizione del moto si possono scegliere due sistemi di variabili indipendenti

- quelle nel riferimento iniziale (descrizione materiale o Lagrangiana)
- quelle nel riferimento deformato (descrizione spaziale o Euleriana).

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

DESCRIZIONE LAGRANGIANA (o materiale)

- Si riferisce alla configurazione indeformata B_0
- Si assumono le variabili (a_1, a_2, a_3), dette coordinate Lagrangiane, come variabili indipendenti.
- La posizione della particella nella configurazione deformata B è descritta dalle funzioni $x_i = x_i(a_1, a_2, a_3)$.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

DESCRIZIONE EULERIANA (o spaziale)

- Si riferisce alla configurazione deformata B
- Si assumono le variabili (x_1, x_2, x_3), dette coordinate Euleriane, come variabili indipendenti.
- La posizione della particella nella configurazione indeformata B_0 è descritta dalle funzioni $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$.

ANALISI della DEFORMAZIONE

Le funzioni $x_i = x_i\ (a_1, a_2, a_3)$ e $a_i = a_i\ (x_1, x_2, x_3)$ si assumono ad un sol valore (quindi invertibili), continue e differenziabili rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti quante volte necessario (almeno tre) ed in tutti i punti del corpo fatta eccezione per punti, curve o superfici singolari.

ANALISI della DEFORMAZIONE

Un campo di spostamenti fisicamente ammissibile richiede che il GRADIENTE della DEFORMAZIONE

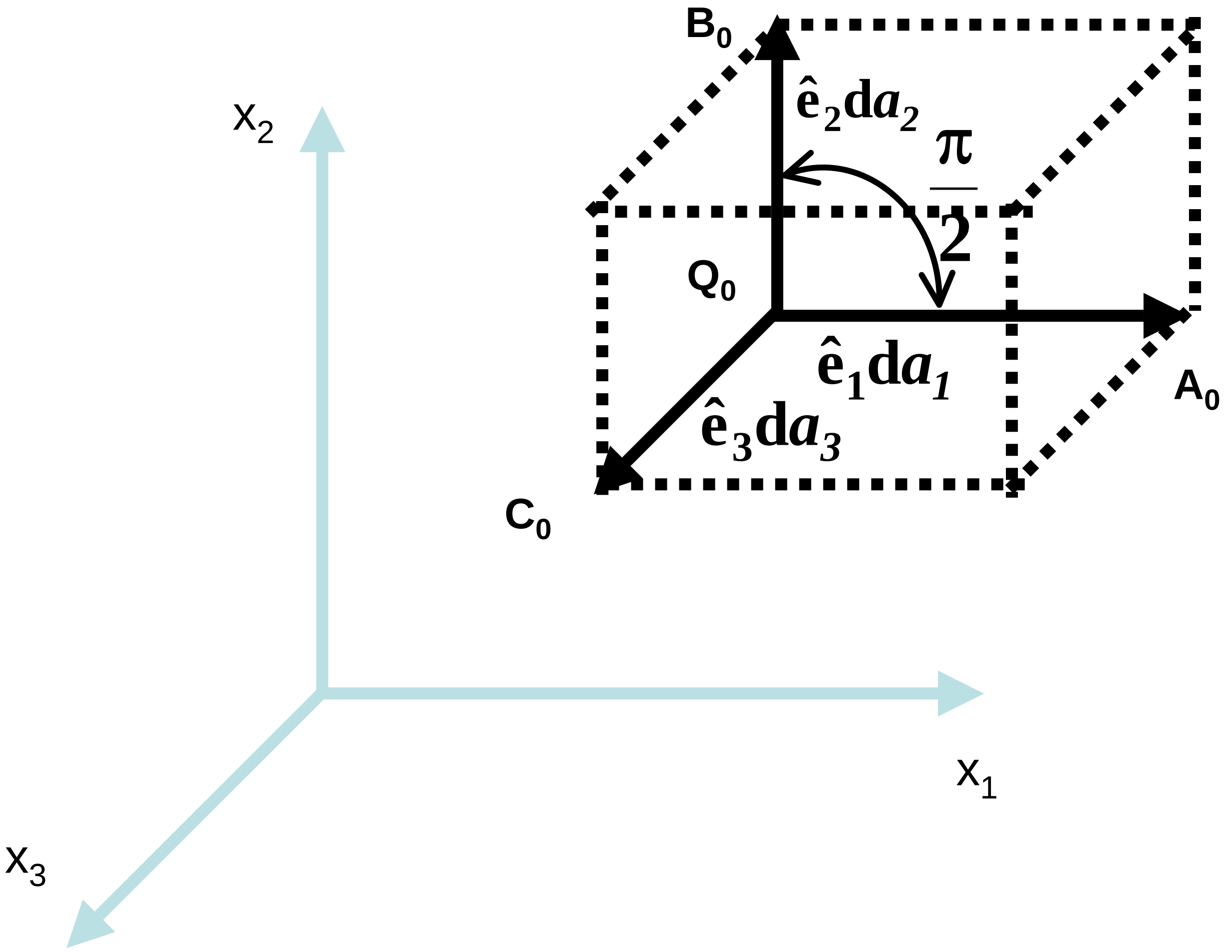
$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial a_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial a_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial a_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial a_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial a_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial a_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial a_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{bmatrix} \quad \text{sia tale che} \quad \det \mathbf{F} > 0$$

