

# Dinamica del Corpo Rigido

# Corpo rigido

- È un caso particolare dei sistemi di punti materiali
- È di grande importanza per le applicazioni pratiche
- Un corpo è detto rigido se le distanze tra tutte le possibili coppie di punti del corpo non cambiano

# Corpo rigido

- Questa è un'astrazione che si applica tanto meglio quanto più i corpi sono indeformabili
- Un corpo perfettamente rigido non esiste
- Dal punto di vista microscopico la rigidità dei solidi è dovuta a forze di natura elettrica tra gli atomi costituenti

# Moto del corpo rigido

- Studio del moto di un corpo rigido:
  - in un SR inerziale, oppure
  - nel SCM (sistema non inerziale ma con gli assi sempre paralleli a quelli di un SR inerziale), oppure
  - in un sistema con gli assi solidali al corpo rigido (sistema non inerziale, con assi che possono anche ruotare rispetto a quelli di un SR inerziale)

# Moto del corpo rigido

- È determinato da una o più forze esterne, generalmente applicate in punti diversi del corpo
- Le forze sono quindi caratterizzati da una forza risultante  $\mathbf{F}$  e da un momento risultante  $\tau$
- Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo quindi la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze esterne

# Moto del corpo rigido

- Le leggi fondamentali sono le equazioni cardinali della meccanica

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Si puo` anche usare la conservazione dell'energia meccanica nel caso in cui le forze in gioco siano conservative o si abbia attrito statico

$$\Delta E = 0$$

# Equilibrio statico del corpo rigido

- Un corpo rigido è in equilibrio statico se e solo se:
  - è inizialmente in quiete:  $\vec{P} = 0 \quad \vec{L} = 0$
  - $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{L}$  non variano nel tempo  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$
- Dalla prima eq. segue che  $\vec{F} = 0$
- Dalla seconda che  $\vec{\tau} = 0$
- Inoltre  $\vec{F} = 0$  implica che  $\tau$  è indipendente dal polo scelto e quindi il polo può essere un punto qualunque

# Traslazione di un corpo rigido

- Tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in genere curvilinee, con la stessa velocità, in genere varia
- Ogni punto ha lo stesso moto del CM: la conoscenza del moto del CM basta per conoscere il moto di tutti i punti del corpo
- Gli assi del sistema solidale col corpo rimangono sempre paralleli a quelli del SCM

# Traslazione di un corpo rigido

- La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al CM
- Momento angolare ed energia cinetica nel SCM sono nulle  $\vec{L}^* = 0$   $K^* = 0$

- QM ed energia cinetica del corpo rigido:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \qquad K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

- L'equazione del moto del CM è

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM}$$

# Traslazione di un corpo rigido

- Il momento angolare è:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^* = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

- e quindi il teorema del momento angolare non aggiunge alcuna informazione, infatti

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}$$

- Cioè  $\tau$  è esprimibile in funzione di  $\mathbf{F}$

# Rotazione di un corpo rigido

- Ogni punto descrive un moto circolare, la traiettoria è un arco di circonferenza, di raggio diverso per ogni punto considerato, ma con centro su una stessa retta, detta asse di rotazione
- La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano la stessa velocità angolare  $\omega$  in un dato istante, parallela all'asse di rotazione

# Rotazione di un corpo rigido

- Se l'asse è fisso nel tempo  $\omega$  può cambiare solo in modulo e verso
- Nel caso più generale  $\omega$  può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile)

# Moto di un corpo rigido

- Traslazione e rotazione sono i moti più importanti, in quanto vale il seguente teorema:

ogni spostamento infinitesimo puo` sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime con velocita`  $\mathbf{v}$  e  $\omega$  variabili nel tempo

# Moto di un corpo rigido

- Per descrivere una rototraslazione si utilizzano le equazioni cardinali:
  - il teorema del moto del CM
  - il teorema del momento angolare
- In una rototraslazione le velocità  $\mathbf{v}$  e  $\omega$  sono, in generale, indipendenti
- In situazioni in cui e` presente un vincolo le due velocità possono essere legate da una relazione che elimina tale indipendenza (rotolamento puro)

