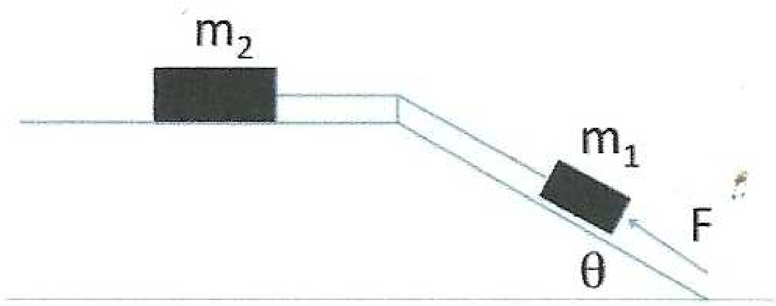
Problema 1:

Nel sistema mostrato nella figura, al primo corpo di massa m_1 = 1kg, che scende lungo il piano inclinato di un angolo $30°$, viene applicata una forza frenante F=2N; mentre il secondo di massa m_2 = 2kg lo segue sul piano orizzontale. In questa configurazione, durante la discesa il filo rimane teso. Determinare:

• Il tempo impiegato per percorrere partendo da fermi una distanza L=1m;

• Il valore della tensione del filo;

• Il massimo valore della forza F affinché il filo resti teso durante la discesa.



SOLUZIONE:

Proiettando la legge di Newton per i due sistemi lungo l'asse naturale del moto,

Tenendo conto che il filo `e teso e ideale (T = costante e a_1 = a_2 = a), abbiamo:

$$\begin{cases} -F - T + m_1 g sen\theta = m_1 a \\ +T = m_2 a \end{cases}$$ da cui si ricava a: $$a = \frac{m_1 g sen\theta - F}{m_1 + m_2} \approx 0{,}97 \frac{m}{s^2}$$

Il moto `e con accelerazione costante, per percorrere la distanza L=1m partendo avremo:

$$L = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L(m_1 + m_2)}{m_1 g sen\theta - F}} \approx 1{,}43\ s.$$

La tensione si ricava dalla seconda equazione del sistema precedente:

$$T = m_2 a = \frac{m_2(m_1 g sen\theta - F)}{m_1 + m_2} \approx 1{,}9\ N$$

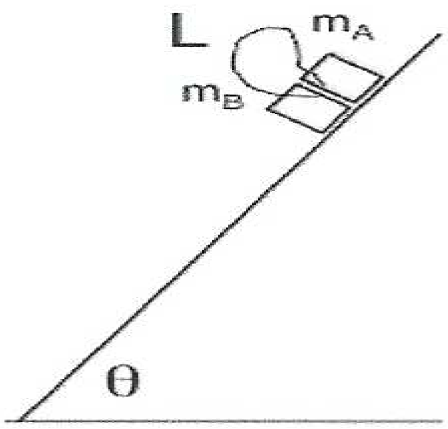
La condizione di filo teso significa che il modulo della tensione non deve annullarsi:

$$T \geq 0 \rightarrow \frac{m_2(m_1 g sen\theta - F)}{m_1 + m_2} \rightarrow (m_1 g sen\theta - F) \geq 0 \rightarrow F \leq m_1 g sen\theta = F_{max} \approx 4{,}9\ N$$

Problema 2:

Due punti materiali A e B di massa $m_A = 0,5\ kg$ e $m_B = 1\ kg$ sono uniti tra loro da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L. I due corpi giacciono su un piano scabro inclinato di un angolo θ = $60°$ rispetto all'orizzontale, e inizialmente sono tenuti fermi da una forza esterna. I coefficienti di attrito dinamico tra i corpi A e B ed il piano inclinato valgono $\mu_A = 0,40$ e $\mu_B = 0,10$. All'istante t = 0 si toglie l'azione esterna e i due corpi iniziano a scendere. Determinare:

1) Se il filo tra i due corpi si tende
2) In caso affermativo l'accelerazione dei corpi e la tensione del filo.



SOLUZIONE:

Consideriamo le accelerazioni dei due corpi nella fase iniziale quando vengono lasciati: si tratta del moto di discesa lungo un piano inclinato scabro, e l'accelerazione vale:

$$\begin{cases} a_A = g(sen\theta - \mu_A \cdot cos\theta) \approx 6,5\frac{m}{s^2} \\ a_B = g(sen\theta - \mu_B \cdot cos\theta) \approx 8,0\frac{m}{s^2} \end{cases} \rightarrow a_B \geq a_A$$

