ANALISI della TENSIONE

Le forze che possono agire sul modello di mezzo continuo sono essenzialmente di due tipi:

- forze di volume (o di massa)
- forze di superficie

Le prime rappresentano gli effetti prodotti dalla presenza di altri corpi;

le seconde tengono in conto le interazioni tra parti del corpo o del corpo con l'ambiente circostante

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

Forze di volume:

- Sono dovute alla presenza di un “campo” in ogni punto del corpo; ad esempio forze gravitazionali, d’inerzia, magnetiche, ecco.
- Sono sempre presenti
- La loro intensità è proporzionale al volume (massa) del corpo - dimensioni: [F \ L^3].

ANALISI della TENSIONE

Forze di superficie:

- Sono essenzialmente delle forze di contatto che agiscono su una determinata area del corpo con intensità proporzionale a tale area -
- dimensioni: [F \ L^2].
- tengono conto della attrazione o repulsione degli atomi su una porzione di superficie rispetto agli atomi sulla porzione adiacente.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

Si è detto che le forze agenti su di un corpo producono i seguenti effetti:

- Modificano la velocità del corpo
- Determinano una variazione della forma del corpo

Tuttavia una forza applicata mediante un oggetto appuntito (un chiodo) produce effetti sensibilmente diversi da quelli dovuti ad oggetti piatti.

ANALISI della TENSIONE

Ne consegue che, per tener conto di questi effetti, dobbiamo introdurre una nuova quantità che definiamo TENSIONE.

Rappresenta la forza per unità di superficie:

$$\delta F/\delta A \text{ quando } \delta A \rightarrow 0$$

e quindi fornisce una misura del “grado di concentrazione” di una forza su una data area (ad esempio la forza esercitata sul terreno dal tacco di una scarpa o dalla fondazione di un edificio).

ANALISI della TENSIONE

Unità di Misura	Equivalenti in MPa
megapascal (Mpa)	1
gigapascal (Gpa)	0.001
pascal (Pa) = N/m^2	1,000,000
kg/cm^2	10.197
d/cm^2	100,000,000.000
bar (b)	10
kilobar (kb)	0.010
pounds per square inch (psi)	145.030
atmosfera (atm) $\simeq$ bar	9.869

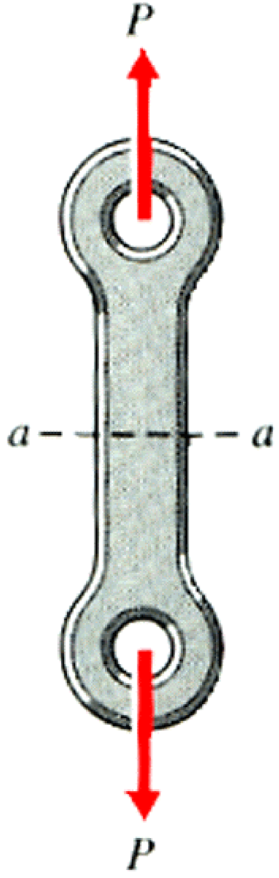
ANALISI della TENSIONE

Essendo le forze quantità vettoriali, esisteranno due tipi di tensione, dimensionalmente analoghe ma concettualmente diverse

- tensioni normali (dovute alle componenti delle forze ortogonali alla superficie di riferimento) - vengono solitamente indicate con la lettera σ;
- tensioni tangenziali (dovute alle componenti delle forze parallele alla superficie di riferimento) - vengono solitamente indicate con la lettera τ;

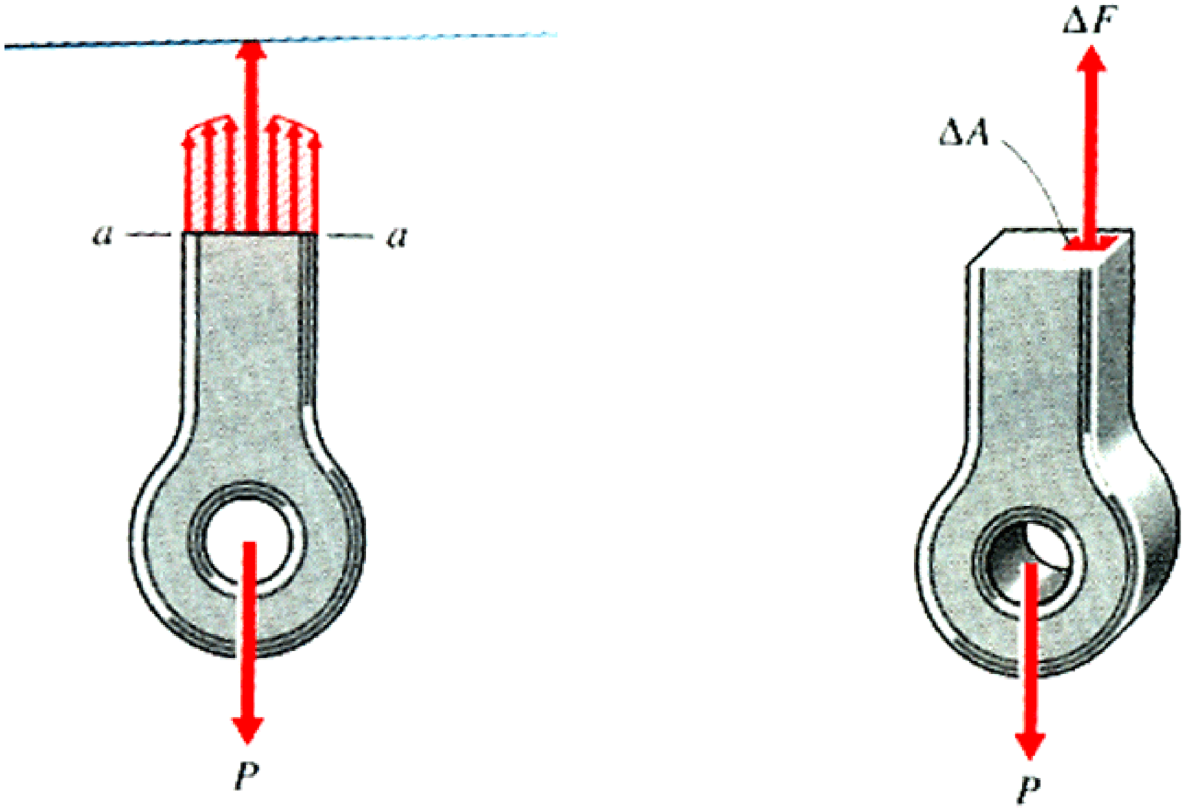
prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