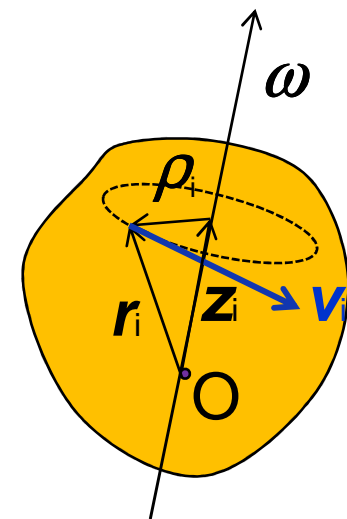
# Momento angolare

- Calcoliamo il momento angolare di un corpo esteso in rotazione attorno ad un asse, supposto inizialmente fisso, con velocità angolare  $\omega$ , rispetto al polo O scelto sull'asse

$$\vec{L} = \sum_l \vec{r}_l \times m_l \vec{v}_l = \sum_l m_l \vec{r}_l \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_l)$$

- Esprimiamo  $\vec{r}_l(t)$  in termini del componente 1-D lungo l'asse (diciamolo z) e del componente 2-D perpendicolare

$$\vec{r}_l(t) = \vec{z}_l + \vec{\rho}_l(t) \quad \vec{\rho}_l(t) = x_l(t)\hat{i} + y_l(t)\hat{j}$$



# Momento angolare

- Abbiamo messo in evidenza la dipendenza dal tempo delle grandezze
- Fintanto che l'asse di rotazione rimane lo stesso
  - la coordinata  $z$  è indipendente da  $t$
  - La coordinata  $\rho(t)$  ruota, con modulo  $\rho$  indipendente da  $t$

# Momento angolare

- $L$  diviene

$$\vec{L} = \sum_l m_l (\vec{\rho}_l + z_l \hat{\omega}) \times [\vec{\omega} \times (\vec{\rho}_l + z_l \hat{\omega})]$$

- Nella parentesi quadra il termine  $\vec{\omega} \times \hat{\omega}$  si annulla

$$\vec{L} = \sum_l m_l \vec{\rho}_l \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_l] + \sum_l m_l z_l \hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_l]$$

- Il vettore  $\vec{\rho}_l \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_l]$  ha la direzione di  $\omega$  e modulo

$$\omega \rho_l^2 : \quad \vec{\rho}_l \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_l] = \rho_l^2 \vec{\omega}$$

- Il vettore  $\hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_l]$  ha direzione opposta a  $\rho_l$  e

$$\text{modulo } \omega \rho_l : \quad \hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_l] = -\vec{\rho}_l \omega$$

# Momento angolare

- Cioe`  $L$  e` la somma di un termine longitudinale e di un termine trasversale

$$\vec{L} = \left[ \sum_l m_l \rho_l^2 \right] \vec{\omega} - \left[ \sum_l m_l z_l \vec{\rho}_l \right] \omega = \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp}$$

- L'esistenza di quest'ultimo significa che, in generale, il momento angolare non e` parallelo al vettore velocita` angolare

# Momento angolare

- Il termine longitudinale e` proporzionale al vettore velocita` angolare

$$\vec{L}_{//} = \left[ \sum_l m_l (x_l^2(t) + y_l^2(t)) \right] \vec{\omega} = \left[ \sum_l m_l \rho_l^2 \right] \vec{\omega} = I_{\omega} \vec{\omega}$$

- La costante di proporzionalita` e` detta momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione scelto
  - E` indipendente dalla posizione del polo sull'asse ( $\rho$  non dipende dalla posizione di O)
  - E` indipendente dal tempo ( $\rho$  non dipende da  $t$ )