ANALISI della DEFORMAZIONE

Questa condizione è richiesta dalla necessità di assicurare che il volume del trasformato di un intorno elementare, costruito in corrispondenza di un punto generico del corpo indeformato, abbia volume positivo. Detto infatti dV_o il volume dell'intorno elementare e dV il volume del suo trasformato, risulta

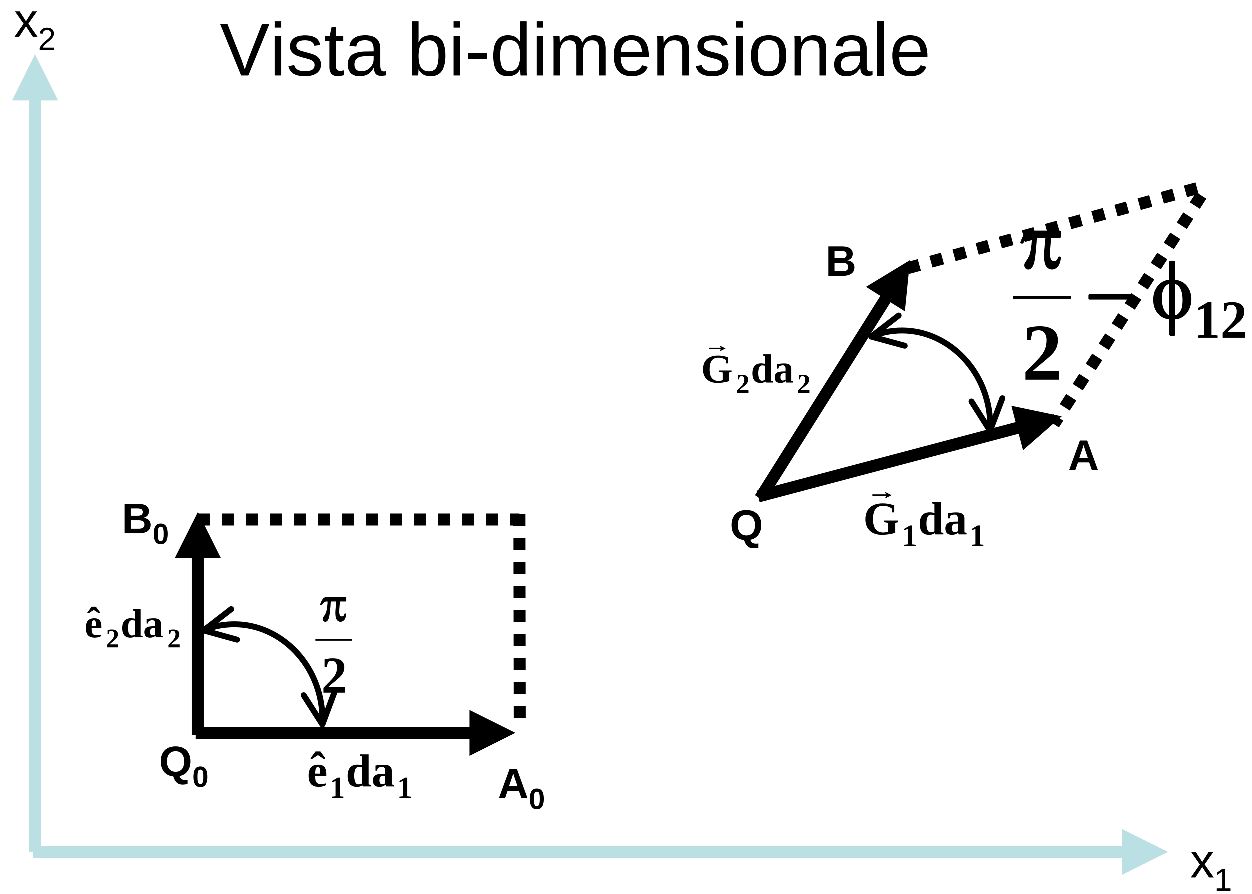
$$\Theta = \frac{dV - dV_o}{dV_o} = \det \mathbf{F} - 1 = \frac{(\mathbf{Fe}_1 \times \mathbf{Fe}_2) \cdot \mathbf{Fe}_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3} - 1$$

