LEGAMI COSTITUTIVI

In un problema elastico monodimensionale, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la dilatazione longitudinale e la corrispondente tensione sono legate da un parametro scalare (E) detto modulo di Young.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{du}{dx} \qquad \sigma = E\,\varepsilon$$

Questa semplice relazione costituisce

la legge di Hooke.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

Si vuole ora generalizzare la relazione precedente a casi più complessi e cioè a stati tensionali tridimensionali.

Tale generalizzazione sarà illustrata solo per i materiali ISOTROPI, ossia quei materiali il cui comportamento è identico in tutte le direzioni.

LEGAMI COSTITUTIVI

Ciò significa che, considerato un corpo di un assegnato materiale e pensando di estrarre da esso un provino da sottoporre a prove meccaniche per caratterizzarne il comportamento elastico, ciò può essere fatto scegliendo un provino diretto secondo una arbitraria direzione.

Infatti, per l'ipotesi di isotropia, i provini estratti secondo tutte le possibili direzioni forniranno sempre gli stessi risultati.

LEGAMI COSTITUTIVI

Evidentemente l'ipotesi di materiale isotropo è molto forte ed è possibile dimostrare, come del resto avvalora il senso fisico, che il comportamento elastico di un materiale isotropo è completamente definito dalla conoscenza di DUE soli parametri.

Dal punto di vista pratico ciò significa che sono sufficienti due sole prove sperimentale per conoscere il comportamento elastico del materiale.

LEGAMI COSTITUTIVI

L’ipotesi di materiale ISOTROPO può ritenersi valida per i materiali policristallini, cioè costituiti da cristalli orientati in maniera del tutto casuale nello spazio, sì da rendere completamente equivalente qualunque direzione nello spazio ai fini del comportamento elastico del materiale.

Quindi, non è certamente isotropo un materiale composito.

LEGAMI COSTITUTIVI

Ricordiamo che:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z}$$

dilatazioni

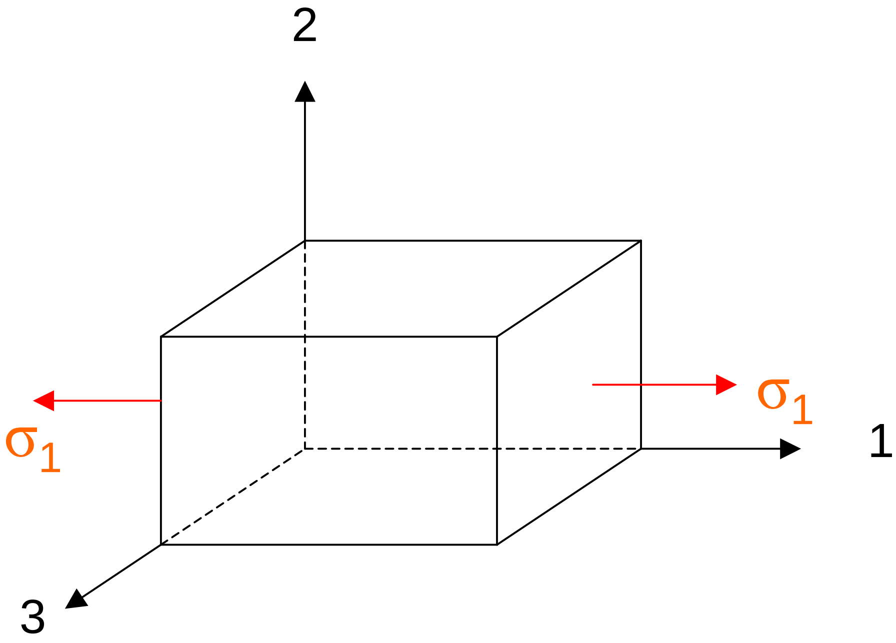
scorrimenti angolari

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Se in un generico punto del nostro corpo agisce solo la tensione principale σ_1 ...