# Momento angolare

- Il termine trasversale

$$\vec{L}_{\perp} = -\omega \sum_l m_l z_l (x_l(t)\hat{i} + y_l(t)\hat{j}) = -\omega \sum_l m_l z_l \vec{\rho}_l(t)$$

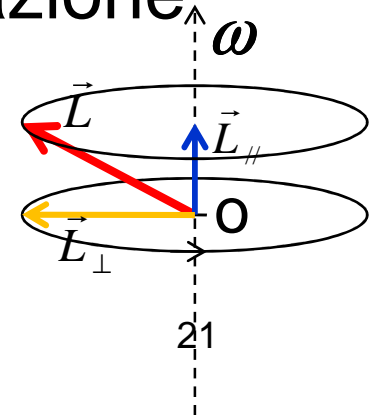
- Dipende dal tempo (tramite  $x$  e  $y$  oppure  $\rho_l$ )
- Dipende dalla posizione del polo sull'asse (tramite  $z$ )

- Questo termine è nullo in due casi notevoli in cui l'asse di rotazione

- è un asse di simmetria della distribuzione di massa del corpo (allora per ogni punto  $x, y, z$  esiste un punto  $-x, -y, z$  che compensa il primo)
- è un asse principale d'inerzia (vedi oltre)

# Momento angolare

- Il momento angolare, calcolato rispetto ad un punto sull'asse di rotazione, può essere scritto come  $\vec{L} = \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp} = I_{\omega} \vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$
- I vettori  $\vec{\rho}_i$  ruotano tutti con la stessa velocità angolare, quindi anche  $\vec{L}_{\perp}$  e  $\vec{L}$  ruotano con tale velocità; quest'ultimo descrive una superficie conica attorno all'asse di rotazione
- Questo moto è detto precessione del momento angolare attorno all'asse di rotazione



# Momento d'inerzia

- Per definire il momento d'inerzia di un corpo, bisogna conoscerne la distribuzione di massa, cioè la distanza degli elementi di massa dall'asse attorno a cui ruota

$$I(\hat{\omega}) = \sum_l m_l (x_l^2(\hat{\omega}, t) + y_l^2(\hat{\omega}, t)) = \sum_l m_l \rho_l^2(\hat{\omega})$$

- Per una distribuzione continua di massa

$$I(\hat{\omega}) = \int_{\text{corpo}} (x^2(\hat{\omega}, t) + y^2(\hat{\omega}, t)) dm = \int_{\text{corpo}} \rho^2(\hat{\omega}) dm$$

# Momento d'inerzia

- Ne segue che cambiando l'asse di rotazione, cambia il momento d'inerzia, cioè la costante (indipendente dal tempo!) che lega il momento angolare longitudinale alla velocità angolare
- $I$  è una grandezza scalare estensiva, cioè tale che per un sistema scomponibile in parti, può essere calcolata come somma dei contributi delle singole parti

# Momento d'inerzia

- Questa nuova grandezza e` stata introdotta per semplificare lo studio del moto dei corpi rigidi

- Le sue dimensioni fisiche sono

$$[I] = ML^2$$

- e l'unita` di misura e`

$$u(I) = kg \cdot m^2$$

# Assi principali d'inerzia

- Esiste un teorema, dovuto a Poinsot, che afferma: dato un corpo rigido qualunque, comunque venga scelto un punto  $O$ , e` sempre possibile trovare tre direzioni mutuamente ortogonali passanti per  $O$ , per ognuna delle quali  $L$  e` parallelo a  $\omega$
- Questi assi sono gli assi principali d'inerzia
- Se  $O$  coincide con il CM, gli assi si dicono assi centrali d'inerzia