ANALISI della DEFORMAZIONE



ANALISI della DEFORMAZIONE

Vista bi-dimensionale



ANALISI della DEFORMAZIONE

Un'altra misura di interesse per le applicazioni è quella, detta dilatazione lineare, relativa alla variazione specifica di lunghezza di una elemento lineare infinitesimo (fibra materiale) definito dal versore e:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{F}^{\mathbf{t}}\mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1$$

Si assume ε positivo se la fibra materiale aumenta di lunghezza.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della DEFORMAZIONE

Infine, l'ulteriore misura di deformazione, detta scorrimento angolare, è quella che misura la variazione di angolo tra due fibre materiali assunte ortogonali, per consuetudine, nella configurazione indeformata. Detti e_a , e_b i versori di tali fibre, si ha:

$$\gamma_{ab} = \arcsin\left[\frac{(\mathbf{F}^t\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b}{(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)}\right]$$

Si assume γ_{ab} positivo se l'angolo retto tra le fibre materiali diminuisce.

ANALISI della DEFORMAZIONE

E' evidente dalle relazioni precedenti che le misure di deformazione fin qui introdotte, che costituiscono le misure esatte di deformazione, sono funzioni non lineari del gradiente di deformazione.

Una notevole semplificazione di tali espressioni si ottiene ipotizzando che la configurazione indeformata del corpo e quella deformata coincidano tra loro.

ANALISI della DEFORMAZIONE

Questa ipotesi, che è verificata in moltissime applicazioni tecniche, viene comunemente denominata ipotesi di “piccoli spostamenti” anche se, più correttamente, dovrebbe essere denominata di “piccole deformazioni e spostamenti”.

ANALISI della DEFORMAZIONE

Dal punto di vista analitico tale condizione si assume soddisfatta se:

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right| << 1 \qquad i, j = 1,2,3$$

ossia se la norma del gradiente del campo di spostamenti ha, in ogni punto del corpo, modulo molto più piccolo dell'unità.

ANALISI della DEFORMAZIONE

Si dimostra in tal caso che le misure di deformazione fin qui introdotte si esprimono mediante il TENSORE di DEFORMAZIONE INFINITESIMA:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\right]$$