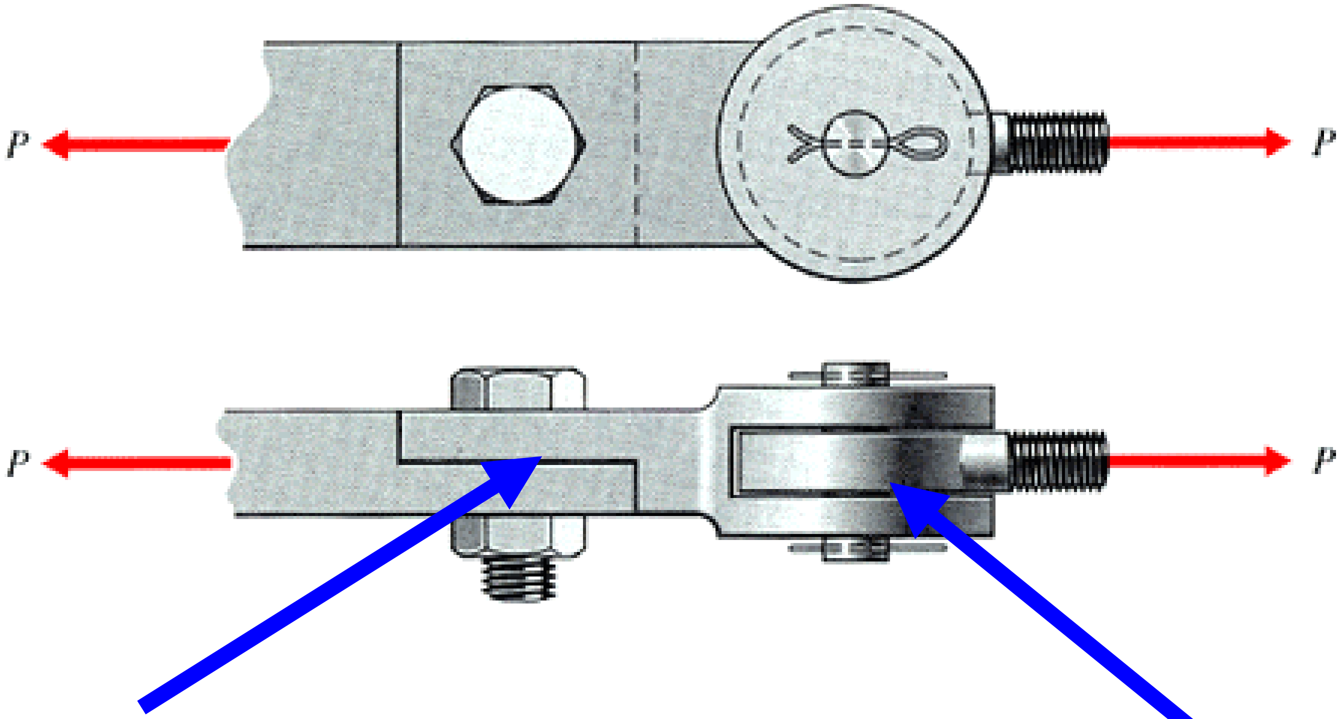


$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$

ANALISI della TENSIONE



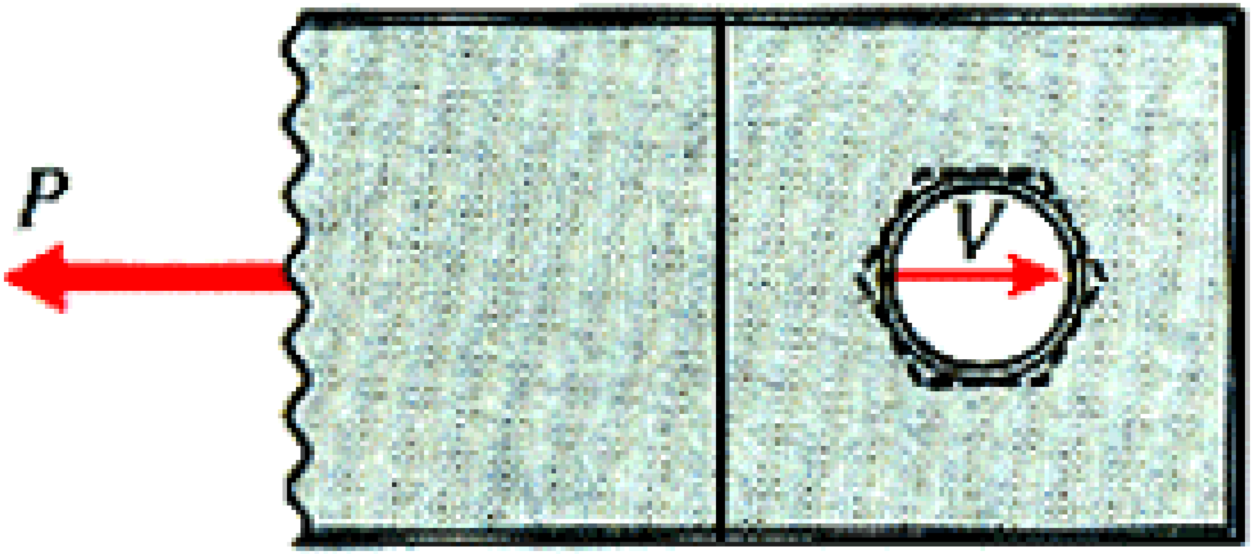
ANALISI della TENSIONE



Superficie di taglio
semplice

Superficie di taglio
doppia

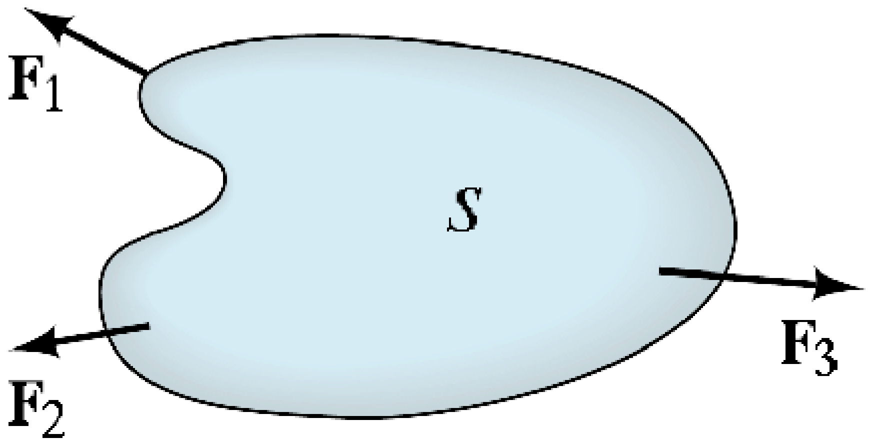
ANALISI della TENSIONE



$$\tau_{media} = \frac{V}{A}$$

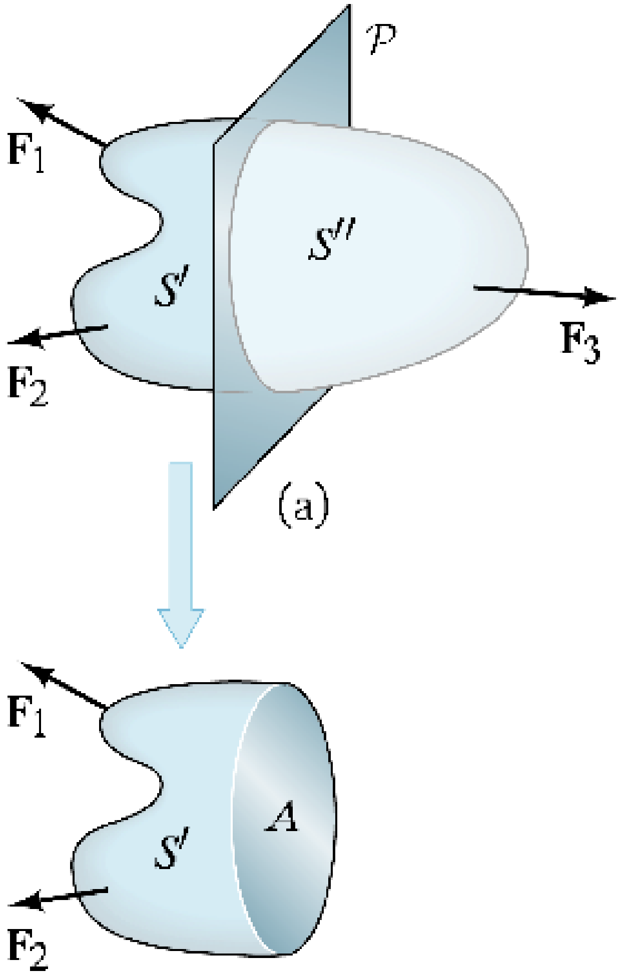
ANALISI della TENSIONE

Consideriamo un corpo in equilibrio



$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$$

ANALISI della TENSIONE

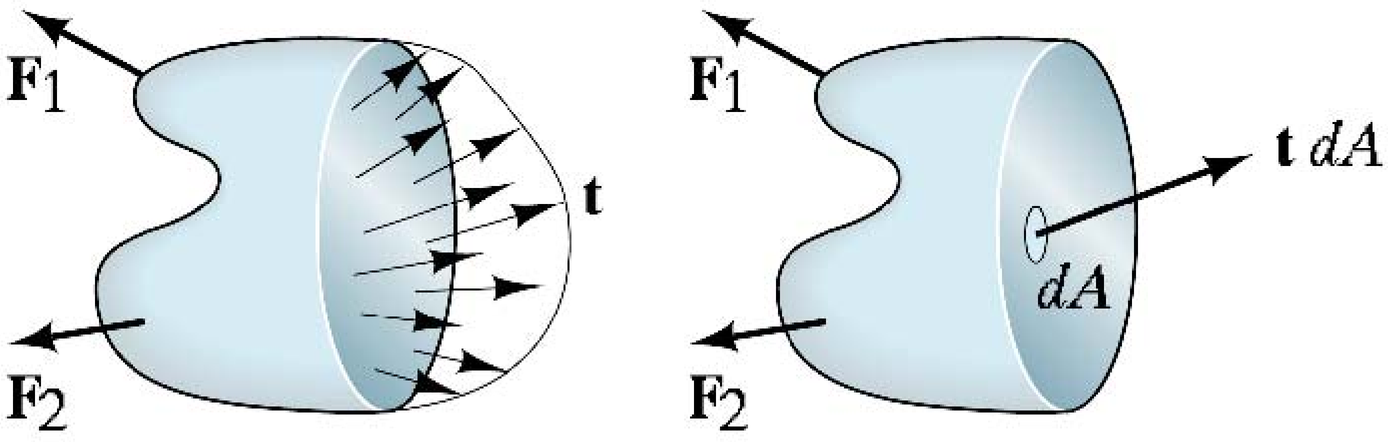


Ciascuna delle due parti, privata dell'altra, non è più in equilibrio.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \neq \mathbf{0}$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE



L'equilibrio inizialmente esistente viene ripristinato considerando una distribuzione di vettori tensione (tractions) in equilibrio con $F_1 + F_2$.

ANALISI della TENSIONE

Evidentemente

- essendo F_1 , F_2 e F_3 in equilibrio tra loro ($F_1 + F_2 + F_3 = 0$) e
- la risultante dei vettori t è in equilibrio con F_1 e F_2

F_3 è equivalente alla risultante dei vettori t

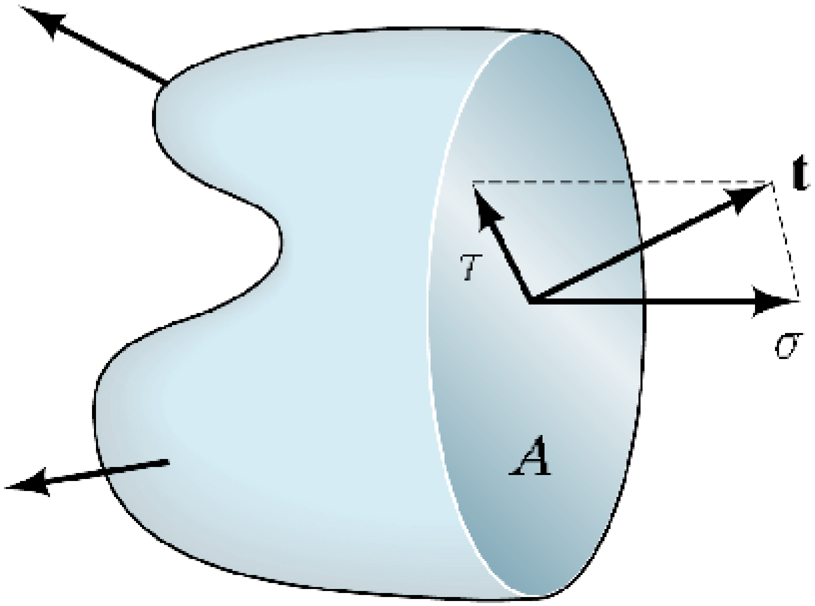
$$F_3 = \int_\Omega t\, dS$$

ANALISI della TENSIONE

Principio di sezionamento: ogni sottoparte di un corpo in equilibrio deve rimanere in equilibrio applicando sulla parte in esame una distribuzione di vettori equivalente alle forze agenti sulla parte rimossa.

equivalente significa che le due distribuzioni di vettori hanno lo stesso risultante e momento risultante rispetto ad un polo arbitrario