# Calcolo del momento d'inerzia

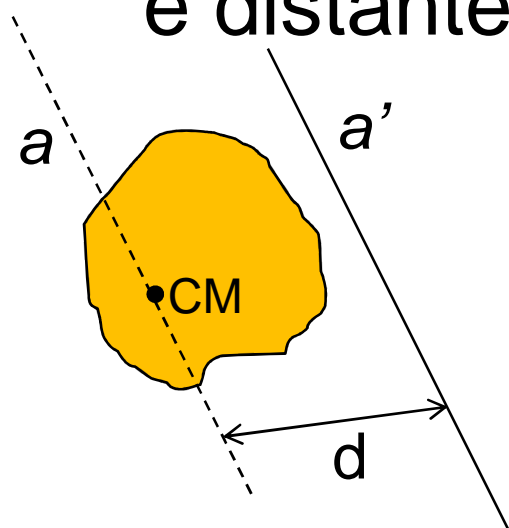
- Per una sbarra sottile rispetto all'asse normale mediano
- Per un cilindro rispetto al proprio asse
- Per una sfera rispetto ad un asse baricentrico

# Calcolo del momento d'inerzia

- I calcoli piu` semplici sono quelli per assi di rotazione coincidenti con assi di simmetria passanti per il CM
- Per assi paralleli a questi assi, esiste un teorema che permette di calcolare semplicemente i momenti d'inerzia relativi

# Teorema di Huygens-Steiner

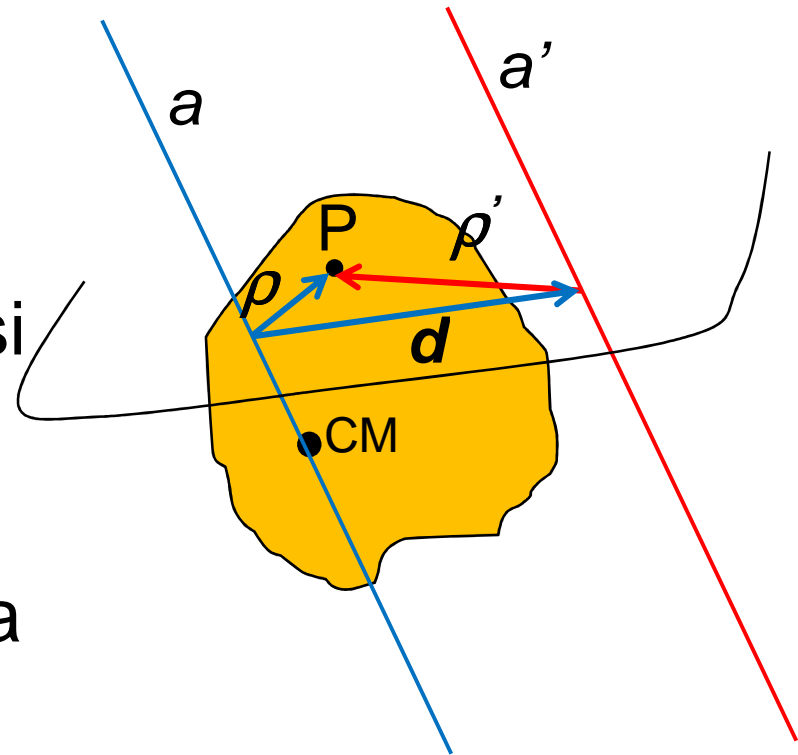
- Detto  $I$  il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$ , rispetto ad un asse  $a$  passante per il CM, il momento d'inerzia rispetto ad un asse  $a'$  parallelo al primo e distante  $d$  da questo e`



$$I' = I + md^2$$

# Teorema di Huygens-Steiner

- Detto P il generico punto del corpo, tracciamo il piano passante per P e perpendicolare ai due assi paralleli
- Sia  $\rho$  la distanza di P dall'asse  $a$  e  $\rho'$  la distanza di P dall'asse  $a'$
- Vale la relazione  $\vec{\rho}' = \vec{\rho} - \vec{d}$



# Teorema di Huygens-Steiner

- Il momento d'inerzia rispetto ad  $a'$  e`

$$\begin{aligned} I' &= \int_{\text{corpo}} \rho'^2 dm = \int_{\text{corpo}} (\vec{\rho} - \vec{d})^2 dm = \int_{\text{corpo}} \rho^2 dm - 2\vec{d} \cdot \int_{\text{corpo}} \vec{\rho} dm + d^2 \int_{\text{corpo}} dm = \\ &= I - 2\vec{d} \cdot m\vec{\rho}_{CM} + md^2 \end{aligned}$$

