

ANALISI della TENSIONE

Ogni tensore può essere decomposto (in modo univoco) in una parte sferica ed una deviatorica

$$\mathbf{T} = \text{sph } \mathbf{T} + \text{dev } \mathbf{T}$$

$$\text{sph } \mathbf{T} = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} = p \mathbf{I}$$

$$\text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} - \text{sph } \mathbf{T}$$



ANALISI della TENSIONE

Dunque

$$[\text{sph } \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$[\text{dev } \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} - p & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} - p & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} - p \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Una interessante proprietà di tale decomposizione è la ortogonalità tra la parte sferica e quella deviatorica.

Si definisce prodotto scalare tra i tensori \mathbf{A} e \mathbf{B}

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr} (\mathbf{A}^t \mathbf{B}) = \text{tr} (\mathbf{A} \mathbf{B}^t)$$

In particolare detto \mathbf{I} il tensore identico

$$\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$$



ANALISI della TENSIONE

Si dimostra altresì che

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} \mathbf{B}_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{11} \mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{13} \mathbf{B}_{13} + \\ + \mathbf{A}_{21} \mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_{22} \mathbf{B}_{22} + \mathbf{A}_{23} \mathbf{B}_{23} + \\ + \mathbf{A}_{31} \mathbf{B}_{31} + \mathbf{A}_{32} \mathbf{B}_{32} + \mathbf{A}_{33} \mathbf{B}_{33} \end{array} \right.$$

**Evidentemente il prodotto scalare è INVARIANTE e
cioè indipendente dal particolare sistema di riferimento
in cui si valutano le matrici associate ad A e B**



ANALISI della TENSIONE

Dunque

$$\text{sph } \mathbf{T} \cdot \text{dev } \mathbf{T} = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} \cdot \left[\mathbf{T} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} \right]$$

e quindi, essendo $\mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = \text{tr } \mathbf{I} = 3$,

$$\text{sph } \mathbf{T} \cdot \text{dev } \mathbf{T} = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T})^2 - \frac{1}{9} (\text{tr } \mathbf{T})^2 \cdot 3 = 0$$

e cioè sph T e dev T sono ortogonali tra loro avendo prodotto scalare nullo.



ANALISI della TENSIONE

Inoltre è facile verificare che la traccia del deviatore delle tensioni è nulla

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\operatorname{dev} \mathbf{T}) &= \operatorname{tr} \mathbf{T} - \operatorname{tr}(\operatorname{sph} \mathbf{T}) = \\ &= \operatorname{tr} \mathbf{T} - \operatorname{tr} \left[\frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I} \right] = \\ &= \operatorname{tr} \mathbf{T} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{T}) \operatorname{tr} \mathbf{I} = 0\end{aligned}$$



ANALISI della TENSIONE

Nel caso piano

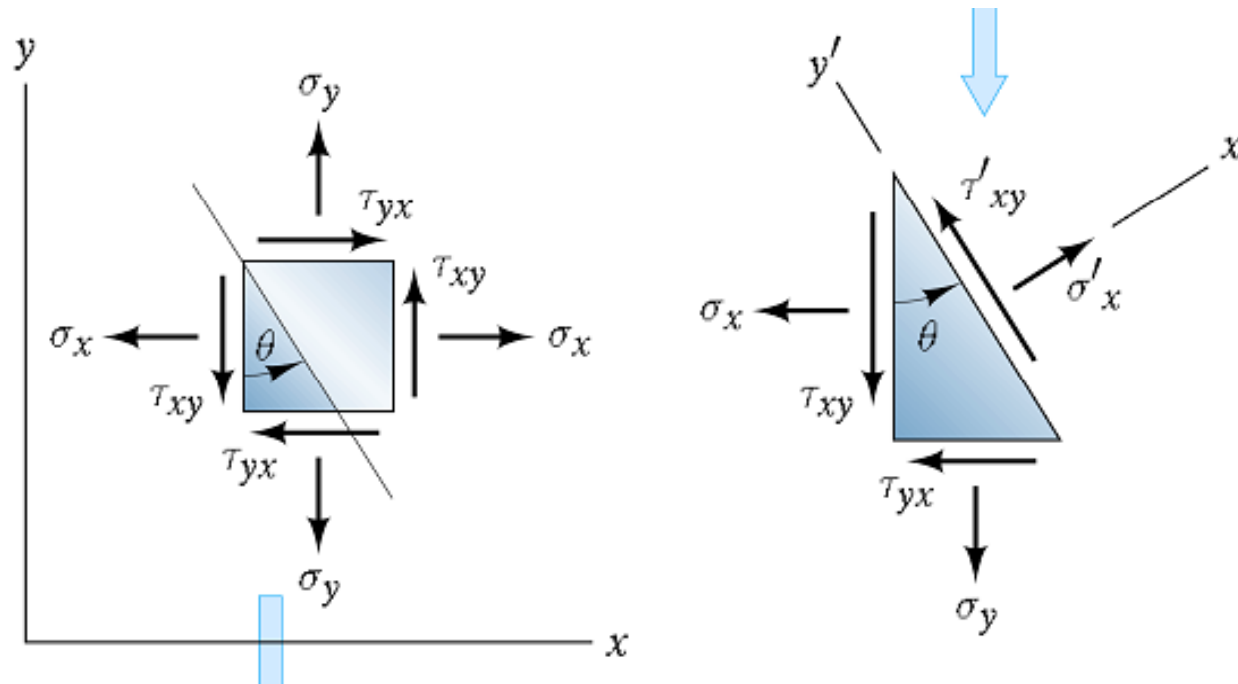
$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow [\text{sph } \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\text{dev } \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Si è visto che, al variare di θ ,



ANALISI della TENSIONE

le componenti (σ_n, τ_{nm}) del vettore tensione t_n nel nuovo sistema di riferimento $(x'=n, y'=m)$ descrivono un **CERCHIO (detto di Mohr)**

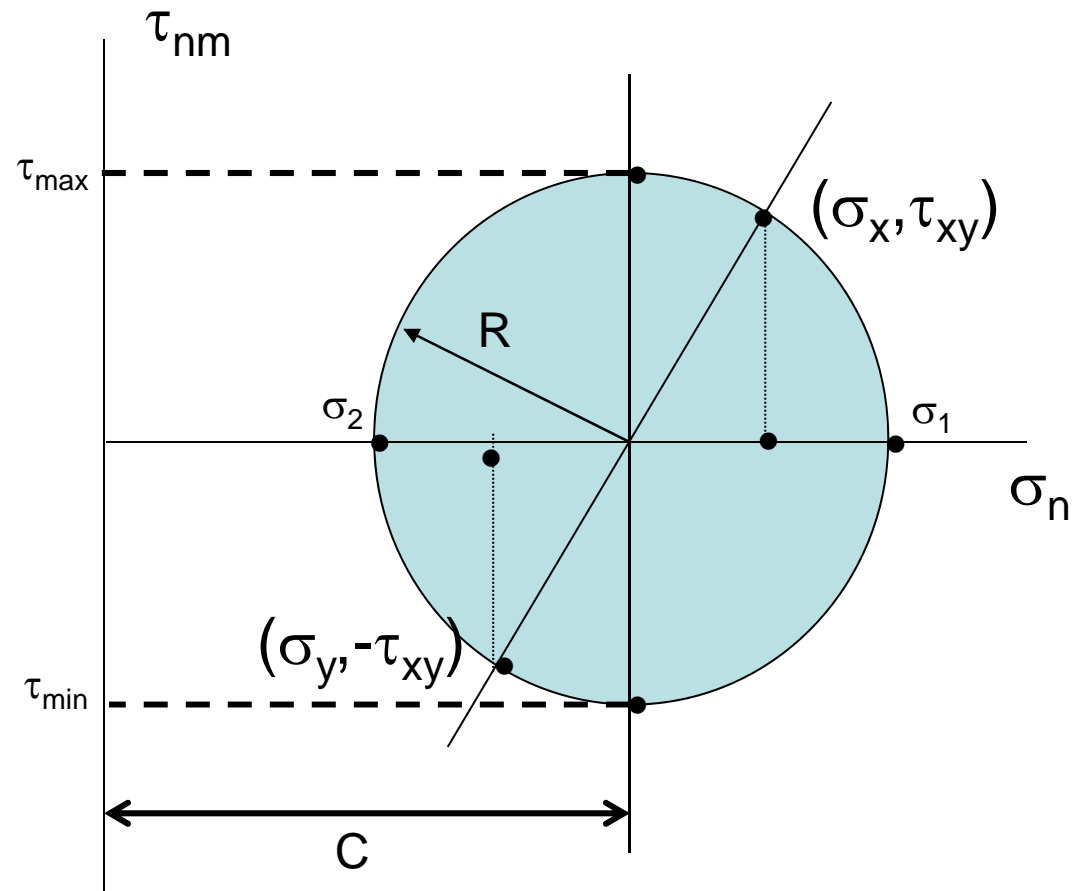
di centro
$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

e raggio
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



ANALISI della TENSIONE

Cerchio di Mohr (delle tensioni)



ANALISI della TENSIONE

Vogliamo illustrare, alla luce della decomposizione del tensore delle tensioni nella parte sferica e in quella deviatorica, le modalità di costruzione del cerchio di Mohr e le sue proprietà, UTILISSIME per le applicazioni.