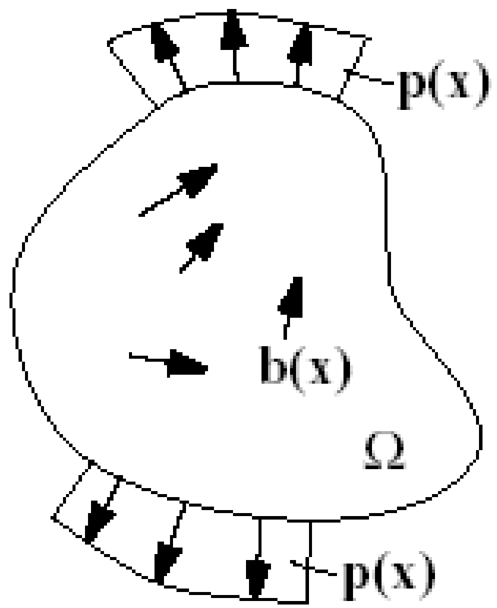
ANALISI della TENSIONE



Decomposizione di t nella componente normale σ e tangenziale τ

ANALISI della TENSIONE

Facendo comparire esplicitamente le forze di massa (b) e superficiali (p)



ANALISI della TENSIONE

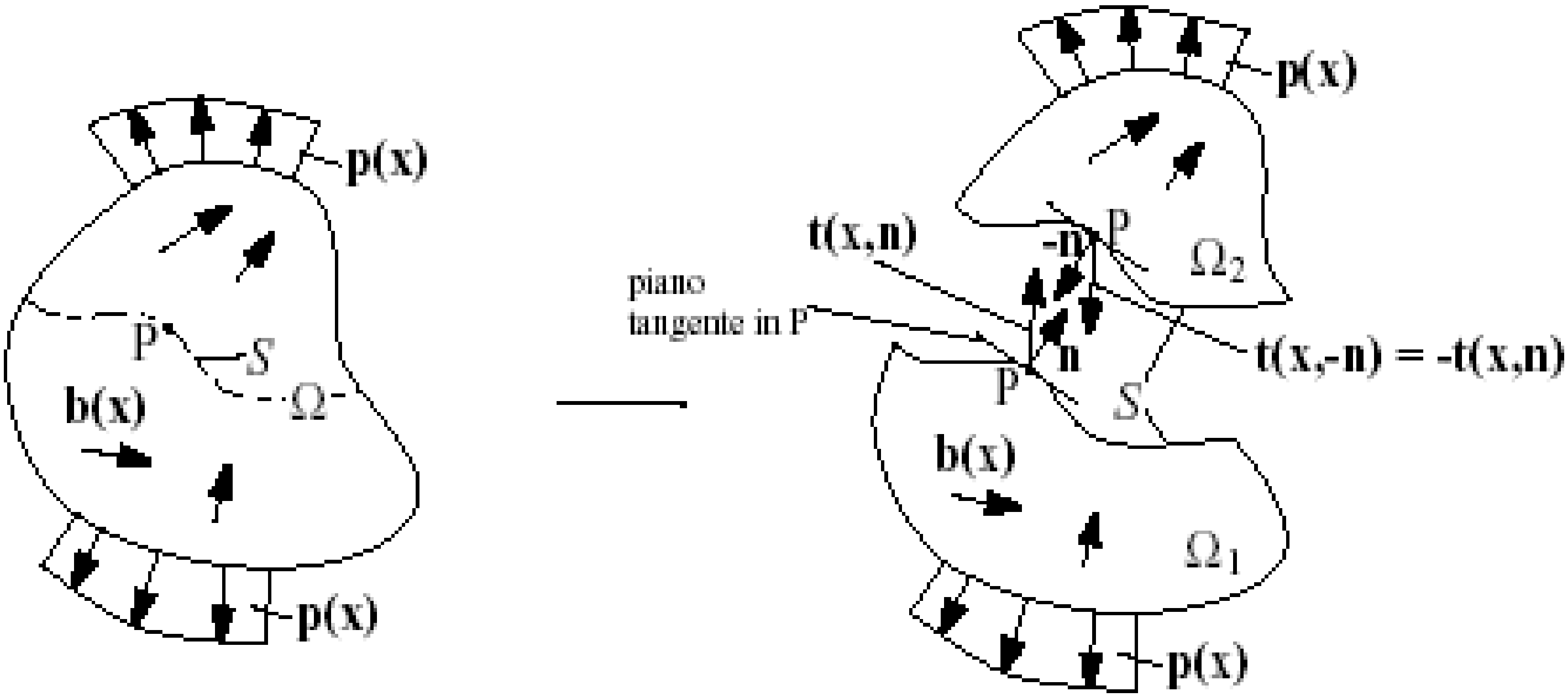
La condizione di equilibrio del corpo si esprimerà in maniera analoga a quella di un corpo “rigido”

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \int_{\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{x})dS = \mathbf{o} \\ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{p}(\mathbf{x})dS = \mathbf{o} \end{cases}$$

essendo x il vettore posizione del generico punto in un assegnato sistema di riferimento.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE

Domanda: da cosa dipende t e quali sono le sue proprietà?

Postulato di Cauchy

$$t = t(x,n)$$

ossia t varia in funzione del punto (x) e della normale (n) alla superficie (assunta regolare) passante per x.

ANALISI della TENSIONE

Lemma di Cauchy (principio di azione e reazione)

$$t(x,-n) = - t(x,n)$$

NOTA BENE: Poiché t dipende da n, superfici passanti per lo stesso punto (quindi caratterizzate da normali diverse) daranno luogo a

vettori tensione diversi nello stesso punto

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

Sorge quindi spontanea una domanda:

si può esplicitare la dipendenza di t da n?

Teorema di Cauchy

$$t = t(x,n) = T(x)\, n$$

essendo T(x) il TENSORE delle TENSIONI ovviamente variabile con il punto x.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

Tensore: funzione (molto speciale) vettoriale di variabile vettoriale

tale funzione è infatti lineare, ossia additiva ed omogenea

$$\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2) = \alpha_1\mathbf{A}(\mathbf{u}_1) + \alpha_2\mathbf{A}(\mathbf{u}_2)$$

$$\forall\, \mathbf{u}_1 \text{ e } \mathbf{u}_2 \text{ vettori} \qquad \forall\, \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ scalari}$$

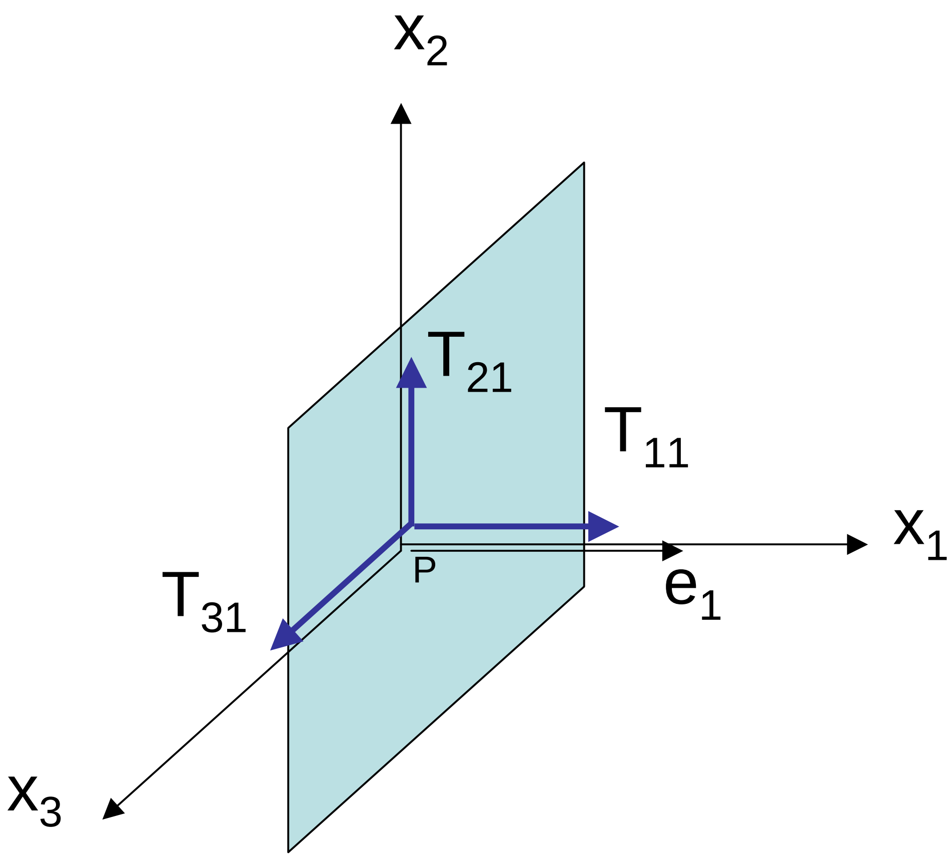
ANALISI della TENSIONE

Matrice associata ad un tensore: tabella numerica che si ottiene disponendo secondo le COLONNE le componenti dei vettori $\mathrm{A}e_1$, $\mathrm{A}e_2$, $\mathrm{A}e_3$ essendo e_1 il versore dell'asse 1 (x) del sistema di riferimento, e_2 quello dell'asse 2 (y), ecc...