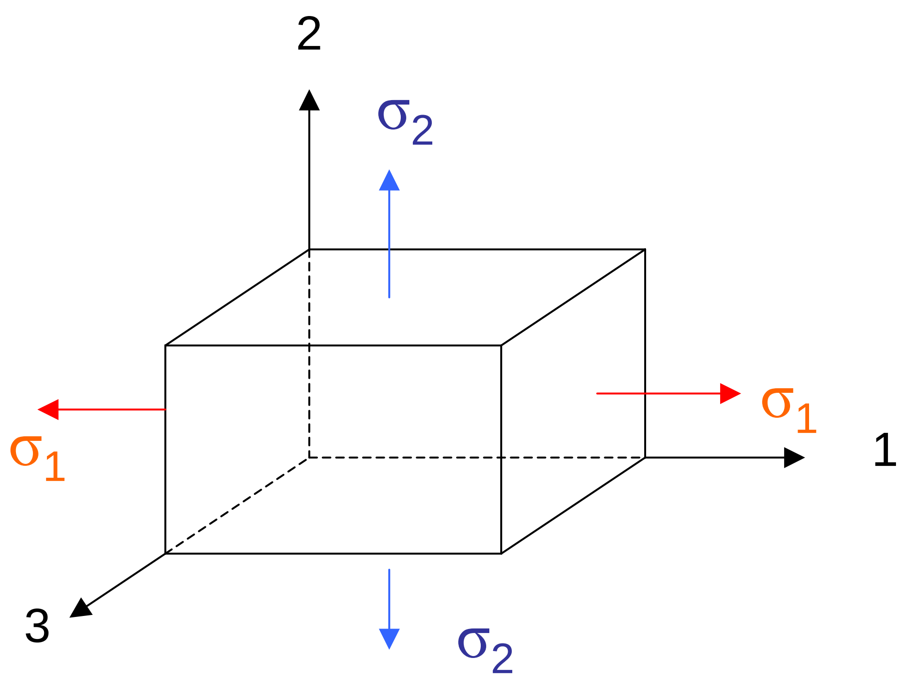
… si avrà, in base alla legge di Hooke, una dilatazione in direzione 1

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Tuttavia, se oltre alla σ_1 ... …agisce anche la σ_2,