Siccome B che precede A scende più velocemente, il filo ad un certo istante si tenderà. Una volta che il filo è teso, i due corpi scendono come in un unico sistema con accelerazione a : scriviamo la legge di Newton per i due sistemi tenendo conto che adesso interviene anche la tensione T del filo. Effettuando le proiezioni lungo l'asse del moto si ottiene:

$$\begin{cases} m_A g sen\theta - \mu_A m g cos\theta + T = m_A a \\ m_B g sen\theta - \mu_B m g cos\theta - T = m_B a \end{cases}$$

dalle quali si ricava l'accelerazione:

$$a = g \cdot \left[sen\theta - \left(\frac{m_A\mu_A + m_B\mu_B}{m_A + m_B} \right) cos\theta \right] \approx 7,5\frac{m}{s^2}$$

e la tensione del filo:

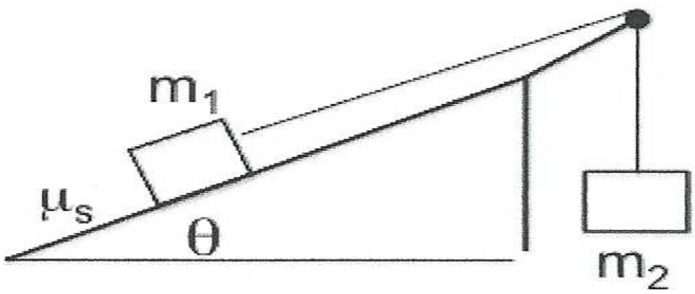
$$T = (\mu_A - \mu_B) \cdot \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \right) \cdot g \cdot cos\theta \approx 0,5\ N$$

Notare che T = 0 per $\mu_A = \mu_B$: allora risulterebbe inizialmente $a_B = a_A$ ed il filo non si tende.

Problema 3:

Due corpi 1 e 2 di masse m_2 e m_1 = 4 kg sono collegati come in figura da un filo ideale. Il piano è inclinato di un angolo $\theta = 30°$ e la superficie è scabra ($\mu_S = 0{,}80$ e $\mu_d = \frac{\mu_S}{2}$). Determinare:

1) Il massimo valore di m_2 affinchè il corpo 1 non si muova verso l'alto;
2) Se $m_2 = 6\ kg$ determinare il tipo di moto ed in quanto tempo il corpo 2, partendo da fermo, scende da una distanza D = 20 cm.



SOLUZIONE:

Dobbiamo imporre la condizione di equilibrio per il sistema, tenendo conto che sul corpo 1 agisce una forza di attrito statico tale da non farlo muovere verso l'alto; questo significa che $\overrightarrow{F_S}$ dovrà essere lungo il verso discendente del piano. Proiettiamo la relazione di equilibrio orientando l'asse in salita sul piano per il corpo 1 e lungo la verticale discendente per il corpo 2 e sfruttiamo le proprietà del filo *ideale* $(T_1 = T_2 = T)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_S} + m_1\vec{g} + \overrightarrow{T_1} + \vec{N} = 0 \\ \overrightarrow{T_2} + m_2\vec{g} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m_1 g sen\theta + T - F_S = 0 \\ N - m_1 g cos\theta = 0 \\ -T + m_2 g = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_S = (m_2 - m_1 sen\theta)g \\ N = m_1 g cos\theta \\ T = m_2 g \end{cases}$$

La forza di attrito statico non può superare il valore massimo $F_{SMAX} = \mu_S N$, e dunque:

$$(m_2 - m_1 sen\theta)g \leq \mu_s m_1 g cos\theta \rightarrow m_2 \leq (sen\theta + \mu_s cos\theta)m_1 \approx 4{,}8\ kg$$

Poiché:

$$m_2 = 6\ kg > 4{,}8\ kg$$

il corpo 2 si muove.

Per trovare l'accelerazione, riscriviamo il sistema precedente dove adesso compare la forza d'attrito dinamico $F_d = -\mu_d N$:

$$\begin{cases} -m_1 g sen\theta + T - \mu_d N = m_1 a \\ N - m_1 cos\theta = 0 \\ -T + m_2 g = m_2 a \end{cases} \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1(sen\theta + \mu_d cos\theta)}{m_1 + m_2} \cdot g \approx 2{,}56\, m/s^2$$