- Il secondo termine e` nullo, in quanto il centro di massa appartiene all'asse  $a$
- quindi  $I' = I + md^2$

# Energia cinetica di rotazione

- Partendo dalla definizione di  $K$

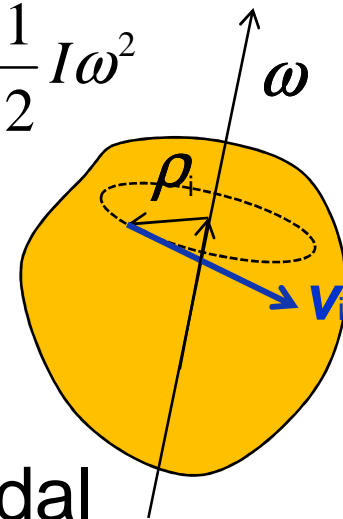
$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Ricordando che  $\vec{L}_{//} = I \vec{\omega}$

- Possiamo scrivere

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L_{//} \omega = \frac{1}{2} \frac{L_{//}^2}{I}$$

- L'energia cinetica di rotazione dipende dal momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, ovvero dal momento angolare longitudinale



# Lavoro

- In seguito all'azione di un momento esterno, la velocità angolare di un corpo viene portata dal valore iniziale  $\omega_1$  a quello finale  $\omega_2$
- Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di  $K$  è uguale al lavoro delle forze agenti sul sistema
- Per un corpo rigido, solo le forze esterne danno un contributo

$$\Delta K = W^E$$

# Lavoro e potenza

- In termini infinitesimi

$$dK = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = I\omega d\omega = I \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I\alpha d\theta = \tau_{//} d\theta = dW^E$$

- Integrando gli ultimi due membri otteniamo il lavoro come integrale del momento nella variabile angolare

$$\int_0^{\Theta} \tau_{//} d\theta = \int_I^F dW^E = W^E$$

- Esprimiamo la potenza in funzione del momento e della velocità angolare

$$\mathcal{P} = \frac{dW^E}{dt} = \tau_{//} \frac{d\theta}{dt} = \tau_{//} \omega$$

# Rotazione intorno ad un asse fisso

- E` un caso particolare di grande importanza pratica nello studio di macchine e motori
- Il vettore  $\omega$  ha la direzione fissa dell'asse, mentre modulo e verso possono cambiare nel tempo
- Se  $\omega$  non è costante, il vettore accelerazione angolare  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  è diverso da zero e diretto lungo l'asse

# Rotazione con asse fisso e $L$ non // $\omega$

- Dal teorema del MA, le equazioni del moto sono

$$\tau_{//} = \frac{dL_{//}}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad \vec{\tau}_{\perp} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

- Il moto longitudinale (1-D) è retto da  $\tau_{//}$ , parallelo all'asse e che puo` far cambiare  $\omega$  solo in verso e modulo ma non in direzione
- Il moto trasversale (2-D) e` retto da  $\vec{\tau}_{\perp}$ , perpendicolare all'asse e che tende a far ruotare l'asse, cioe` a far cambiare la direzione di  $\omega$

# Rotazione con asse fisso e $\mathbf{L} // \boldsymbol{\omega}$

- Il caso piu` semplice e` quello in cui il momento angolare e` parallelo all'asse, ovvero la componente trasversale e` nulla; in tal caso  $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- ove  $I$  e` il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse
- $\mathbf{L}$  puo` variare in modulo e verso, ma non in direzione, quindi  $d\vec{L}/dt$  e` parallelo a  $\boldsymbol{\omega}$
- Il teorema del momento angolare impone allora che il momento delle forze  $\boldsymbol{\tau}$  che fa variare  $\mathbf{L}$  sia anch'esso parallelo a  $\boldsymbol{\omega}$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Leftrightarrow \tau_{//} = \frac{dL_{//}}{dt} = I\alpha$$