A tal fine
ricordiamo che

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \overbrace{\sigma_x}^{t_x} & \overbrace{\tau_{xy}}^{t_y} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Dunque, sfruttando la decomposizione sferica - deviatorica e ponendo

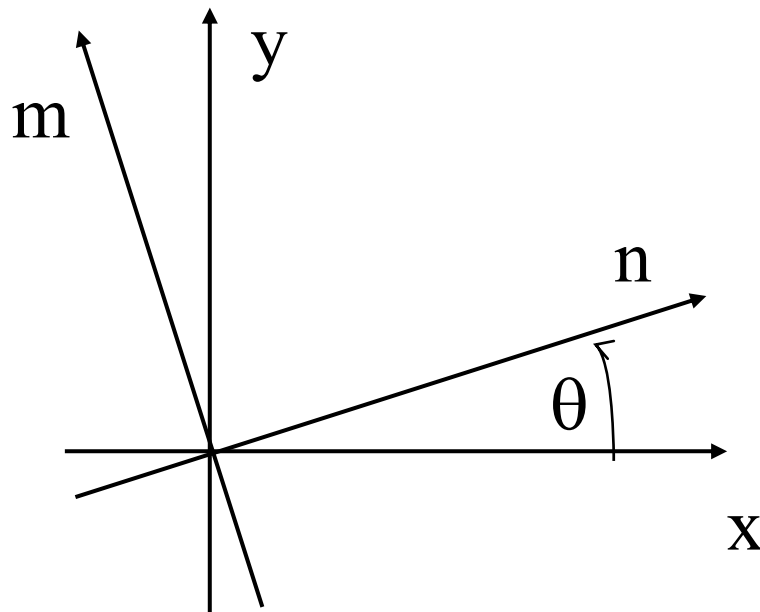
$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad d = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \overbrace{c}^{s_x} & \overbrace{0}^{s_y} \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{d}^{d_x} & \overbrace{\tau_{xy}}^{d_y} \\ \tau_{xy} & -d \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Il vettore tensione relativo alla giacitura di normale n definita da



$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

vale, nel sistema iniziale (x-y):

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}_n]_{xy} = [\mathbf{Tn}]_{xy} &= \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -d \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c \cos \theta \\ c \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta - d \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$



ANALISI della TENSIONE

D'altra parte la matrice associata a T nel sistema di riferimento n - m vale

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_n}^{\mathbf{t}_n} & \overbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_m}^{\mathbf{t}_m} \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_n & \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_m \end{bmatrix}$$

I prodotti scalari, in quanto grandezze invarianti, possono essere valutati mediante le componenti dei vettori coinvolti in un sistema arbitrario.



ANALISI della TENSIONE

Scegliendo il sistema iniziale (x-y) per valutare le componenti dei vettori \mathbf{n} , \mathbf{m} e T_n :

$$[\mathbf{n}]_{xy} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad [\mathbf{m}]_{xy} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{t}_n]_{xy} = \begin{bmatrix} c \cos \theta \\ c \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta - d \sin \theta \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

risulta

$$[\mathbf{t}_n]_{nm} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Tn} \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{Tn} \end{bmatrix} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Tn} = c + d(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{Tn} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2 d \sin \theta \cos \theta$$



ANALISI della TENSIONE

Si può anche scrivere, sfruttando le identità trigonometriche

$$[\mathbf{t}_n(\theta)]_{nm} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} + [\mathbf{R}^t(2\theta)] \begin{bmatrix} d \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

con

$$[\mathbf{R}^t(2\theta)] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Si noti che i vettori numerici

$$\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} d \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

che concorrono a determinare le componenti di t_n nel sistema (n-m) coincidono con quelli definiti in precedenza:

$$[\mathbf{s}_x]_{xy} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{d}_x]_{xy} = \begin{bmatrix} d \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Dunque, scriveremo

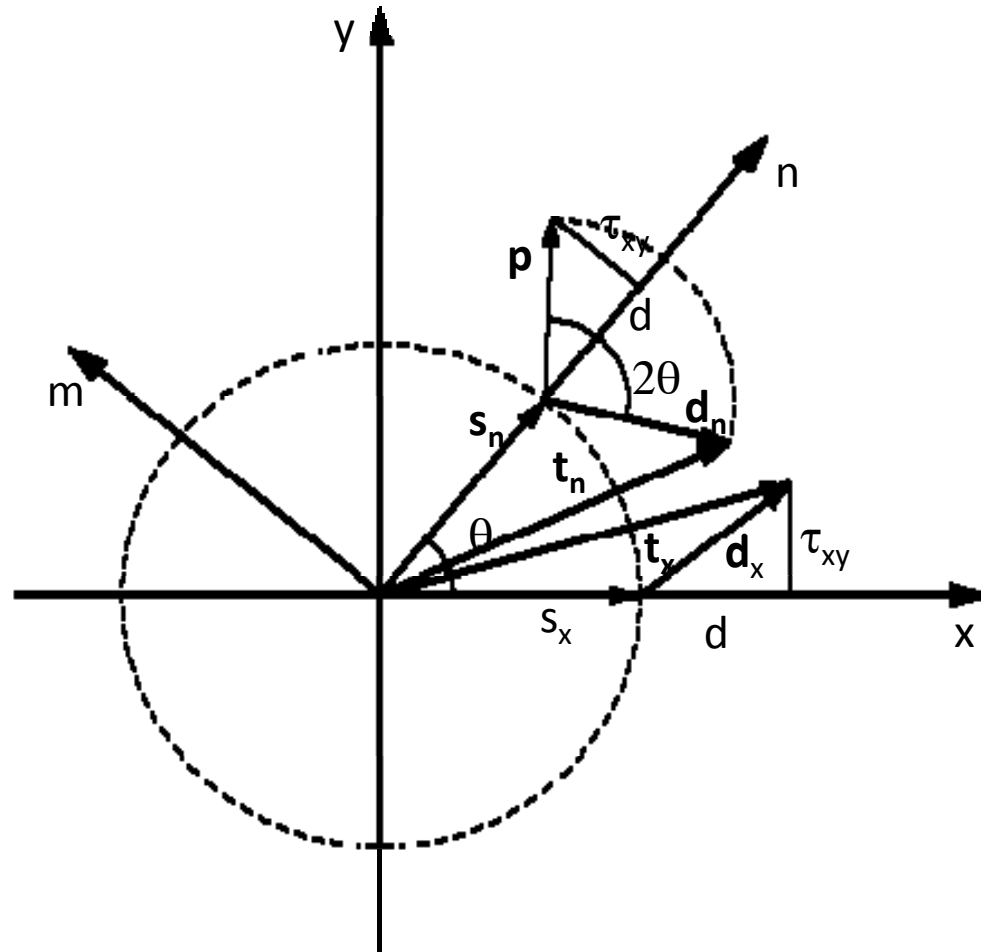
$$[\mathbf{t}_n(\theta)]_{nm} = [\mathbf{s}_x]_{xy} + [\mathbf{R}^t(2\theta)]_{xy} [\mathbf{d}_x]_{xy} = [\mathbf{s}_n]_{nm} + [\mathbf{d}_n]_{nm}$$

Poiché i vettori numerici (coincidenti tra loro) rappresentano le componenti di vettori valutati in sistemi di riferimento diversi, ne consegue che i vettori saranno tra loro diversi.



ANALISI della TENSIONE

e cioè $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n + \mathbf{d}_n = \mathbf{s}_n + \mathbf{R}^t(2\theta)\mathbf{p}$



essendo s_n e d_n i vettori indicati in figura e p il vettore che nel sistema n - m ha le stesse componenti di d_x nel sistema x - y



ANALISI della TENSIONE

Essendo \mathbf{R} un tensore ortogonale ($\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$) risulta:

$$\mathbf{R}^t(2\theta) = \mathbf{R}^{-1}(2\theta) = \mathbf{R}(-2\theta)$$

in quanto l'inverso di una rotazione di 2θ è una rotazione in verso opposto ossia di -2θ ;

avendo assunto positiva una rotazione antioraria, $\mathbf{R}(-2\theta)$ rappresenterà una rotazione di -2θ in verso orario se θ è positivo.



ANALISI della TENSIONE

In definitiva, il vettore tensione relativo alla giacitura di normale n , ha componenti

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}_n(\theta)]_{nm} &= [\mathbf{s}_n]_{nm} + [\mathbf{d}_n]_{nm} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} + [R(-2\theta)]_{nm} \begin{bmatrix} d \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(-2\theta) & -\text{sen}(-2\theta) \\ \text{sen}(-2\theta) & \cos(-2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

essendo invariante la matrice rappresentativa di R al variare del sistema di riferimento



ANALISI della TENSIONE

Si noti che al variare di θ , ossia dell'inclinazione della coppia di assi (n-m) rispetto a quella (x-y) del sistema di riferimento iniziale, hanno modulo costante entrambi i vettori "s" e "d" che contribuiscono a definire il vettore traction t corrispondente alla generica direzione

$$|\mathbf{s}_x| = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = |\mathbf{s}_n| \quad |\mathbf{d}_x| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = |\mathbf{d}_n|$$



ANALISI della TENSIONE

Quest'ultima proprietà scaturisce dal fatto che

$$|\mathbf{d}_n| = \sqrt{\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{d}_n} = \sqrt{\mathbf{R}^t \mathbf{p} \cdot \mathbf{R}^t \mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{R} \mathbf{R}^t \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = |\mathbf{d}_x|$$

e dalla proprietà di ortogonalità del tensore \mathbf{R}



ANALISI della TENSIONE

Ne consegue che un osservatore solidale con l'asse n (dunque ignaro del movimento di n nello spazio fisico) vedrà al ruotare dell'asse n :

- il vettore " s_n " di modulo costante e diretto secondo n essendo nulla la seconda componente di s_n nel sistema n - m ;
- il vettore " p " ruotare di (-2θ) , per fornire d_n , mantenendo costante il suo modulo.



ANALISI della TENSIONE

Poiché il vettore s_n ha direzione fissa nel sistema (n-m) e modulo costante mentre il vettore d_n , pur variando la sua posizione relativa rispetto a n, mantiene costante il suo modulo, è naturale immaginare di costruire il luogo dei punti che vedrebbe descrivere un osservatore posto lungo la generica normale n e rotante con essa.



ANALISI della TENSIONE

Tale luogo si ottiene immaginando di sovrapporre tutte le possibili normali in modo tale che esse coincidano con un unico asse.

Il luogo dei punti che si ottiene in tal modo è una circonferenza, detta impropriamente “cerchio di Mohr”.



ANALISI della TENSIONE

Evidentemente, la rotazione ideale che porta la generica normale del piano ed il vettore t_n ad essa solidale a coincidere con un unico asse NON modifica le componenti di t_n nel sistema (n-m);

pertanto tale asse verrà indicato con la sigla σ_n e può essere, in virtù del suo significato, comunque inclinato nel piano.