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}$$

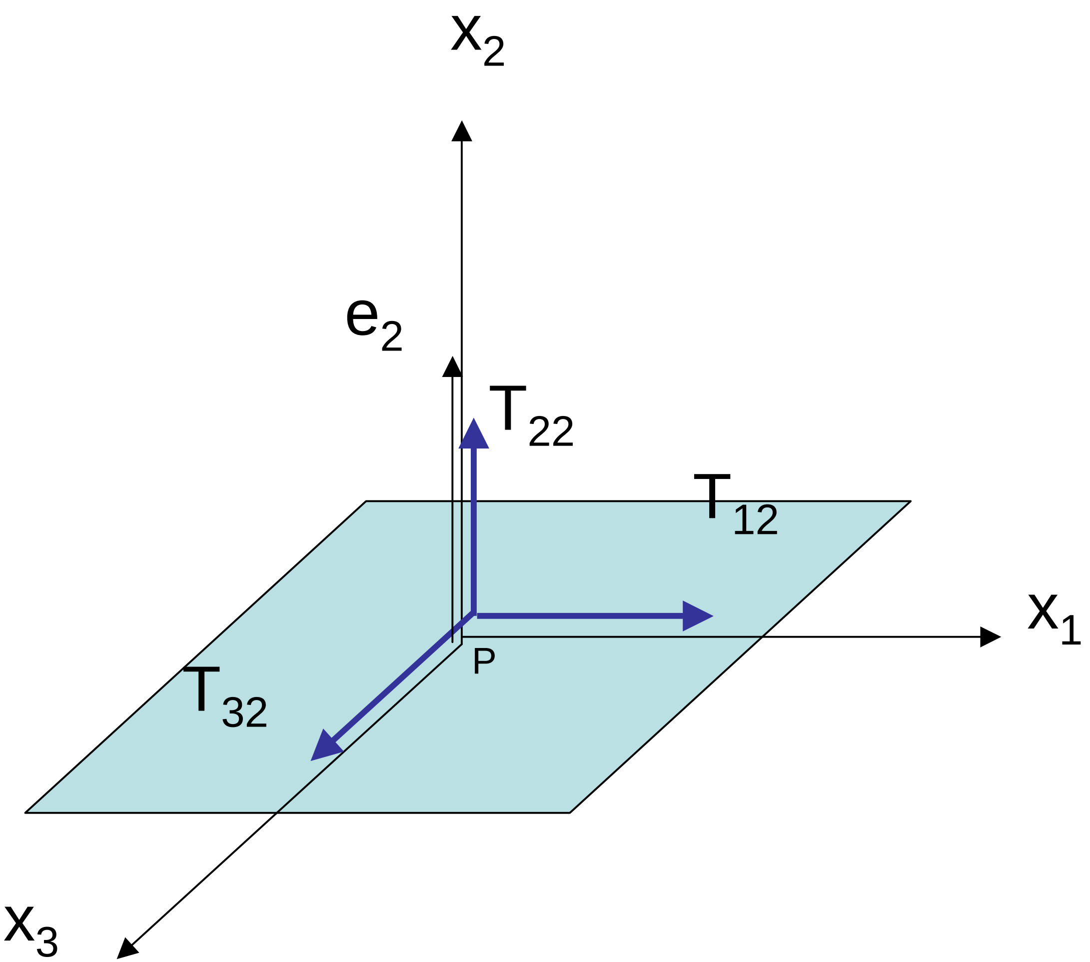
prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

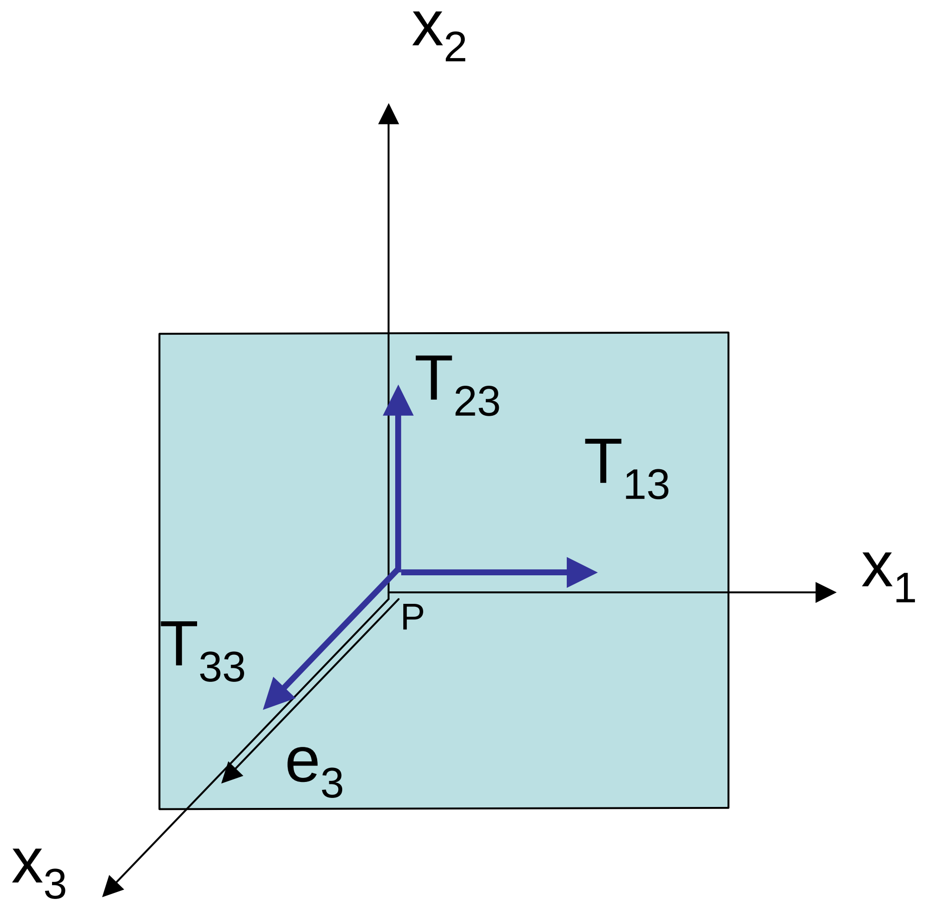


Una interpretazione meccanica delle espressioni precedenti si ottiene con riferimento al tensore delle tensioni: i vettori a lato sono le componenti del vettore $\mathbf{t_1} = \mathbf{Te_1}$ (N.B. Il secondo indice denota la normale su cui valutiamo la tensione - Il primo indica la direzione su cui valutiamo la componente del vettore tensione)

ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE

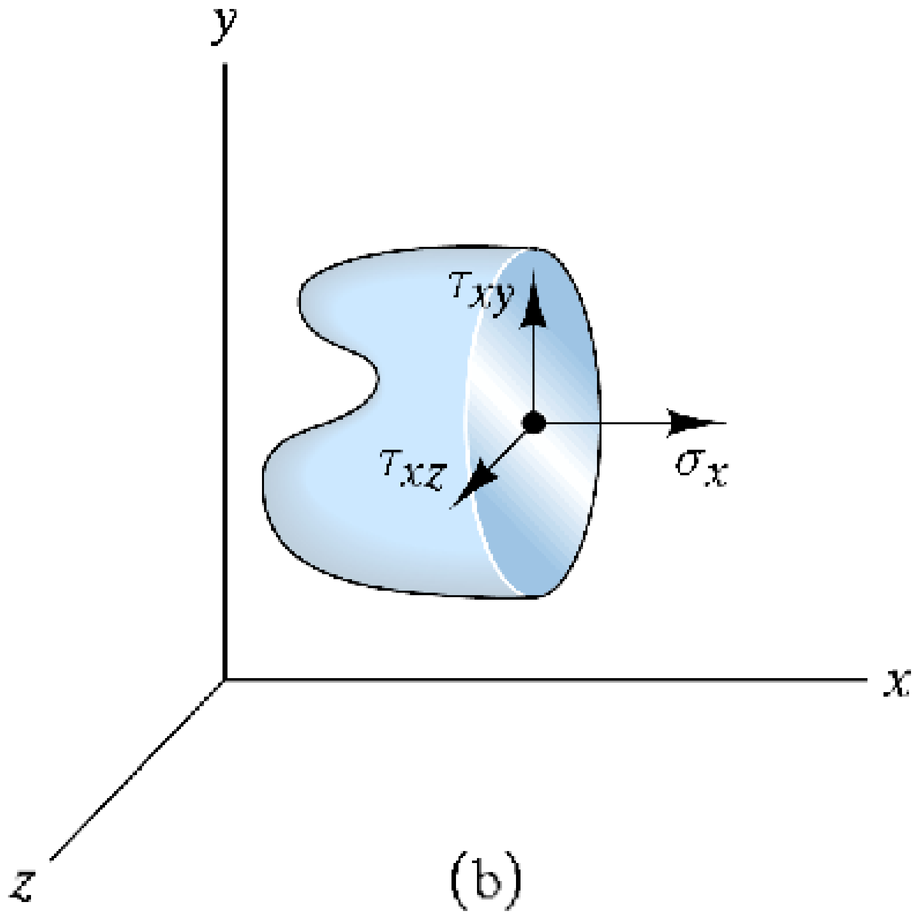
Attenzione: questa terminologia, del tutto rigorosa, non coincide con quella usualmente adottata nei testi di ingegneria in cui gli indici sono scambiati tra loro.

Nel caso del tensore delle tensioni ciò non costituisce un problema dal punto di vista operativo in quanto il

TENSORE delle TENSIONI è SIMMETRICO ($T_{ij}=T_{ji}$)