# Rotazione con asse fisso e $L // \omega$

- Risolvendo l'equazione rispetto all'accelerazione  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau_{//}}{I}$
- Noto il momento, si puo` ricercare l'integrale primo del moto

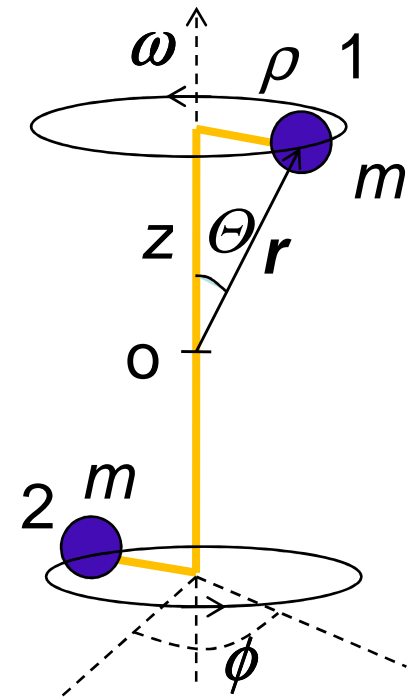
$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha dt = \int_0^t \frac{\tau_{//}}{I} dt$$

- In particolare se il momento e` costante

$$\omega(t) - \omega(0) = \frac{\tau_{//}}{I} t$$

# Un esempio semplice di $L$ non $// \omega$

- Consideriamo un sistema formato da una sbarra di lunghezza  $2z$ , a ciascuna estremità della quale è posta una sbarretta di lunghezza  $\rho$  e una massa  $m$
- Supponiamo che la sbarra e le due sbarrette abbiano massa trascurabile
- Supponiamo che il sistema ruoti attorno alla direzione (fissa) della sbarra con azimut  $\phi$  e velocità  $\omega$
- Calcoliamo il momento angolare del sistema rispetto al punto mediano  $O$  della sbarra



# Un esempio semplice di $\mathbf{L}$ non $\parallel \boldsymbol{\omega}$

- I contributi delle due masse sono uguali

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = 2\vec{r} \times m\vec{v} = 2\vec{l}$$

- Poiche' il moto delle masse e' circolare, la componente longitudinale di  $\mathbf{L}$  vale

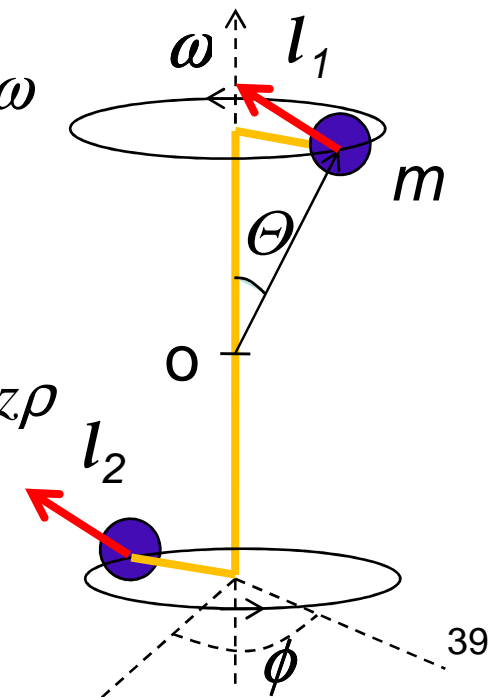
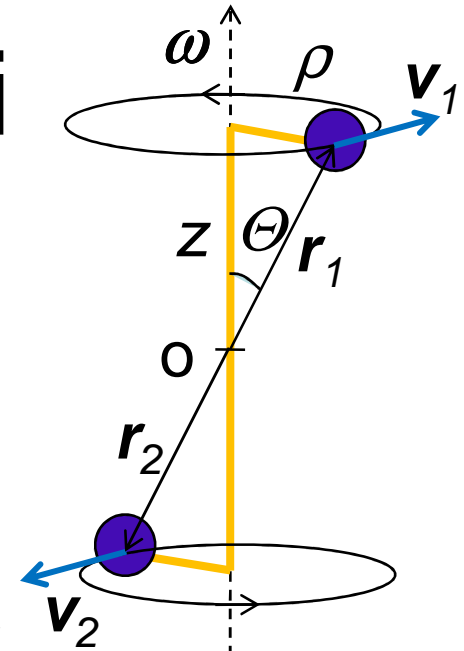
$$L_{\parallel} = 2l_{\parallel} = 2rmv \sin \Theta = 2mr\omega\rho \sin \Theta = 2m\rho^2\omega$$