Essendo il moto uniformemente accelerato, possiamo trovare il tempo impiegato dal corpo 2 per percorrere la distanza richiesta:

$$t = \sqrt{\frac{2D}{a}} \approx 0{,}39\ s.$$

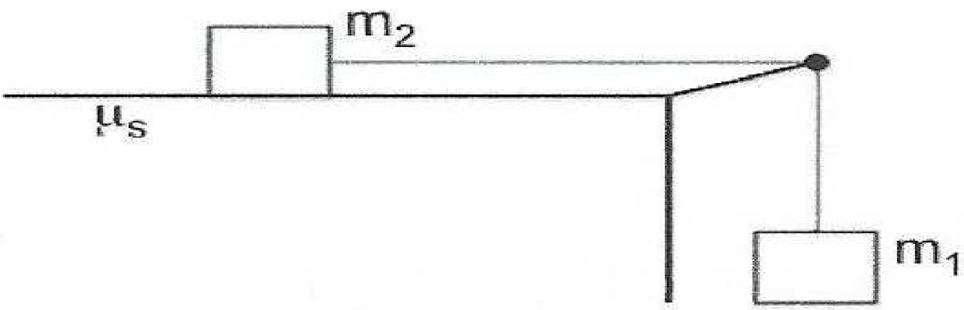
Problema 4:

Le due masse $m_1 = 3\ kg$ e $m_2 = 9\ kg$ della figura sono collegate da un filo inestensibile di massa trascurabile. Il piano su cui poggia la seconda massa è scabro con un coefficiente di attrito statico μ_S.

Determinare:

1) Il minimo valore di μ_S che impedisce al sistema di muoversi.

   Nel caso in cui μ_S = 0,2, determinare se il sistema si muove ed eventualmente:
   - L’accelerazione dei due corpi nel caso μ_S = μ_d
   - La velocità dopo che hanno percorso una distanza d = 2 m.



SOLUZIONE:

Dobbiamo imporre la condizione di equilibrio per il sistema, tenendo conto che sul corpo 2 agisce una forza di attrito statico F_S. Possiamo scrivere, tenendo conto che il filo è ideale, e proiettando opportunamente le forze nel riferimento della figura:

$$\begin{cases} m_1 g - T = 0 \\ T - F_S = 0 \\ N - m_2 g = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 g = F_S \\ N = m_2 g \\ F_S \leq \mu_s N \end{cases} \rightarrow m_1 \leq \mu_s m_2$$

e dunque:

$$\mu_s \geq \frac{m_1}{m_2} \approx 0{,}33$$

Poiché $\mu_s = 0{,}2 \leq 0{,}33 = \mu_{\min}$, il sistema si muove.

Scriviamo ora l'equazione di Newton e sfruttiamo le caratteristiche del filo $(T_1 = T_2 = T;\ a_1 = a_2 = a)$:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - \mu_d N = m_2 a \\ N - m_2 g = 0 \end{cases} \rightarrow a = \left(\frac{m_1 - m_2\mu_d}{m_1 + m_2}\right) \cdot g \approx 1{,}0 \frac{m}{s^2}$$

La velocità $\bar{v}$ dopo la distanza d si ottiene dalle equazioni del moto:

1) $x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2$
2) $v(t) = a\, t$

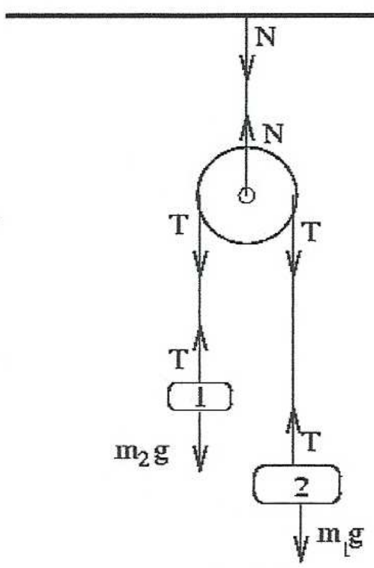
Ponendo $x(t^*) = d$ e $v(t^*) = \bar{v}$ si ha dalla 2):

$$t^* = \frac{\bar{v}}{a}$$

da cui, sostituendo nella 1):

$$x(t^*) = d = \frac{1}{2}\, a \left(\frac{\bar{v}}{a}\right)^2 \rightarrow \bar{v} = \sqrt{2ad} \approx 2{,}0 \frac{m}{s}$$

La Macchina di Atwood:



Note le masse m_1 e m_2 si vuole determinare il moto del sistema, la tensione T del filo e la reazione vincolare N del soffitto a cui la puleggia è appesa.
Il filo è inestensibile, le masse del filo e della puleggia sono trascurabili.

Indicando con a_1 e a_2 le accelerazioni delle masse m_1 e m_2, la condizione che il filo sia inestensibile si formalizza come $a_1 = -a_2 = a$. Le equazioni di Newton per le due masse sono le seguenti; risolvendo il sistema si ottengono le espressioni per l'accelerazione e la tensione:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -m_1 g + T \\ m_2 a_2 = -m_2 g + T \\ N = 2T \end{cases} con\ a_1 = -a_2 = a \rightarrow \begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ m_2 a = +m_2 g - T \\ N = 2T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot g \\ T = 2\dfrac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \cdot g \end{cases}$$