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

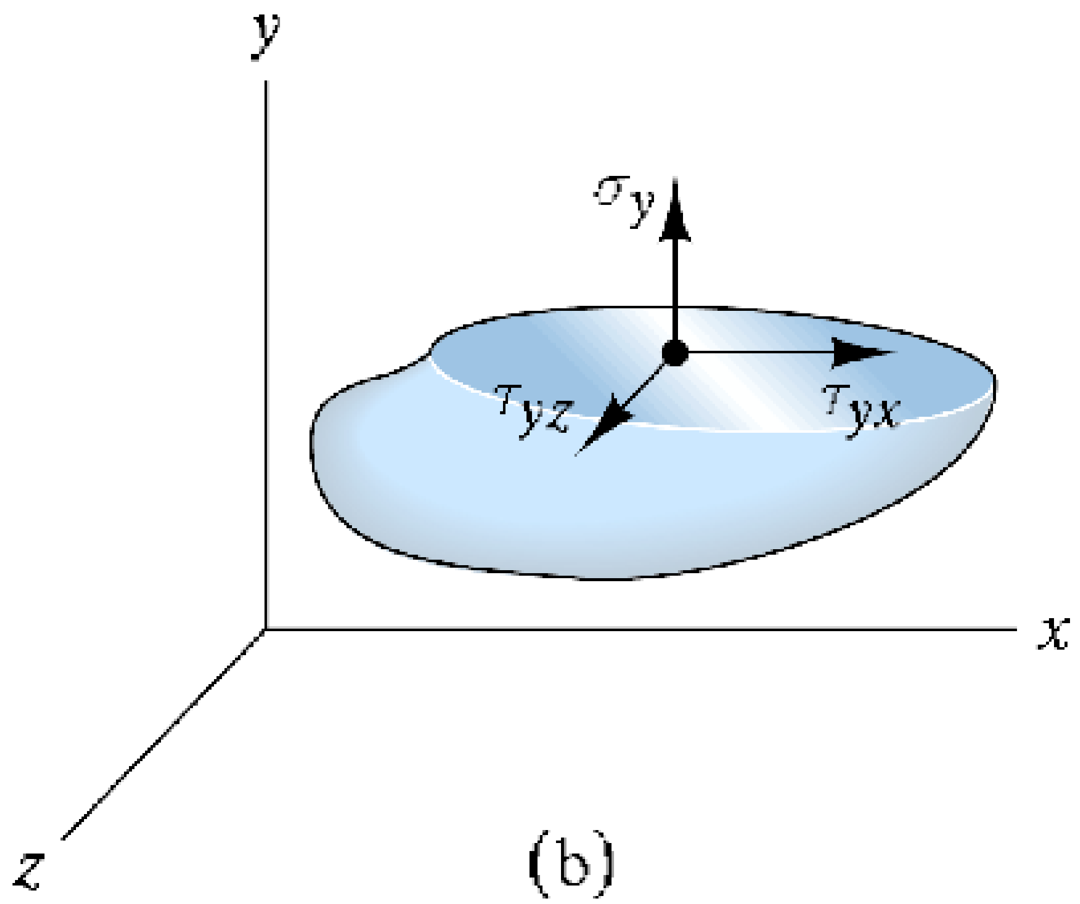
ANALISI della TENSIONE



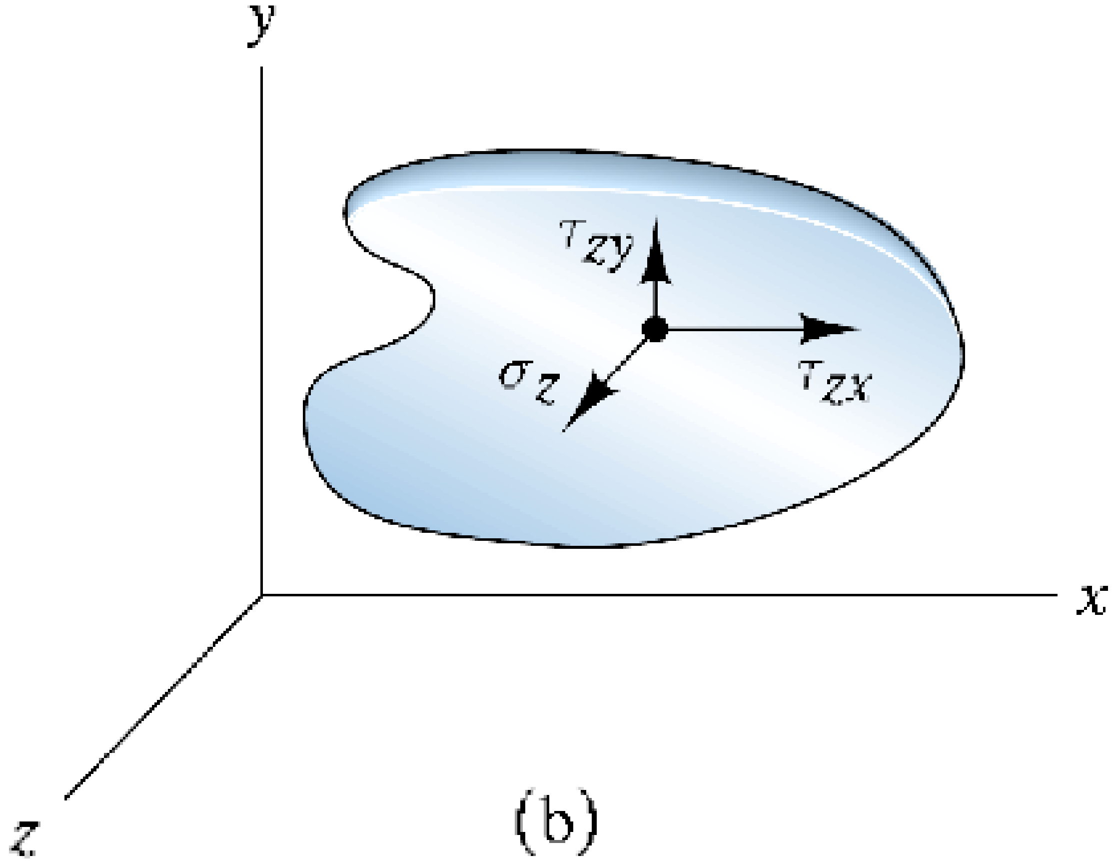
Notazione ingegneristica con diversa disposizione degli indici

$T_{21} = \tau_{xy}$

ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE

Notazioni equivalenti per il tensore delle tensioni

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Il Teorema di Cauchy citato in precedenza non introduce semplicemente il tensore delle tensioni ma stabilisce le condizioni di completa equivalenza tra

- le condizioni di equilibrio dell'intero corpo (condizioni di equilibrio GLOBALI)
- e quelle di una qualunque sua parte infinitesima (condizioni di equilibrio PUNTUALI)

ANALISI della TENSIONE

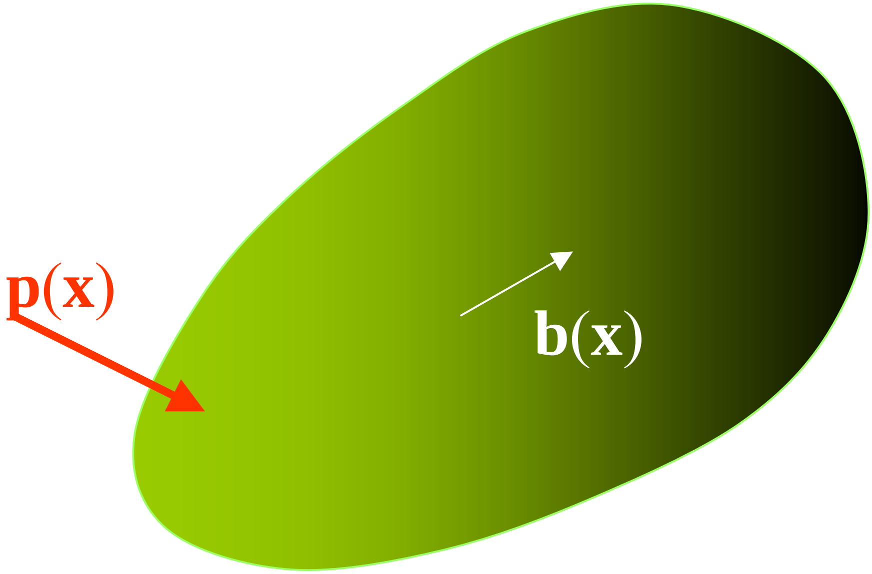
$$\mathit{Equil.}\ \mathit{glob.} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x})\,dV + \int_{\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{x})\,dS = \mathbf{o} \\ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x})\,dV + \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{p}(\mathbf{x})\,dS = \mathbf{o} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

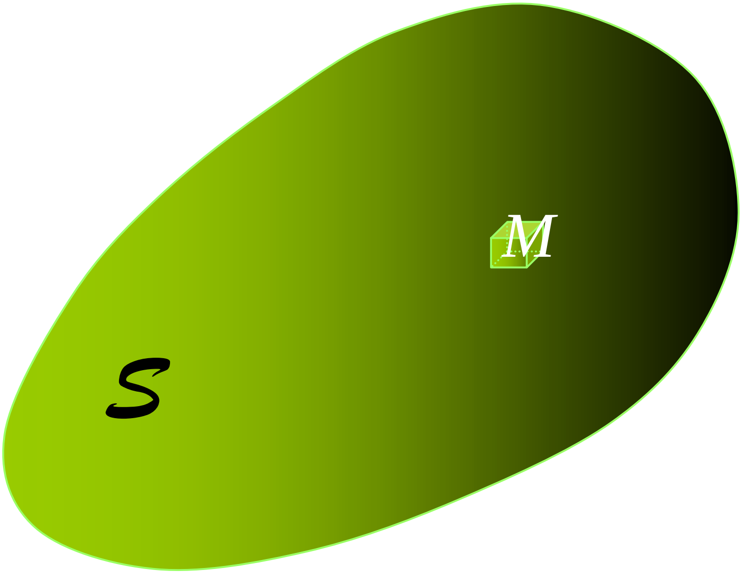
$$\mathit{Equil.}\ \mathit{locale} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n} & \text{in tutti i punti } \mathbf{x} \text{ interni di } \Omega \\ \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \text{in tutti i punti } \mathbf{x} \text{ sulla frontiera di } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{o} & \text{equazioni indefinite di equilibrio} \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^{t} & \text{simmetria del tensore delle tensioni} \end{cases}$$