ANALISI della TENSIONE

Solo per comodità di rappresentazione è consuetudine rappresentare l'asse σ_n in orizzontale.

L'asse ad esso ortogonale sarà denotato con il simbolo τ_{nm} per ricordare il fatto che, nella rappresentazione di Mohr, le ordinate misurano la componente tangenziale del vettore t_n .



ANALISI della TENSIONE

In definitiva il “cerchio” di Mohr non è altro che il luogo dei punti descritto, al variare della giacitura n , dal vettore t_n di componenti (σ_n, τ_{nm}) in un sistema cartesiano solidale con la coppia $(n-m)$.

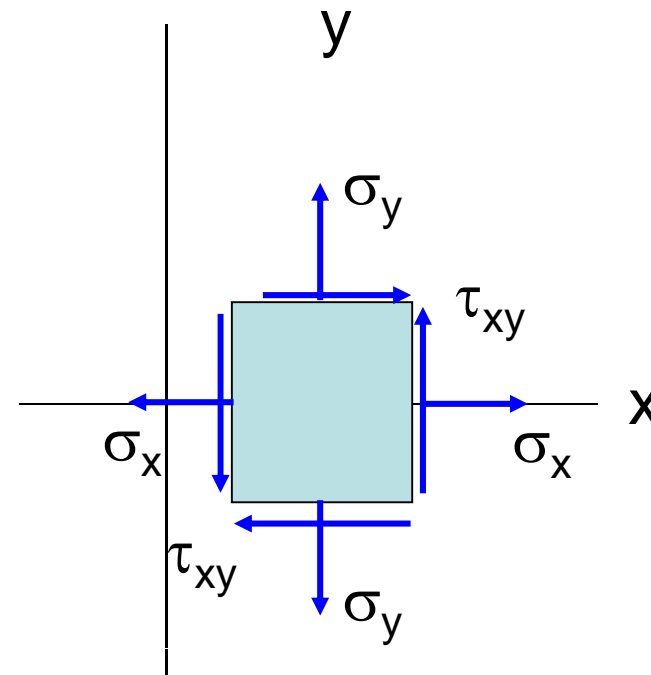
Evidentemente, la rappresentazione del vettore t_n nel riferimento di Mohr, denotata per ovvi motivi con t_n^M , sarà diversa da quella relativa al vettore iniziale pur avendo t_n^M nel riferimento di Mohr le stesse componenti di t_n nel sistema $(n-m)$.



ANALISI della TENSIONE

Illustriamo le modalità di costruzione del cerchio di Mohr ed il suo utilizzo con un esempio.

Si consideri un generico stato tensionale in cui si assumono, per semplicità, tutte le componenti positive.



ANALISI della TENSIONE

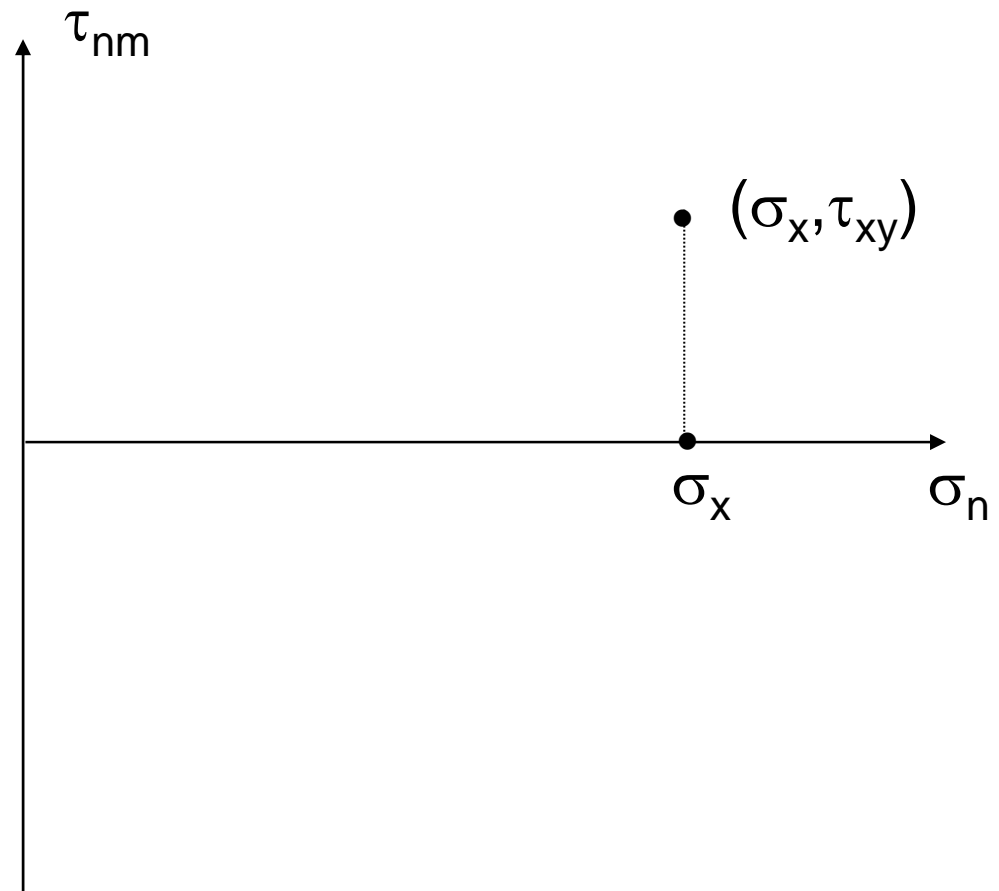
Atteso il significato del cerchio di Mohr la sua costruzione si esegue a partire dai vettori tensioni relativi alle giaciture note (e cioè x e y).

In particolare l'osservatore disposto lungo x vede la σ_x diretta nel suo stesso verso e la τ_{xy} diretta alla sua sinistra.

Nel riferimento (σ_n, τ_{nm}) riporterà coerentemente tali valori numerici.

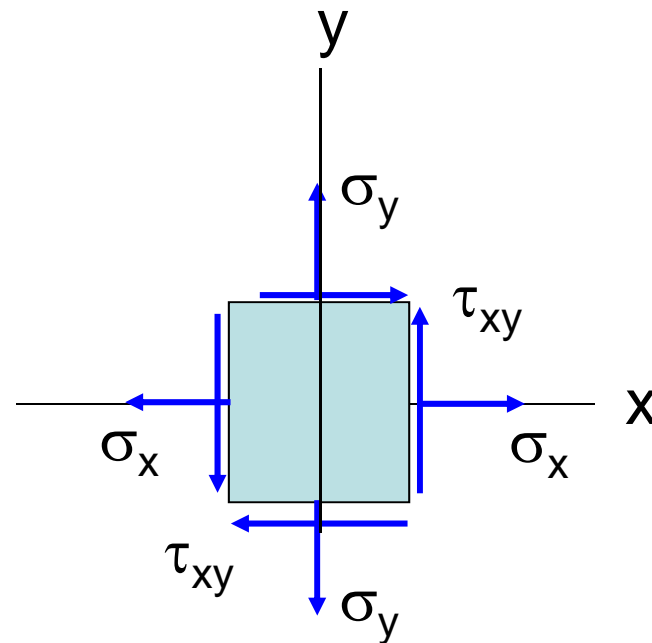


ANALISI della TENSIONE



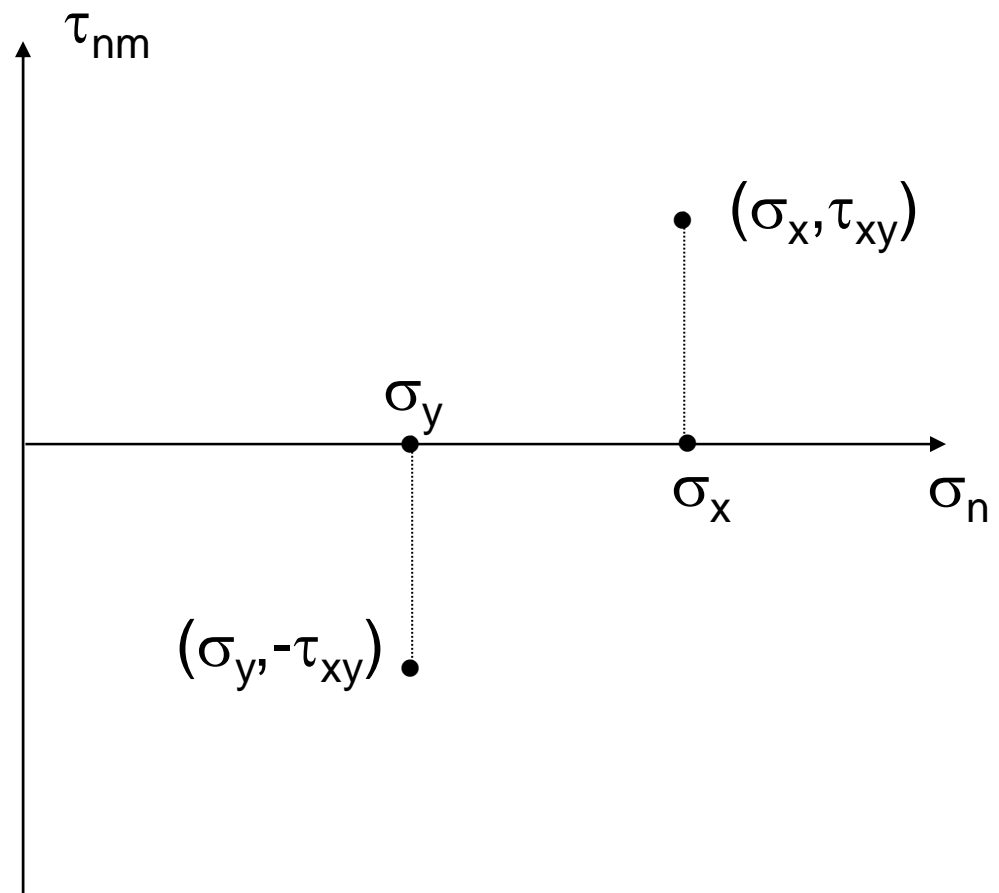
ANALISI della TENSIONE

Viceversa, quando l'osservatore si dispone lungo y vede ancora la σ_y diretta nel suo stesso verso ma la τ_{xy} diretta alla sua destra.