si avrà, una ulteriore dilatazione in direzione 1



$$\varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_2}{E}$$

proporzionale alla σ_2 tramite il rapporto di Poisson ν

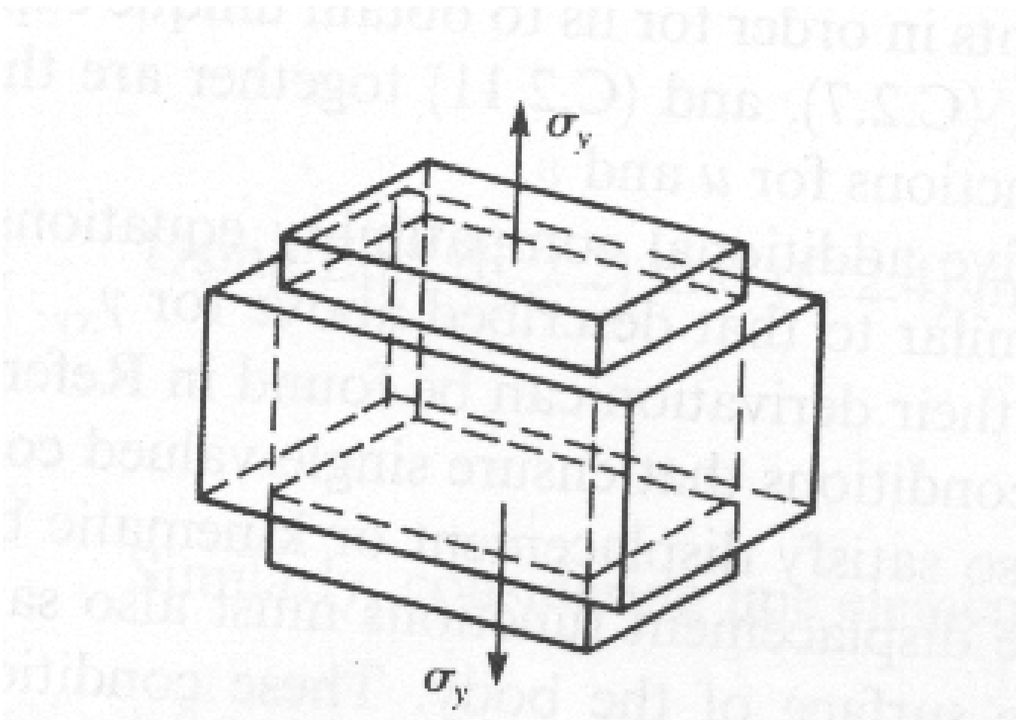
LEGAMI COSTITUTIVI

In altri termini, ad ogni tensione agente in una assegnata direzione principale, ad esempio la 2, corrisponde non solo una dilatazione nella stessa direzione e dello stesso segno della tensione, ma anche una dilatazione di segno opposto nelle direzioni ortogonali.

Per l'ipotesi di isotropia questi due comportamenti sono identici qualunque sia la direzione considerata.

LEGAMI COSTITUTIVI

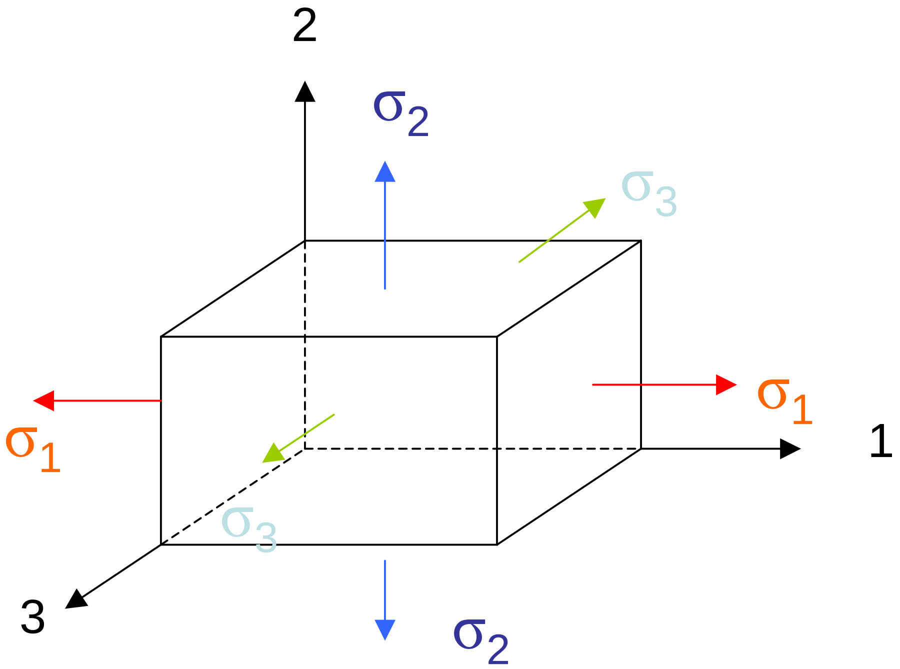
Ad esempio, con riferimento alla direzione 1=y



SCIENZA delle COSTRUZIONI - Allievi Meccanici A-I
prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

Dunque, se oltre alle σ_1 e σ_2 …agisce anche la σ_3, si avrà, una ulteriore dilatazione in direzione 1