ANALISI della TENSIONE

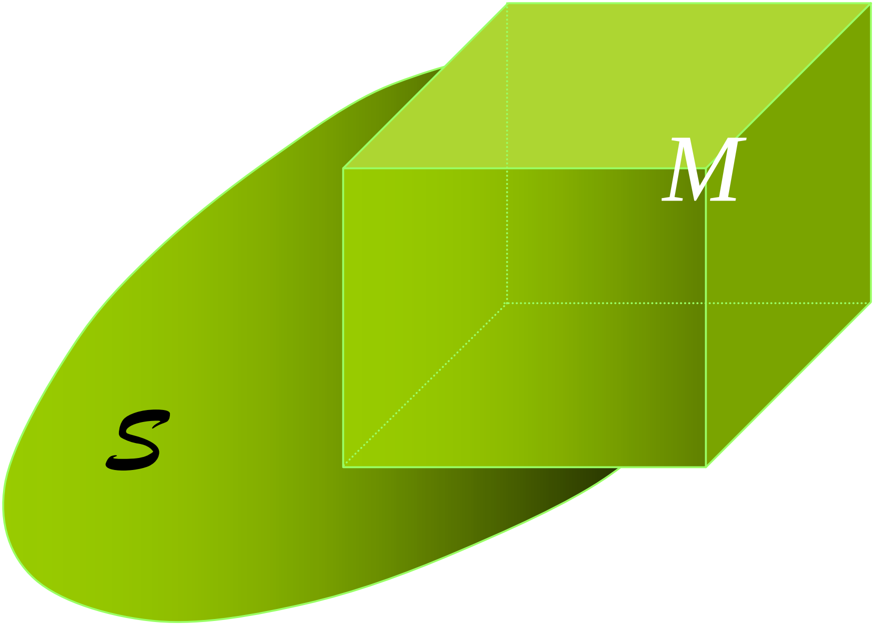
Ricapitolando



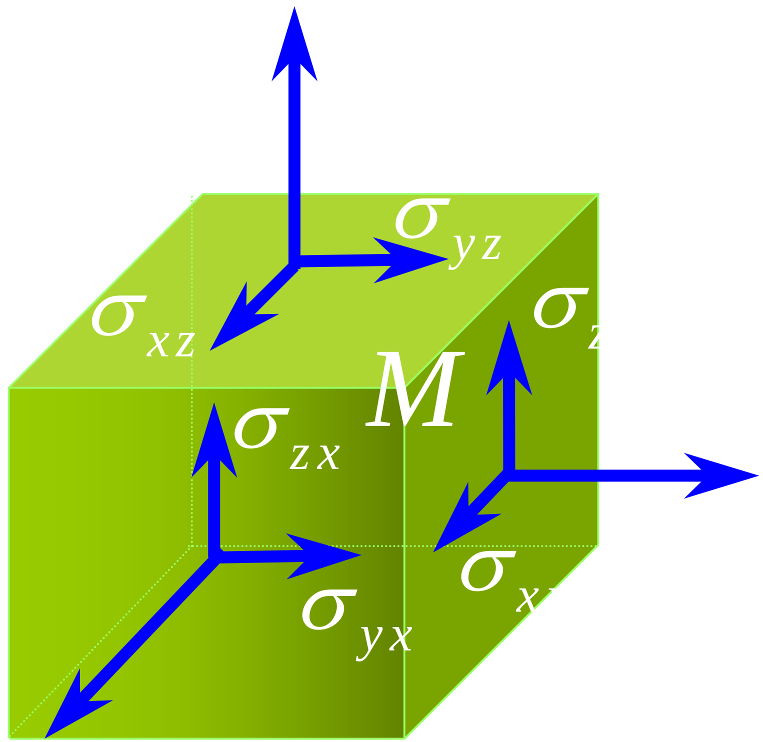
ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE

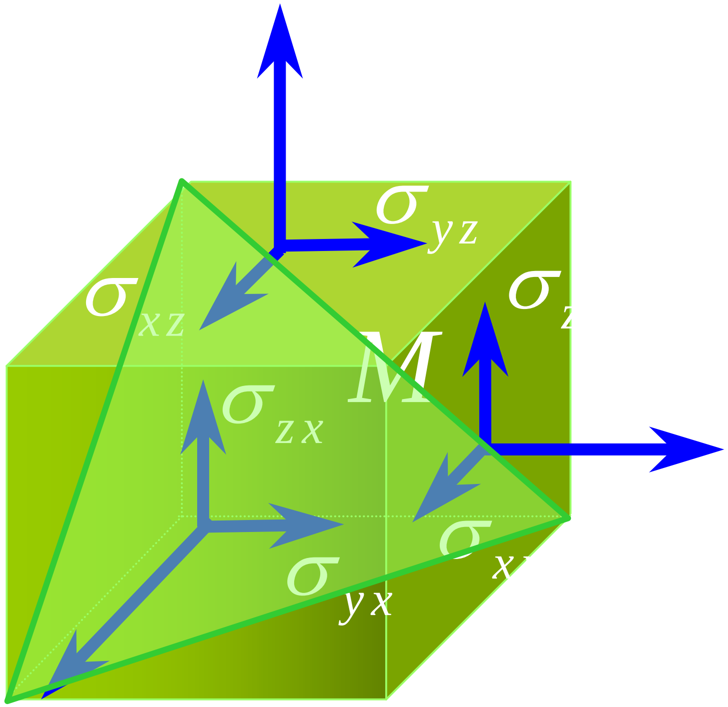


ANALISI della TENSIONE

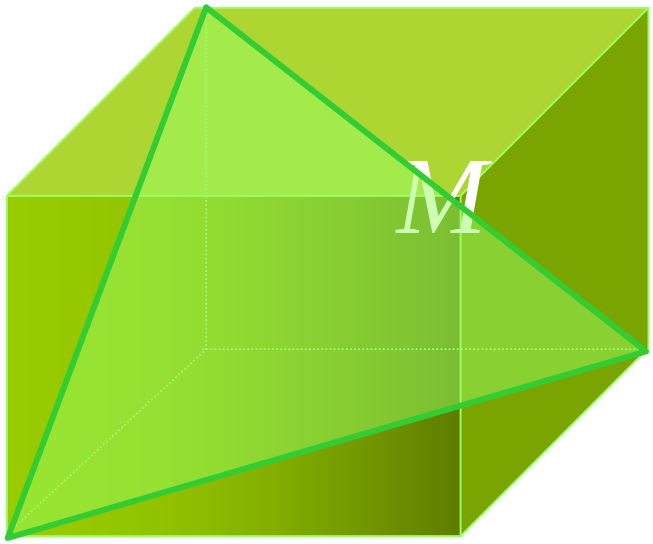


prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

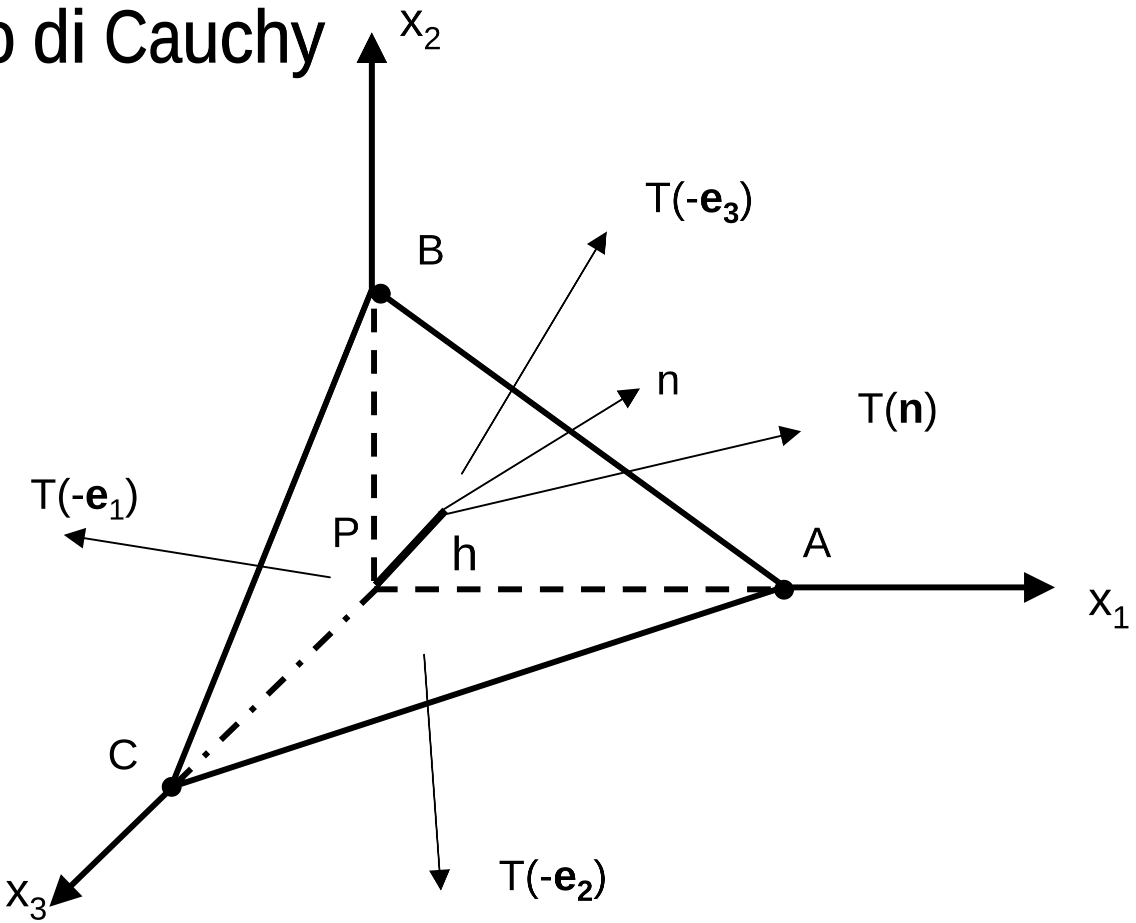


ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE

Teatredro di Cauchy



prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

Viene utilizzato per dimostrare l'esistenza dello stato tensionale e le condizioni di equilibrio sulla frontiera. Dall'equilibrio del teatredro si dimostra infatti:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \left[\sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i \right] \mathbf{n} = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

Il prodotto tensoriale $\otimes$ tra vettori è definito da:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$$

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Quindi, essendo:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_1)=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{yx}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

risulta:

$$[\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_1)\otimes\mathbf{e}_1]=\begin{bmatrix}\sigma_x & 0 & 0\\ \tau_{yx} & 0 & 0\\ \tau_{zx} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Analogamente:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_2)=\begin{bmatrix}\tau_{xy}\\ \sigma_y\\ \tau_{zy}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

e:

$$[\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_2)\otimes\mathbf{e}_2]=\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Infine:

$$
\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

ANALISI della TENSIONE

e:

$$[\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{e}_3)\otimes\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Sicchè, essendo:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Equazioni indefinite di equilibrio: $div\, \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{o} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \mathbf{b}_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \mathbf{b}_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mathbf{b}_z = 0 \end{cases}$$