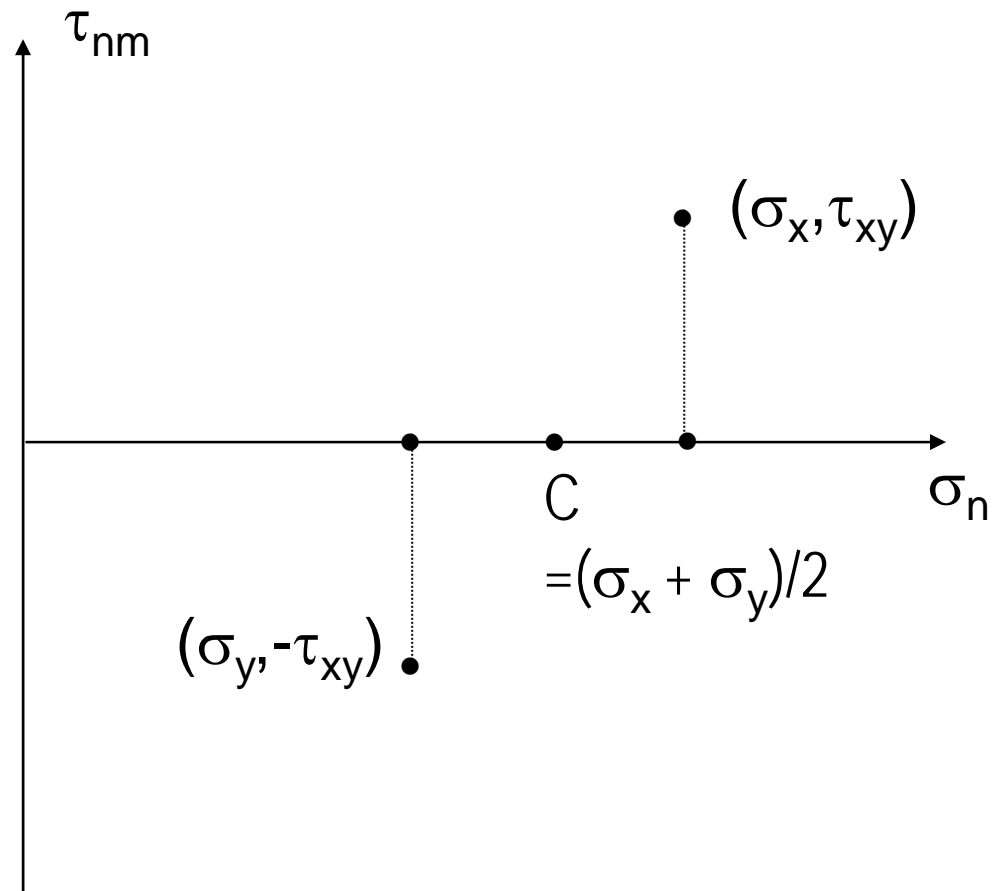
ANALISI della TENSIONE

Quindi



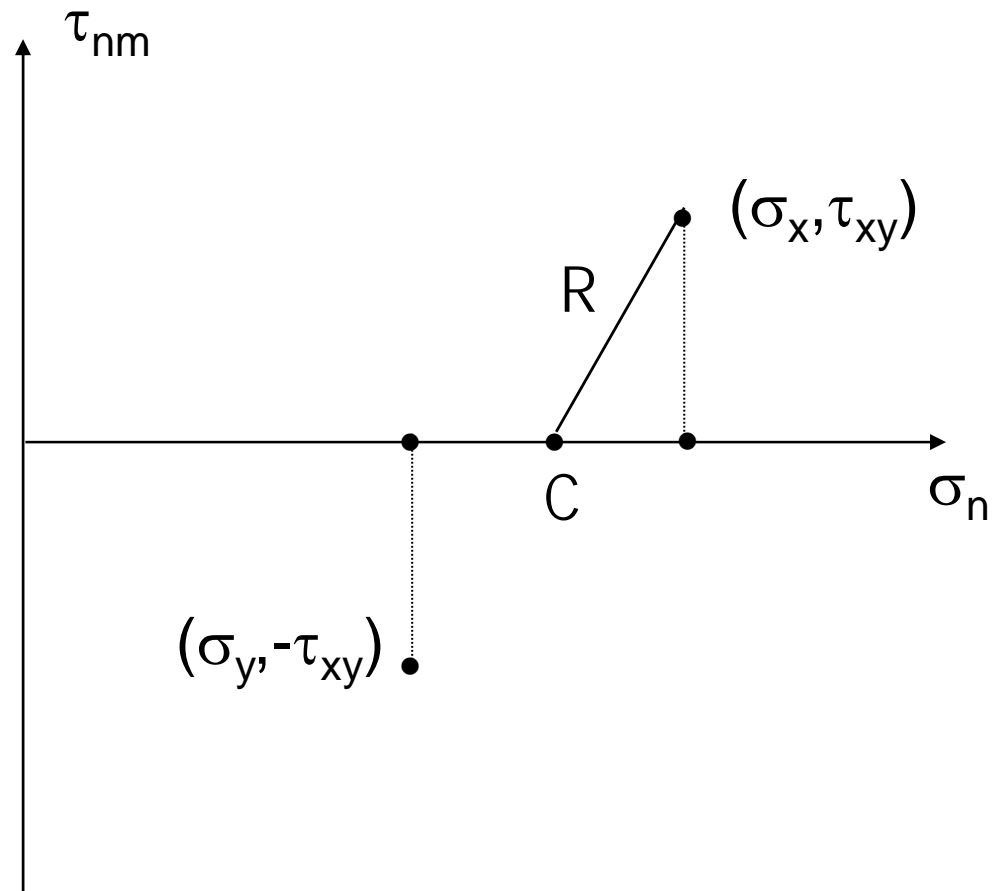
ANALISI della TENSIONE

E' noto
quindi
il centro del
cerchio



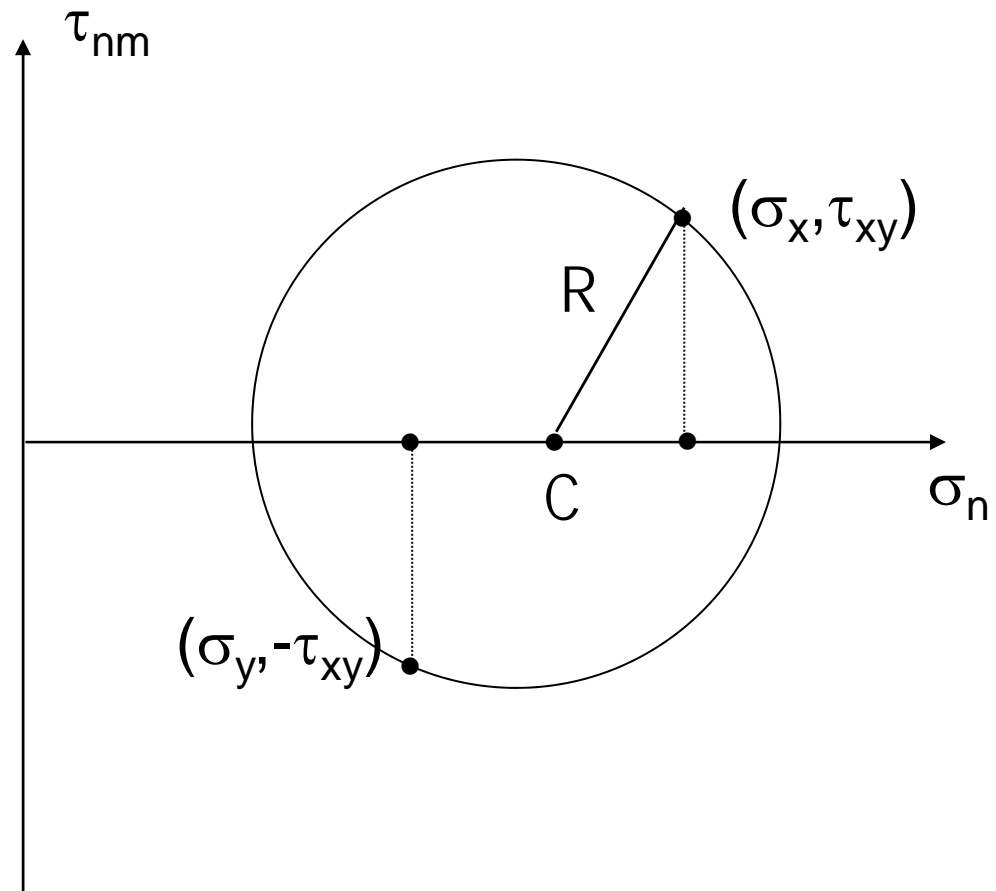
ANALISI della TENSIONE

ed il suo
raggio



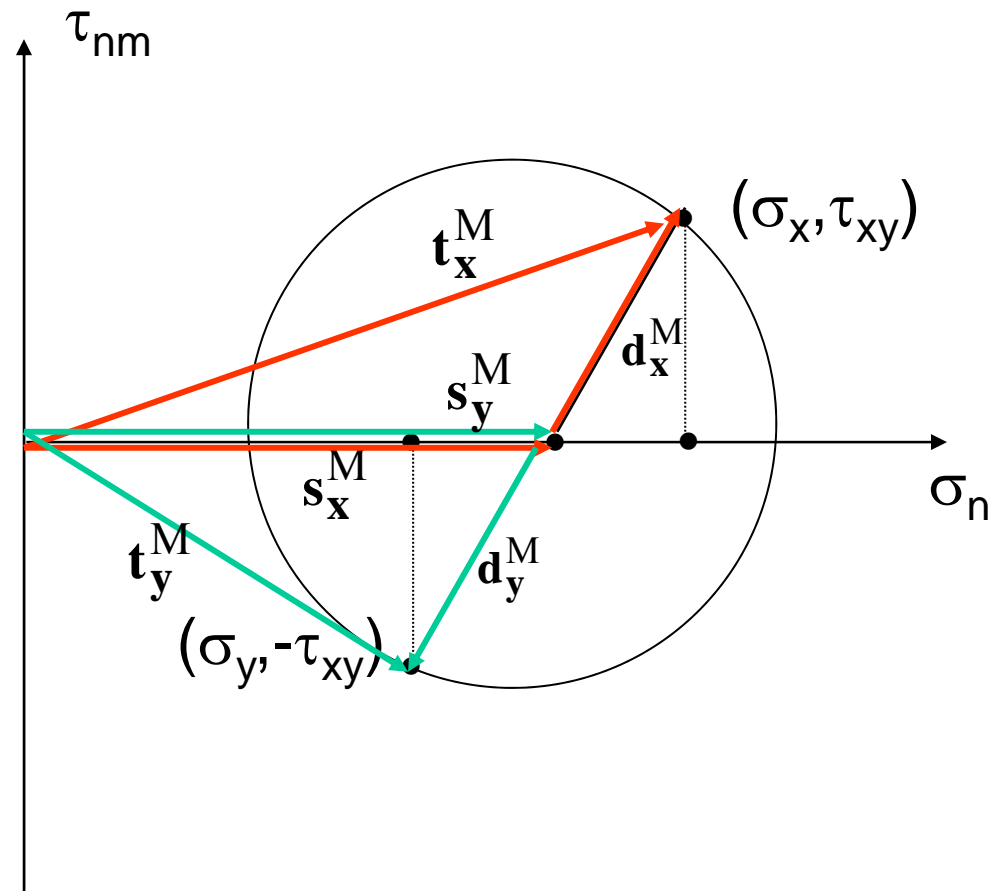
ANALISI della TENSIONE

E' ora
possibile
tracciare
il cerchio



ANALISI della TENSIONE

ed è possibile
rappresentare
i vettori
introdotti in
precedenza



ANALISI della TENSIONE

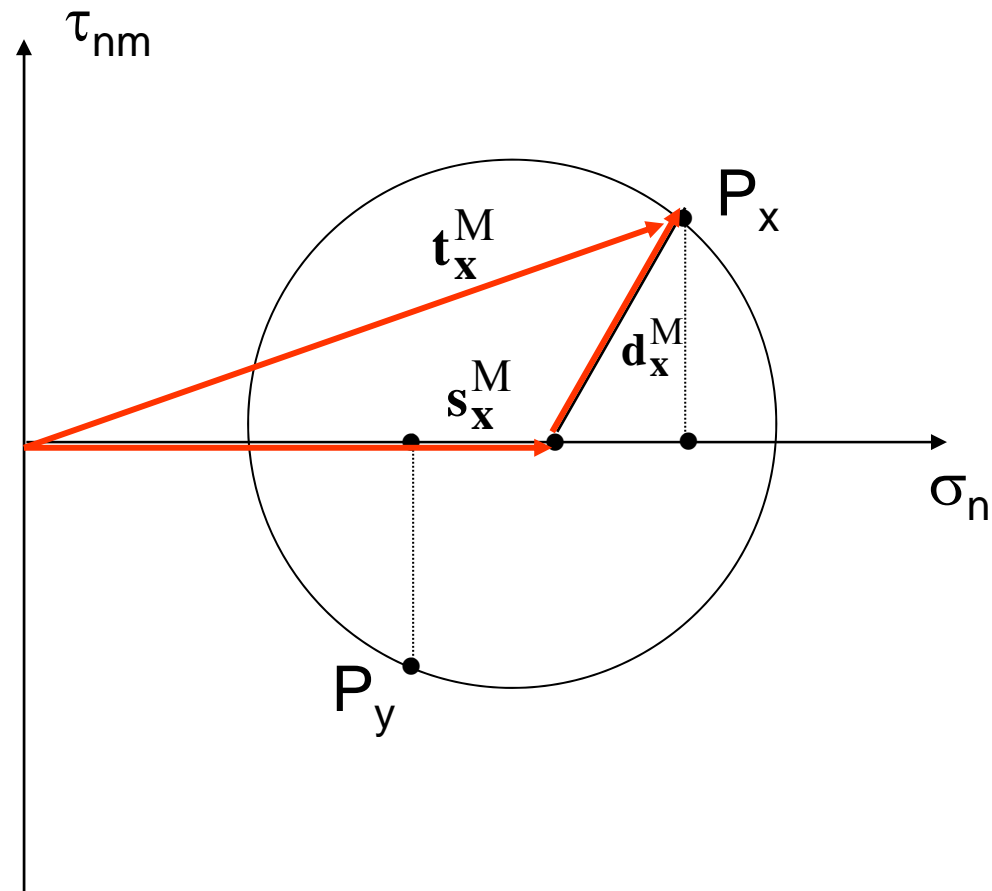
Si noti che la costruzione eseguita non viene modificata scegliendo assi comunque inclinati.

In altri termini la consuetudine di disegnare il cerchio di Mohr con assi orizzontale e verticale è dettata unicamente dalla necessità di semplificarne la rappresentazione grafica.