$$\varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

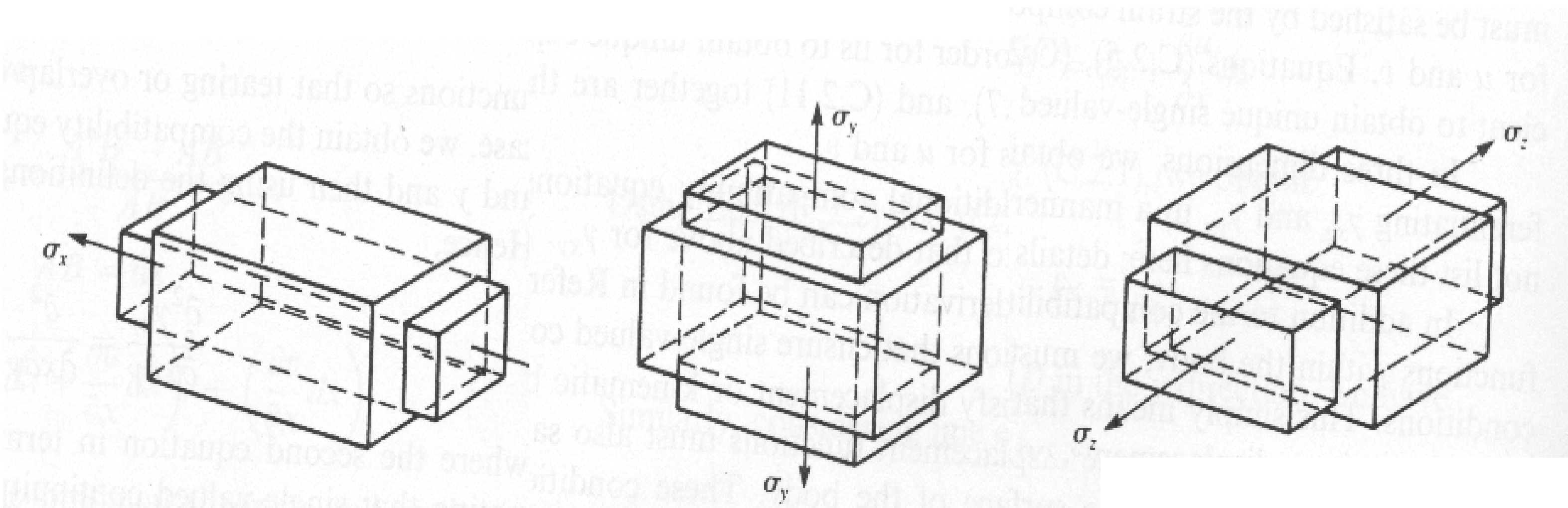
Dunque, sperimentalmente, si osserva che le tensioni principali σ_1 , σ_2 e σ_3 non inducono scorrimenti angolari tra le direzioni 1, 2 e 3 ossia tra le direzioni principali di tensione.

Ne consegue che, in un materiale isotropo, le direzioni principali di tensione coincidono con quelle di deformazione, proprietà che si dimostra anche analiticamente.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

In definitiva, sovrapponendo gli effetti di σ_1 , σ_2 e σ_3



LEGAMI COSTITUTIVI

si ricava:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

che si estende immediatamente alle altre due direzioni...

LEGAMI COSTITUTIVI

...ottenendo:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Aggiungiamo ad ambo i membri quantità uguali ed opposte:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}\left(+ \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E}\right)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}\left(+ \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E}\right)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}\left(+ \nu\frac{\sigma_3}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}\right)$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

che si scrive:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Consideriamo la somma delle relazioni precedenti:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{3\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

ovvero

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{E} = \frac{1-2\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{T} = \frac{E}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Ricordando il significato meccanico di tr T e tr E la quantità

$$k = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

viene detto modulo di elasticità volumetrica. La condizione ν=0.5 caratterizza i materiali incomprimibili.

Infatti, per i materiali reali ν risulta sempre positivo e minore o uguale a 0.5.

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

Ricordiamo ora:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

ed invertiamola:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$$

$$= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 + \frac{\nu}{(1+\nu)}\frac{E}{(1-2\nu)}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E}$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

Introducendo la quantità:

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{E}{(1-2\nu)}$$

detta seconda costante di Lamè, si può scrivere:

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_2 + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E}$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_3 + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E}$$

ovvero, in forma tensoriale:

LEGAMI COSTITUTIVI

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu}\mathbf{E} - \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{E})\,\mathbf{1}$$

poiché, la corrispondente rappresentazione matriciale nel sistema di riferimento principale, comune come detto sia al tensore delle tensioni che a quello delle deformazioni, è:

LEGAMI COSTITUTIVI

...ottenendo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} - \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{E}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Tuttavia, la relazione tensoriale, e quindi intrinseca ossia indipendente dal sistema di riferimento adottato per rappresentarla in forma matriciale:

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu}\,\mathbf{E} - \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{E})\,\mathbf{1}$$

può anche essere espressa nel sistema di riferimento x,y e z, non principale, ottenendo:

LEGAMI COSTITUTIVI

$$
\begin{bmatrix}
\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z
\end{bmatrix} =
$$

$$
= \frac{E}{1+\nu}
\begin{bmatrix}
\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\
\frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\
\frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z
\end{bmatrix}
- \lambda\,(\mathbf{tr}\,\mathbf{E})
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Uguagliando i termini fuori diagonale si ottiene, con riferimento agli assi x e y :

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

I termini omologhi corrispondenti alle altre coppie di assi sono uguali per l'ipotesi di isotropia.

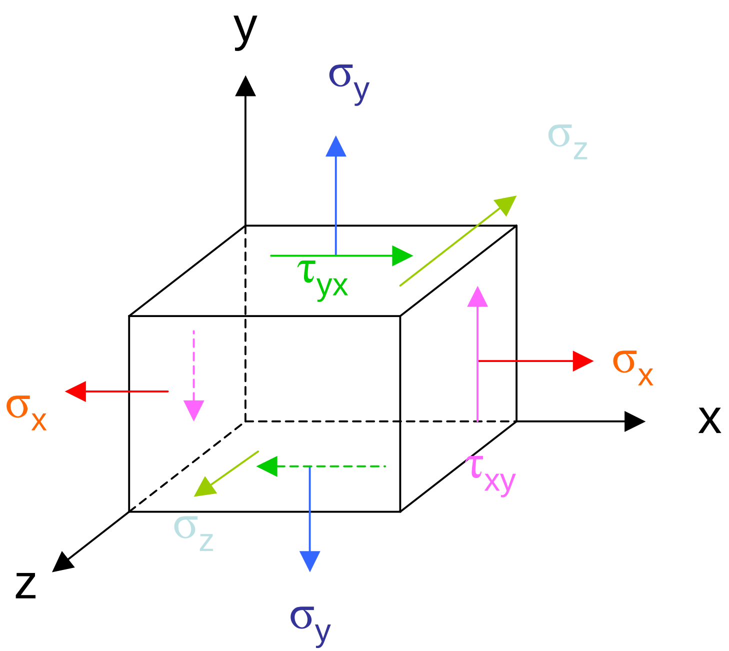
LEGAMI COSTITUTIVI

Dunque:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 2G\varepsilon_{zx}$$



dove G è il modulo di elasticità a taglio o prima costante di Lamè.

LEGAMI COSTITUTIVI

In definitiva si è visto, ma si può anche dimostrare analiticamente, che il comportamento elastico di un materiale isotropo è completamente definito da DUE sole costanti tra le tre sotto riportate

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

Ulteriori espressioni equivalenti per scrivere il legame elastico lineare di un materiale isotropo sono:

$$\begin{cases} \operatorname{tr} \mathbf{T} = \mathrm{k} \operatorname{tr} \mathbf{E} \\ \operatorname{dev} \mathbf{T} = 2\mathrm{G} \operatorname{dev} \mathbf{E} \end{cases}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

In notazione matriciale il legame elastico si scrive:

$$\underline{\sigma} = [D]\underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix}$$

LEGAMI COSTITUTIVI

dove:

$$[D]=\begin{bmatrix} \dfrac{E(1-v)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{E(1-v)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{E(1-v)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

Per uno stato piano di tensione:

$$\underline{\sigma} = [D]\underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = 0 \quad \text{implica} \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

prof. ing. Luciano Rosati - tel.: +39 081 768 3735 - email: rosati@unina.it
Università degli Studi di Napoli Federico II - Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - via Claudio, 21 - 80124 NAPOLI

LEGAMI COSTITUTIVI

sicchè

$$[D] = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-v^2} & \dfrac{vE}{1-v^2} & 0 \\ \dfrac{vE}{1-v^2} & \dfrac{E}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}$$