ANALISI della TENSIONE

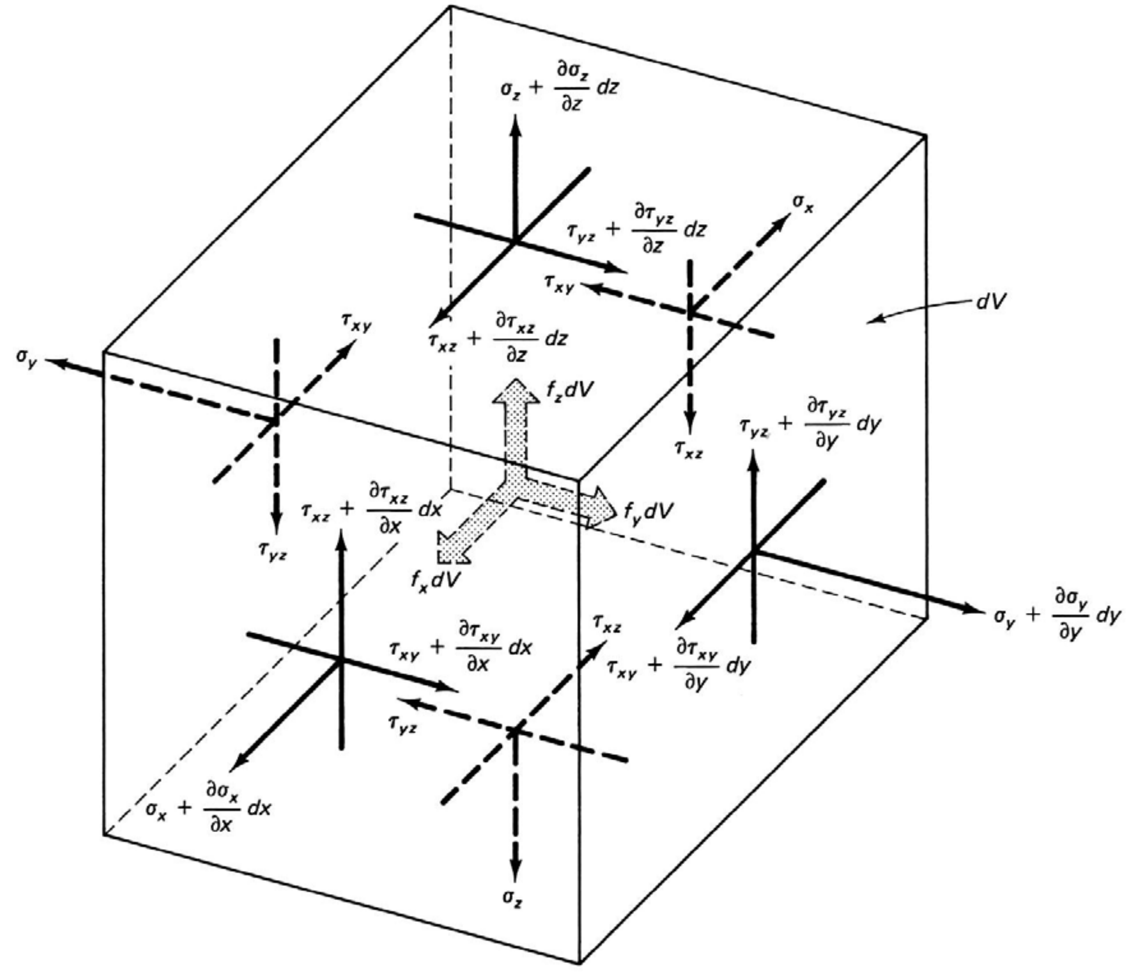


Figure 1.2 Equilibrium of elemental volume.

ANALISI della TENSIONE

Simmetria del tensore delle tensioni: $T = T^{t}$

Uguaglianza delle tensioni tangenziali su piani ortogonali

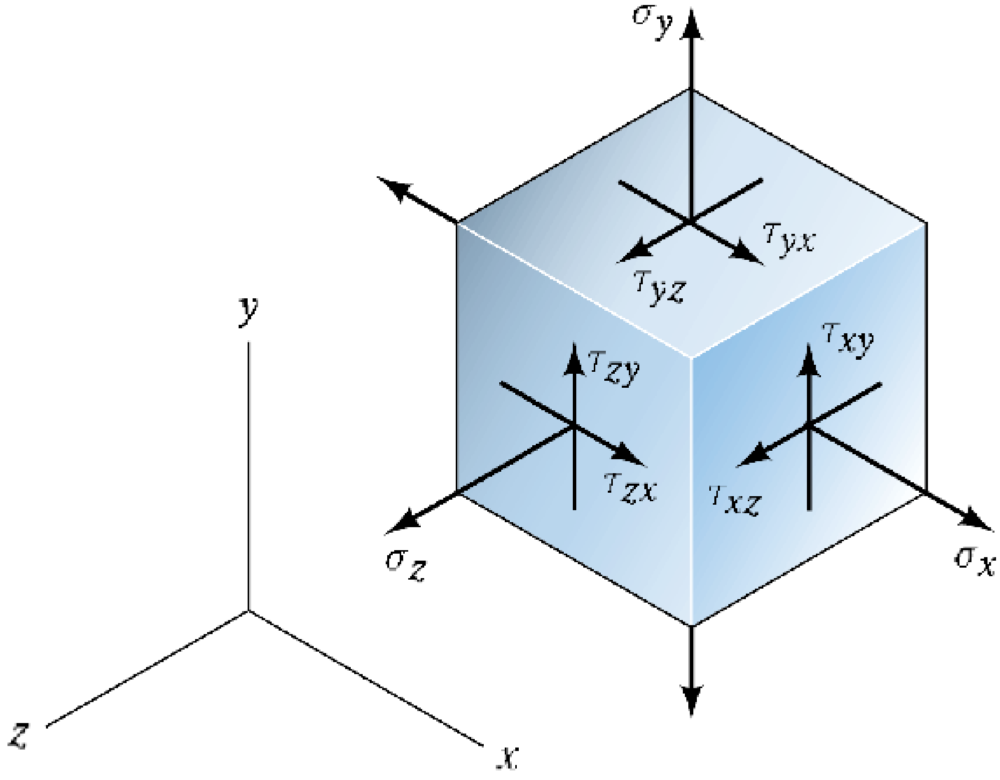
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

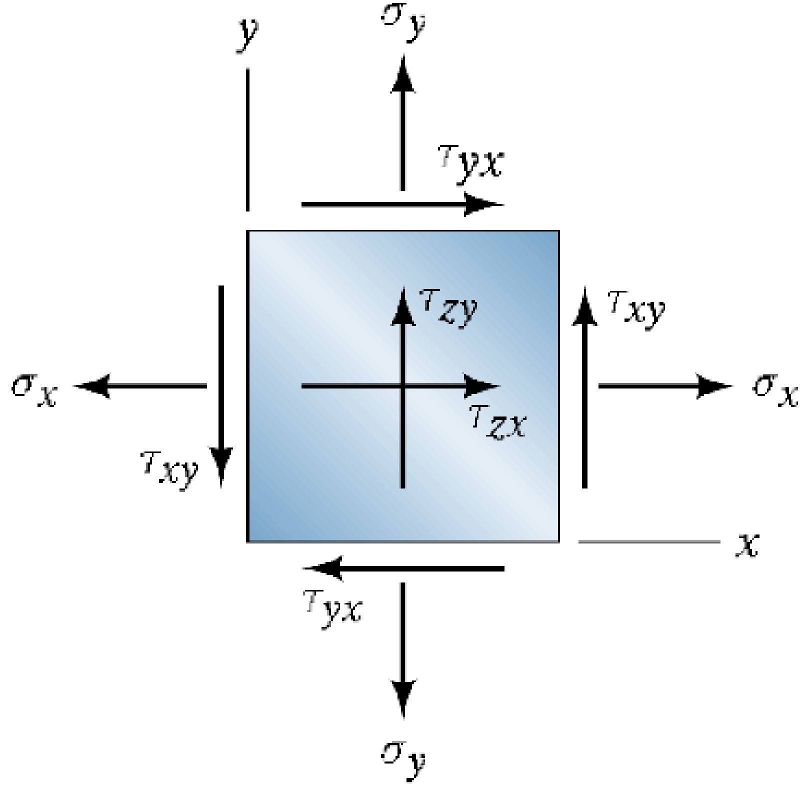
ANALISI della TENSIONE



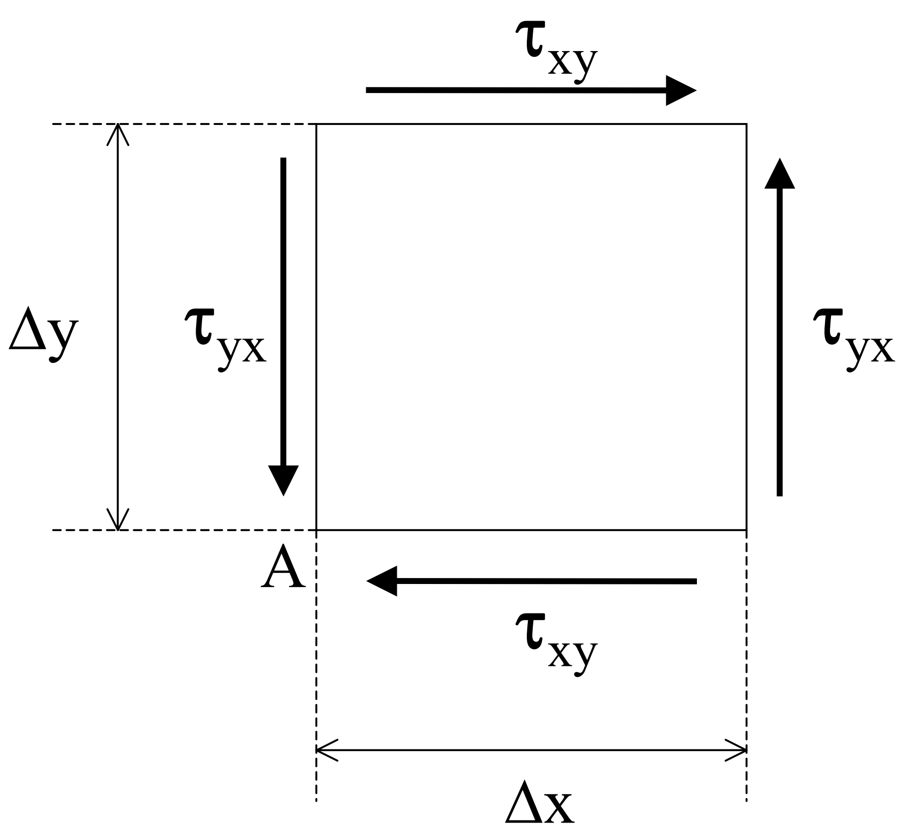
Significato meccanico: consideriamo l'intorno infinitesimo (cubetto) in corrispondenza di un generico punto; siano Δx, Δy, Δz, le dimensioni degli spigoli paralleli agli assi coordinati

ANALISI della TENSIONE

Osserviamo lungo l'asse z



ANALISI della TENSIONE



e consideriamo lo stato tensionale in cui siano presenti le sole componenti τ_{xy} e τ_{yx}. Scriviamo l'equilibrio del cubetto intorno ad A

ANALISI della TENSIONE

ATTENZIONE: Le condizioni di equilibrio si scrivono solo in termini di forze e NON di tensioni (le cui dimensioni sono forze per unità di superficie).