ANALISI della TENSIONE

Il punto P_x
(o quello P_y)
è molto utile
per le
applicazioni



ANALISI della TENSIONE

Le applicazioni del cerchio di Mohr sono essenzialmente due:

- determinazione del vettore tensione relativo ad una giacitura arbitraria;
- valutazione della giacitura su cui agisce un assegnato vettore tensione.



ANALISI della TENSIONE

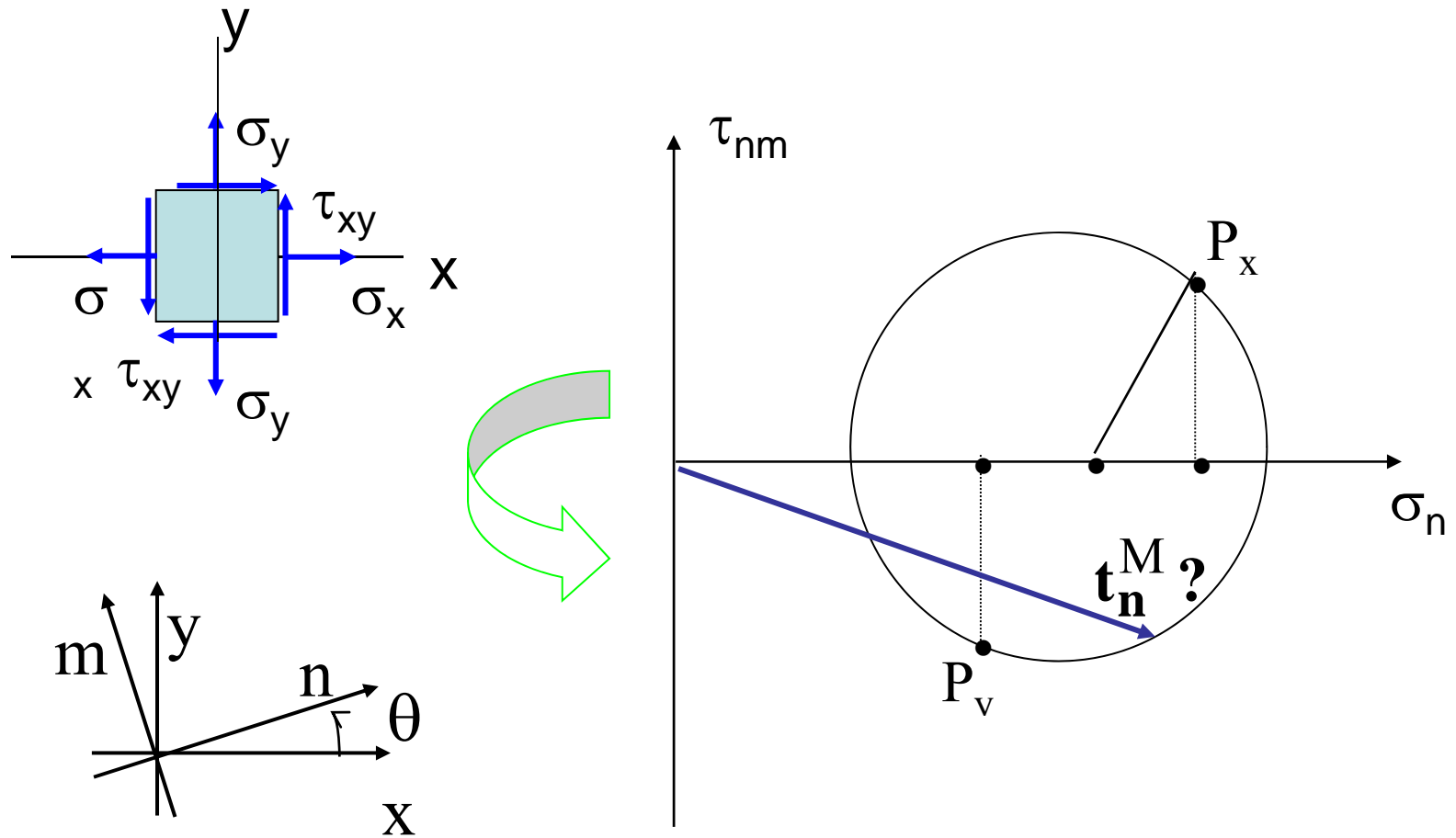
Esaminiamo il primo caso:

- determinazione del vettore tensione relativo ad una giacitura arbitraria.

In altri termini è noto il cerchio di Mohr, costruito a partire dallo stato tensionale assegnato, e si vuole valutare sul cerchio il vettore tensione relativo ad una giacitura assegnata ancorchè arbitraria, ossia il vettore t_n^M .