$$2\mathbf{E}_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

Come si vede, il tensore è simmetrico

ANALISI della DEFORMAZIONE

Ponendo

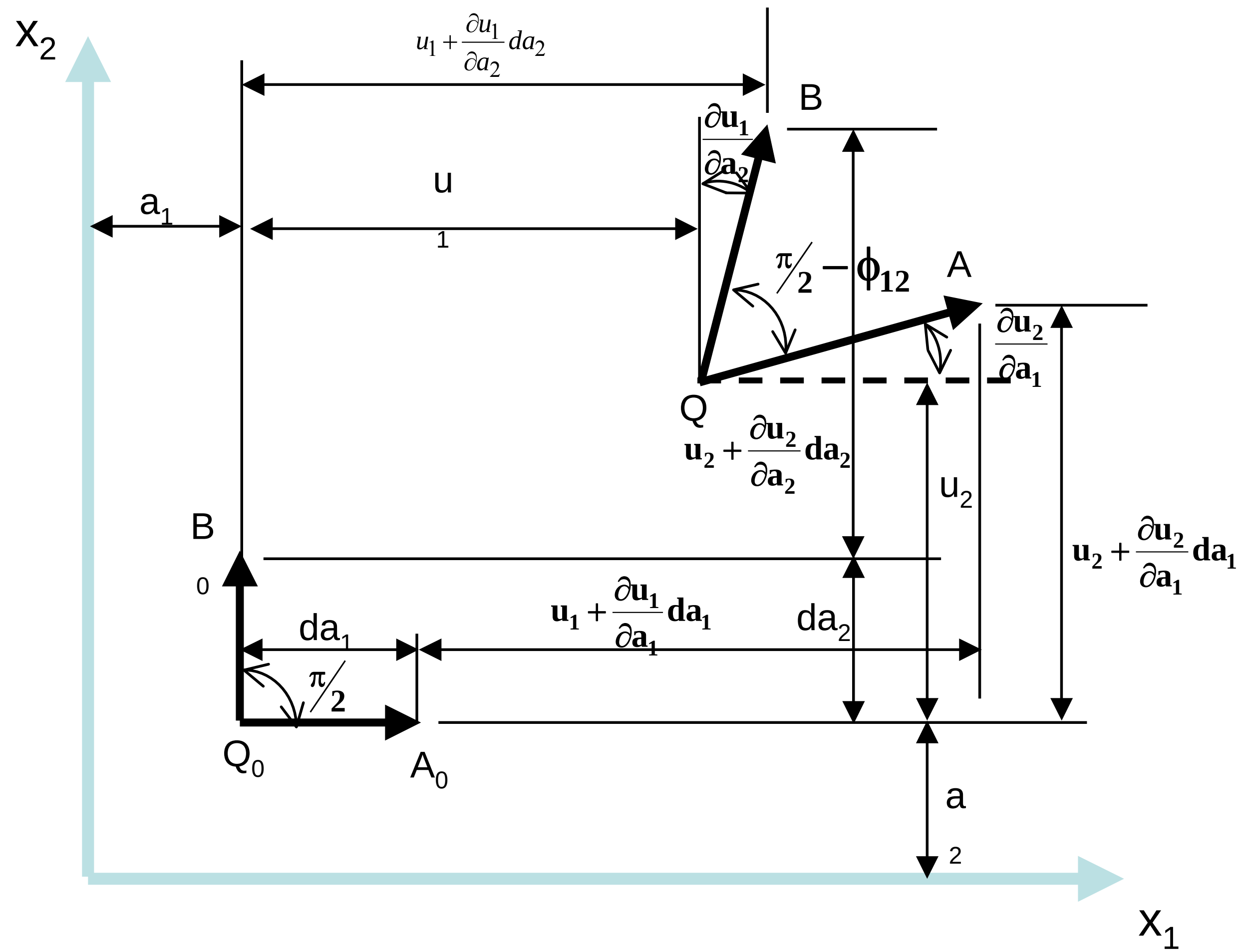
$$\mathbf{E}_{ii} = \varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_i}; \qquad 2\mathbf{E}_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}$$

risulta:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

ANALISI della DEFORMAZIONE

Interpre-tazione geome-trica di γ_{xy}



ANALISI della DEFORMAZIONE

In generale:

$$\varepsilon_{\mathbf{e}} = \mathbf{E}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$$

$$\gamma_{\mathbf{ab}} = 2\mathbf{E}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Theta = \mathrm{tr}\,\mathbf{E}$$

esse risultano molto più semplici di quelle esatte

$$\varepsilon_{\mathbf{e}} = \sqrt{\mathbf{F}^{\mathbf{t}}\mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} - 1$$

$$\gamma_{\mathrm{ab}} = \arcsin\left[\frac{(\mathbf{F}^{\mathbf{t}}\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{e}_{\mathrm{a}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{b}}}{(1+\varepsilon_{\mathrm{a}})(1+\varepsilon_{\mathrm{b}})}\right]$$

$$\Theta = \det \mathbf{F} - 1$$

ANALISI della DEFORMAZIONE

Il legame tra le due misure di deformazione è costituito dal fatto che le prime costituiscono la “derivata” delle seconde rispetto ad un opportuno parametro scalare che definisce l’entità della deformazione.

Usualmente, tale parametro è la norma del gradiente del campo di spostamenti.