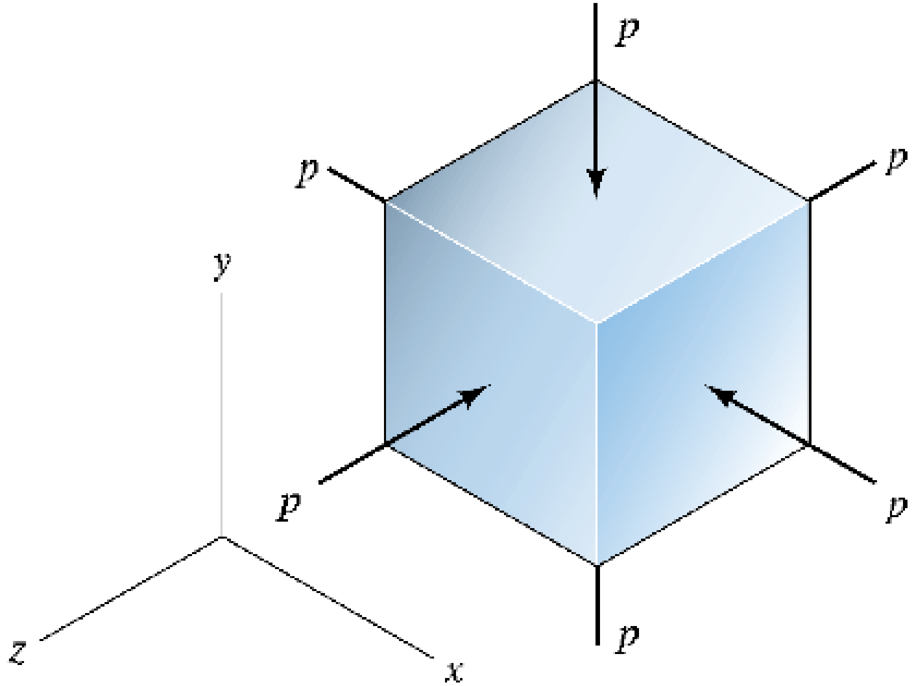
$$\Big(\underbrace{\tau_{yx}\Delta y\Delta z}_{\substack{\text{forza relativa}\\ \text{alla faccia di}\\ \text{normale x}}}\Big)\underbrace{\Delta x}_{\text{braccio}} = \Big(\underbrace{\tau_{xy}\Delta x\Delta z}_{\substack{\text{forza relativa}\\ \text{alla faccia di}\\ \text{normale y}}}\Big)\underbrace{\Delta y}_{\text{braccio}}$$

da cui si ricava

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

ANALISI della TENSIONE

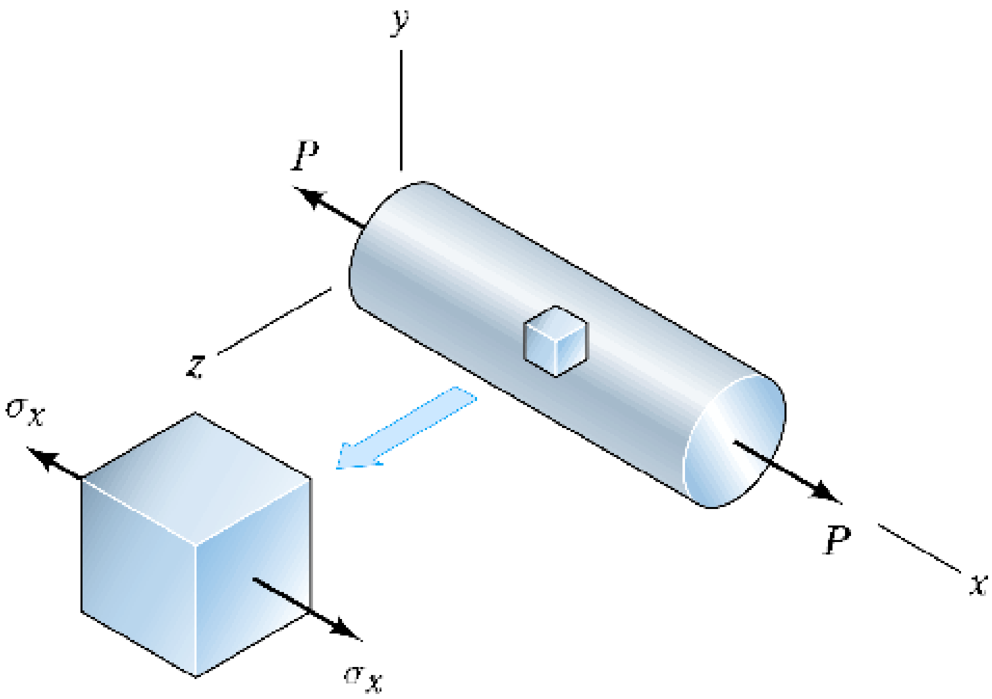
Un esempio: fluido in condizioni di riposo



$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

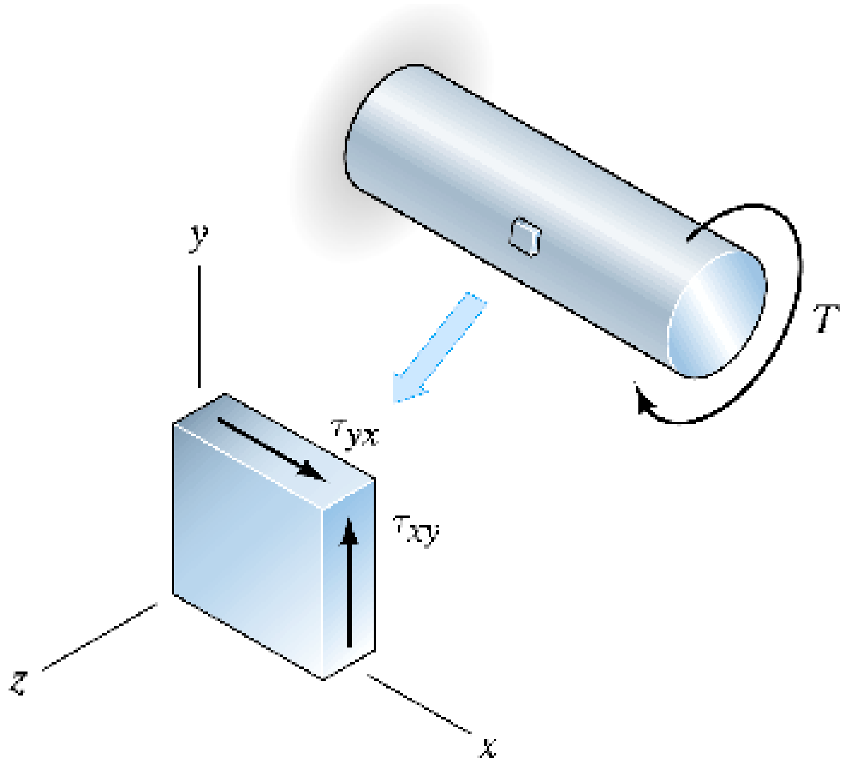
Stato tensionale monoassiale



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

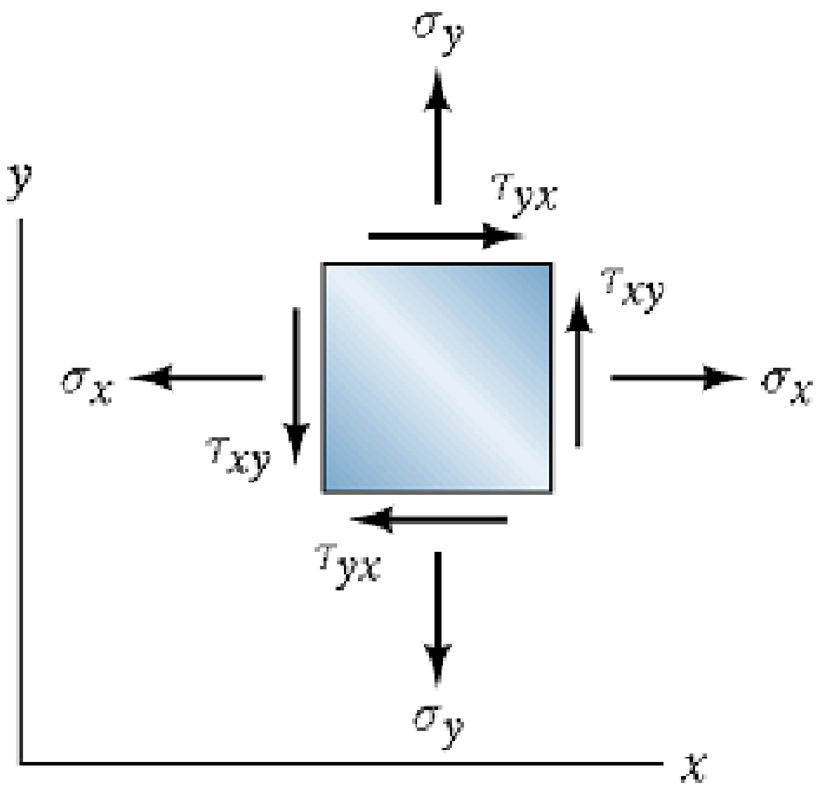
Stato puramente tangenziale: torsione



$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANALISI della TENSIONE

Stato tensionale piano: travi - solidi bidimensionali



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$