ANALISI della TENSIONE

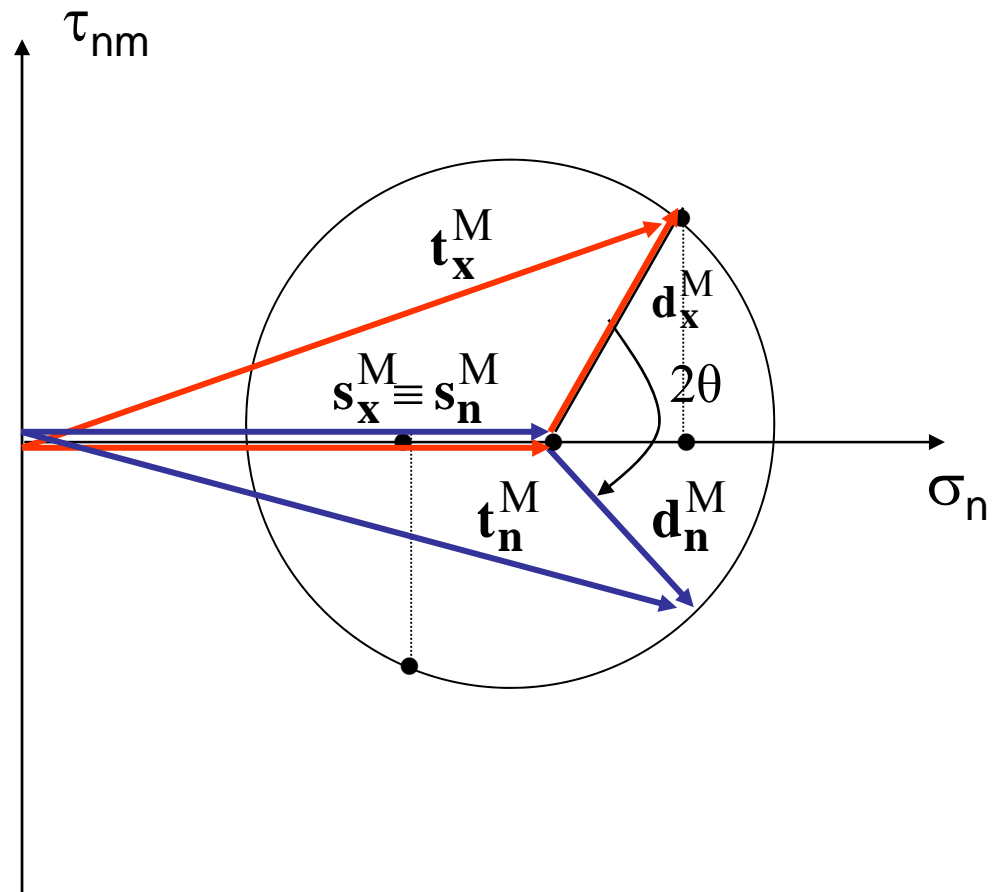
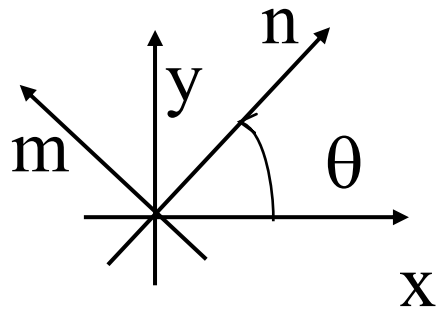


ANALISI della TENSIONE

Il problema si risolve ricordando che, la rotazione di n rispetto ad x dell'angolo θ , antiorario nella figura precedente, comporta che il vettore d_n^M (**da determinare**) sia ruotato in verso opposto (e quindi orario nell'esempio precedente) e di intensità doppia (2θ) rispetto al vettore d_x^M (**noto**).
Viceversa il vettore s_n^M coincide con s_x^M .



ANALISI della TENSIONE



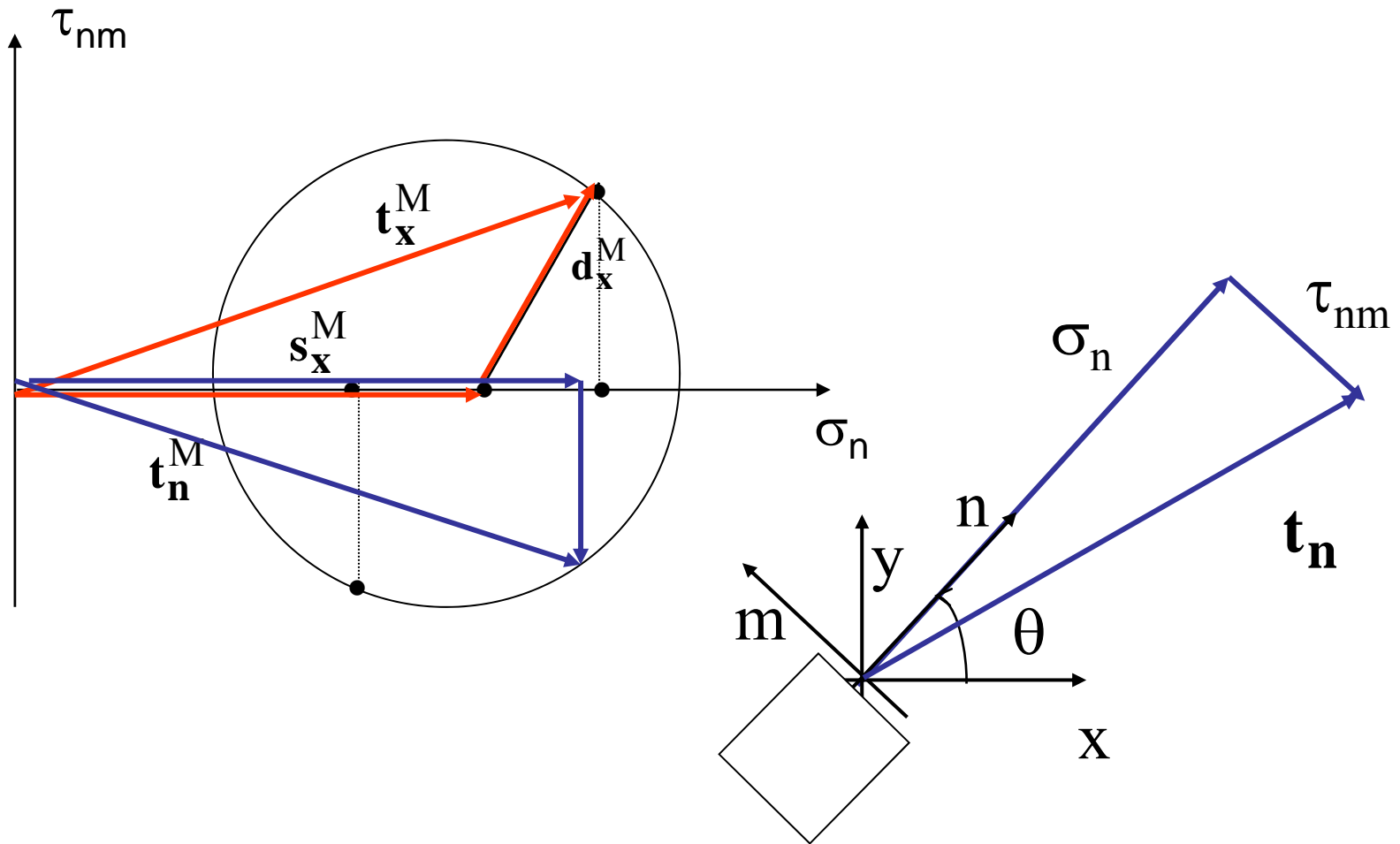
ANALISI della TENSIONE

ATTENZIONE: t_n^M è il vettore tensione nel riferimento di Mohr, ossia in quello dell'osservatore solidale con l'asse n .

Per ottenere ciò che realmente ci interessa occorre valutare il vettore tensione nel sistema di riferimento fisico (x - y). A tale scopo è sufficiente riportare nel sistema reale il vettore t_n^M con le sue componenti.



ANALISI della TENSIONE

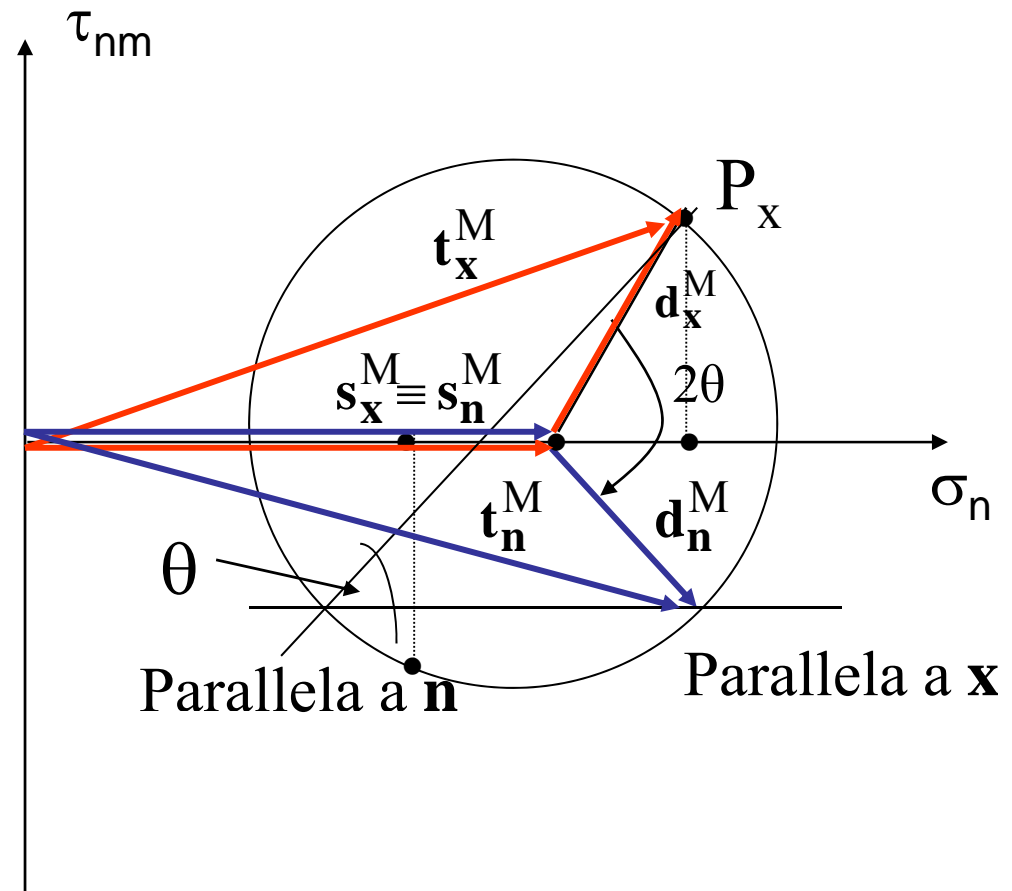
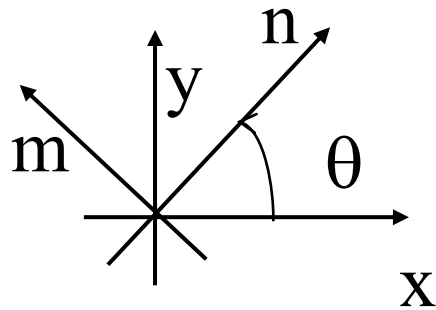


ANALISI della TENSIONE

Dal punto di vista operativo non è conveniente ruotare d_n^M di 2θ rispetto a d_x^M . E' più semplice (ed elegante) sfruttare la proprietà della circonferenza in base alla quale l'angolo alla circonferenza che insiste su di un arco è metà del corrispondente angolo al centro.



ANALISI della TENSIONE



ANALISI della TENSIONE

Ulteriore applicazione del cerchio di Mohr :
valutazione della giacitura su cui agisce un
assegnato vettore tensione.

Consideriamo, ad esempio, le intersezioni del
cerchio con l'asse orizzontale. Tali punti, avendo τ
nulla, costituiscono le tensioni principali.
Su quale giacitura agiscono?



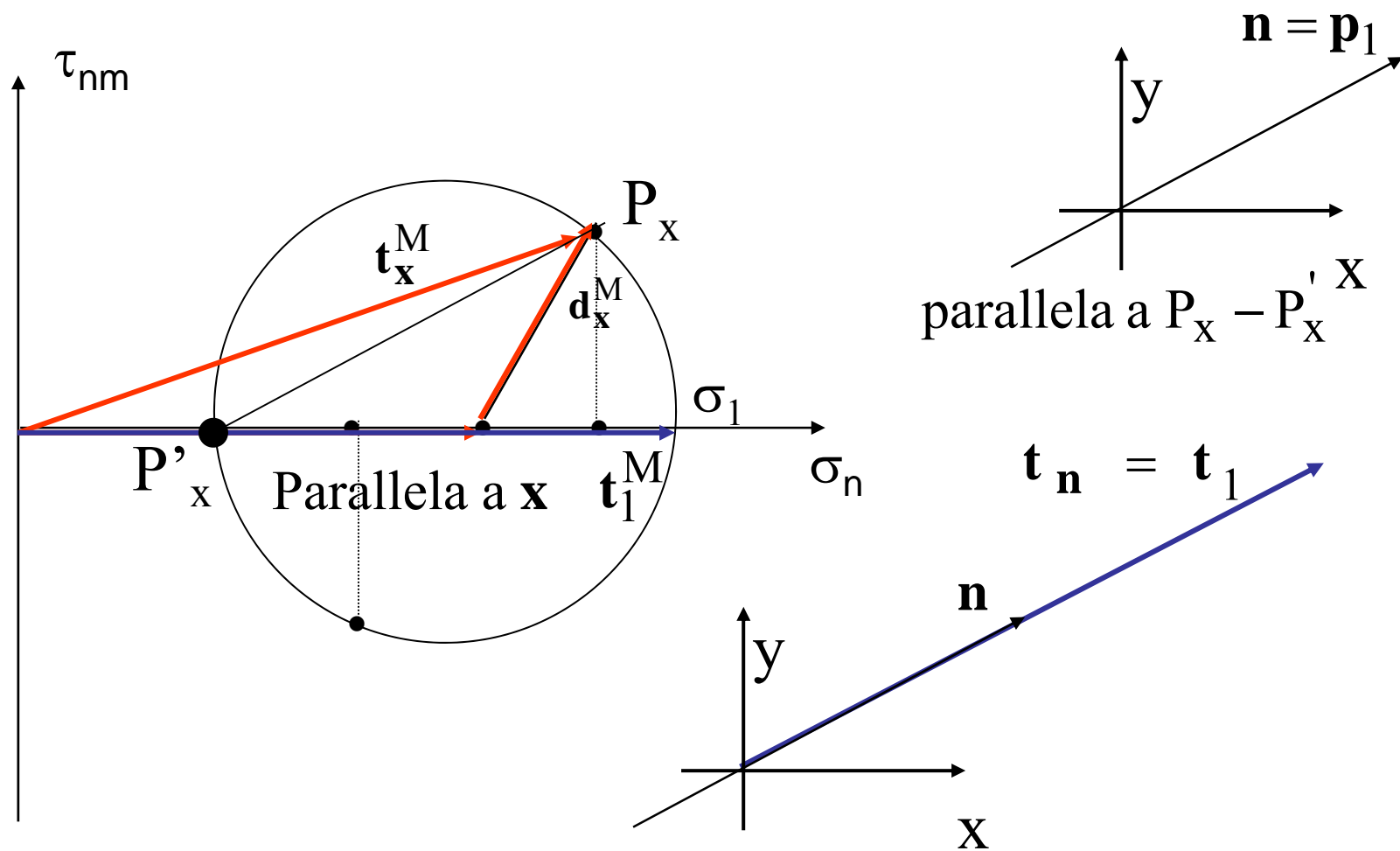
ANALISI della TENSIONE

E' quindi noto il vettore t_n^M e si vuole conoscere la normale cui tale vettore corrisponde.

Troviamo, ad esempio la giacitura su cui agisce la tensione principale di valore massimo.

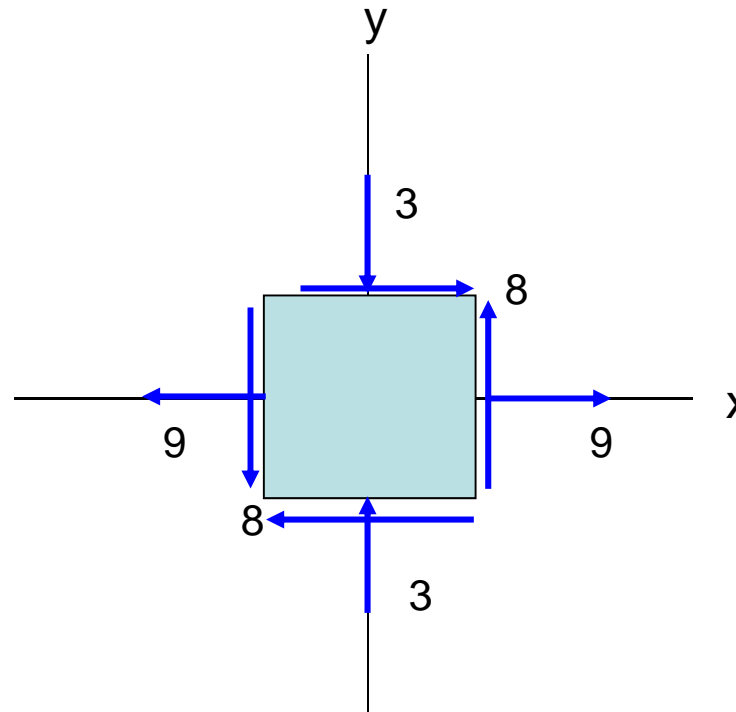


ANALISI della TENSIONE



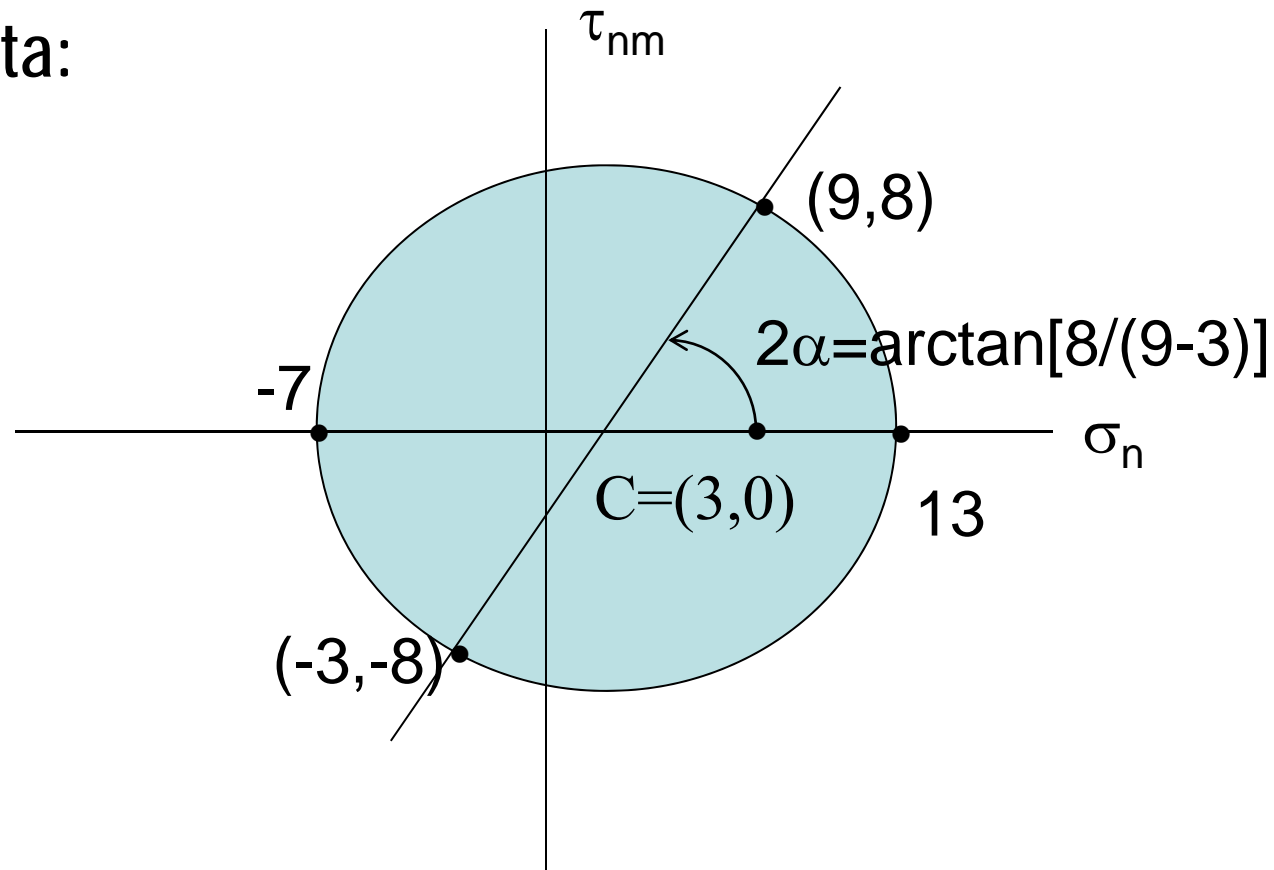
ANALISI della TENSIONE

Ripetere le costruzioni illustrate con riferimento al seguente esempio.



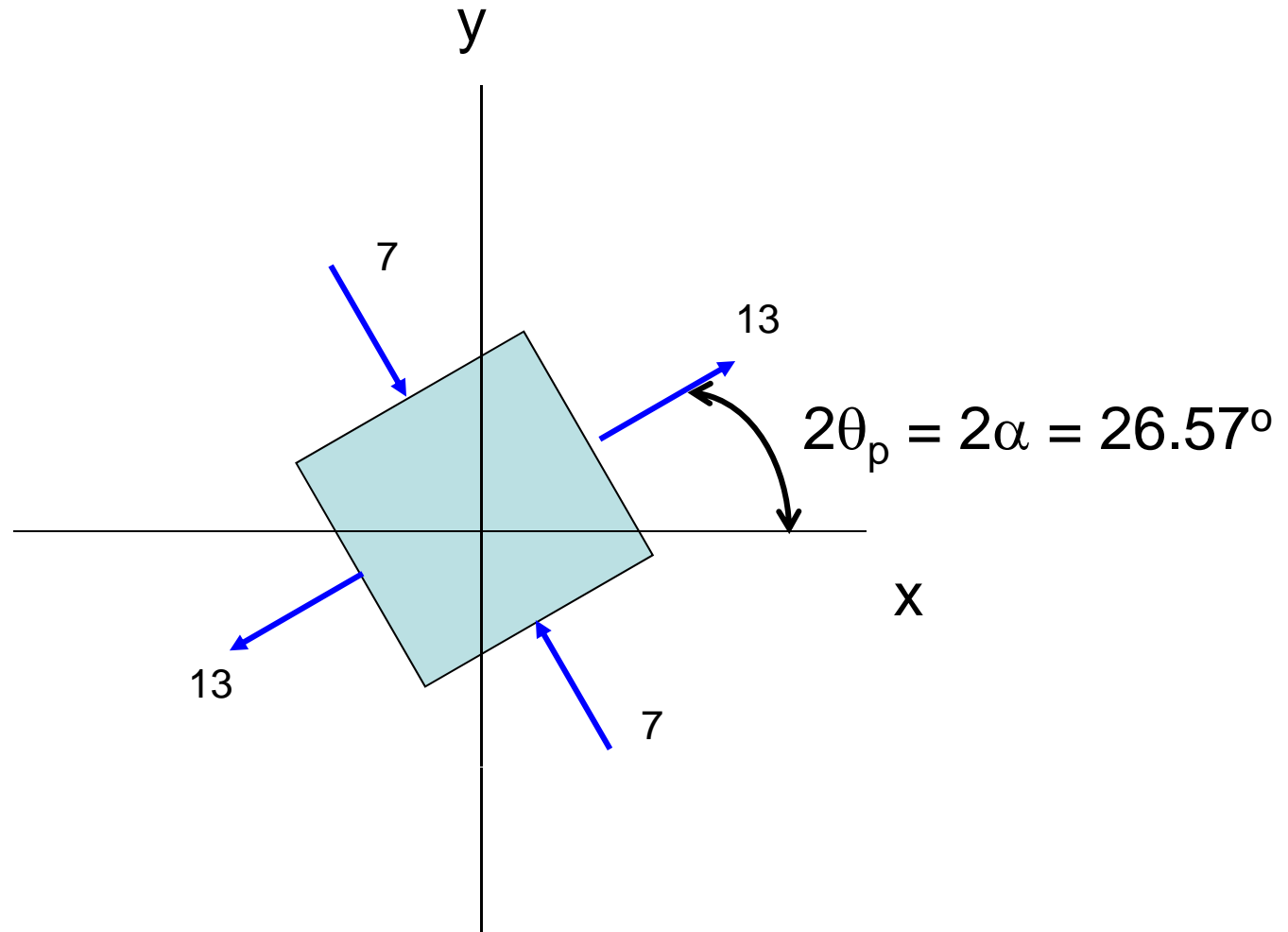
ANALISI della TENSIONE

Risulta:



ANALISI della TENSIONE

Inoltre:



ANALISI della TENSIONE

E' bene sempre ricordare che l'inclinazione delle direzioni principali si può determinare sia con il procedimento grafico illustrato in precedenza che con le formule teoriche già ricavate.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 8}{9 - (-3)} = \frac{4}{3}$$



ANALISI della TENSIONE

Analogamente, per la valutazione del tensore delle tensioni nel riferimento principale, si può utilizzare la formula:

$$[\mathbf{T}]_p = [\mathbf{Q}_p]^t [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}_p]$$

con

$$[\mathbf{Q}_p] = \begin{bmatrix} \cos \theta_p & -\sin \theta_p \\ \sin \theta_p & \cos \theta_p \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

In particolare

essendo $\theta_p = 0.5 \arctan(4/3) = 13.29^\circ$ risulta

$$[Q_p] = \begin{bmatrix} 0.894427191 & -0.4472135955 \\ 0.4472135955 & 0.894427191 \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Poichè

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

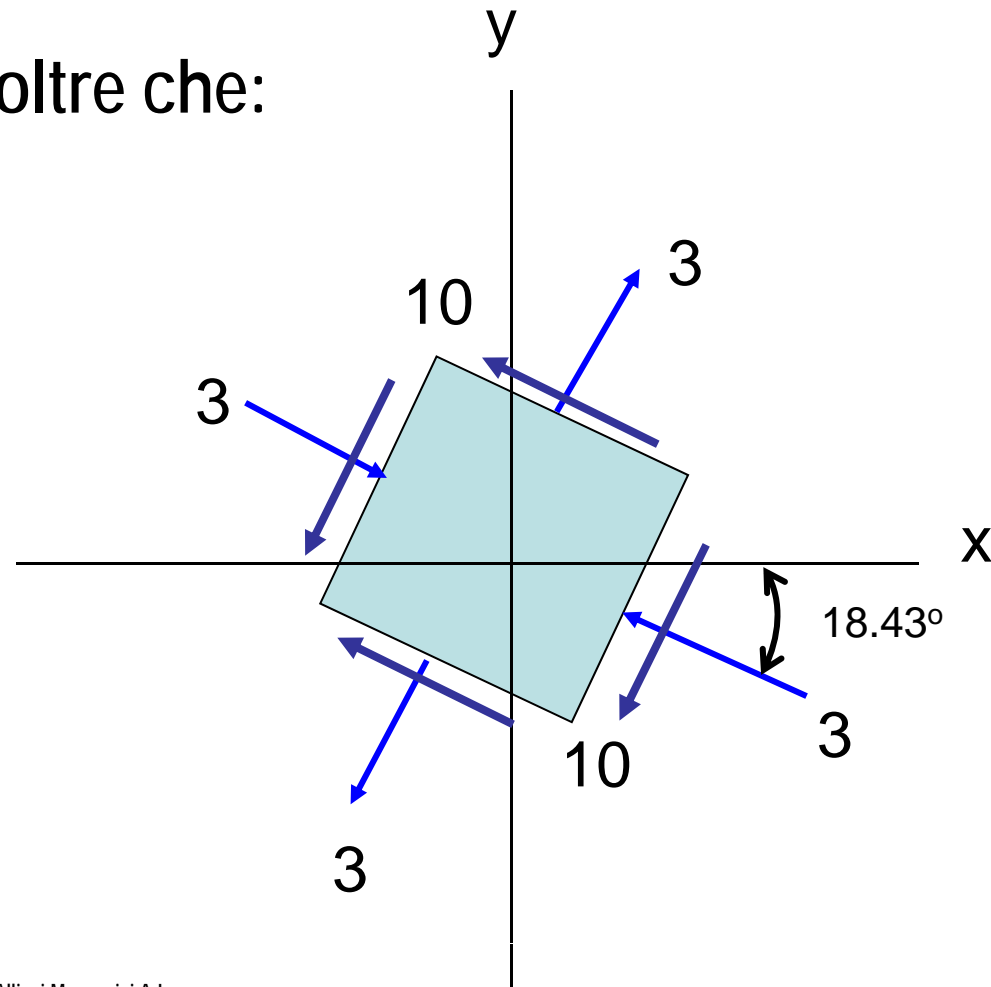
Il prodotto $[\mathbf{T}]_p = [\mathbf{Q}_p]^t [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}]_p$ fornisce

$$[\mathbf{T}]_p = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$



ANALISI della TENSIONE

Verificare inoltre che:



ANALISI della TENSIONE

Cerchio di Mohr per stati tensionali tridimensionali

Si dimostra che tutti i possibili stati tensionali sono contenuti nella zona in celeste detta ARBELO di MOHR