$$\vec{L}_{\parallel} = 2m\rho^2\omega\hat{\omega} = 2m\rho^2\vec{\omega} = I(\hat{\omega})\vec{\omega}$$

- E quella trasversale

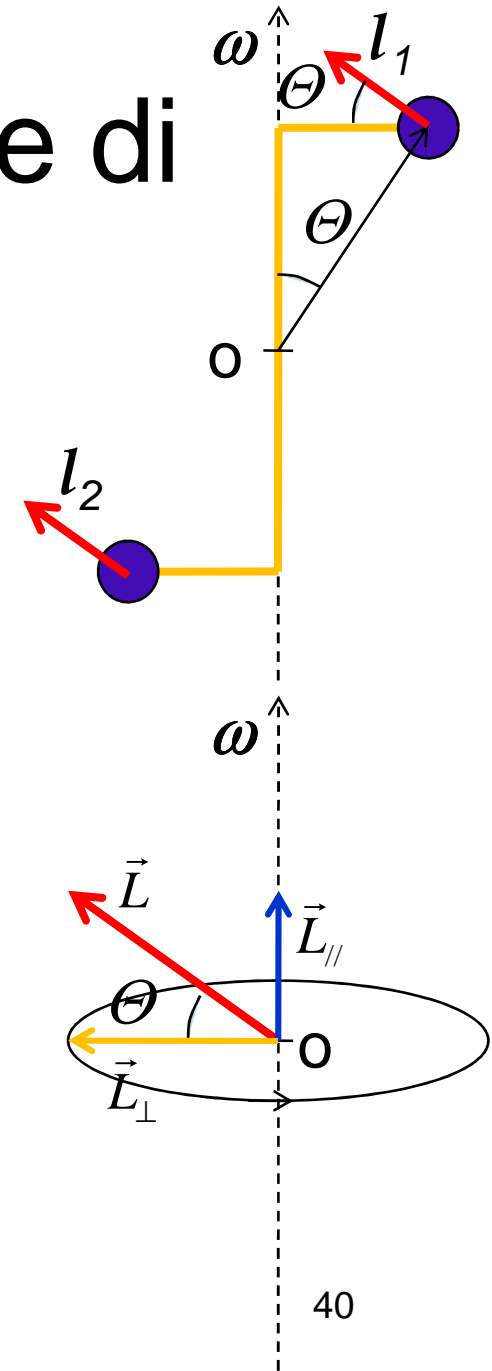
$$L_{\perp} = 2l_{\perp} = 2rmv \cos \Theta = 2mr\omega\rho \cos \Theta = 2m\omega z\rho$$

$$\vec{L}_{\perp} = 2m\omega z\rho(-\hat{\rho}(t)) = -2m\omega z\vec{\rho}(t)$$



# Un esempio semplice di $L$ non $// \omega$

- La componente longitudinale e' proporzionale a  $\omega$  secondo il momento d'inerzia, che e' costante
- La componente trasversale ruota attorno all'asse (precessione) con modulo proporzionale a  $\omega$



# Un esempio semplice di $L$ non $// \omega$

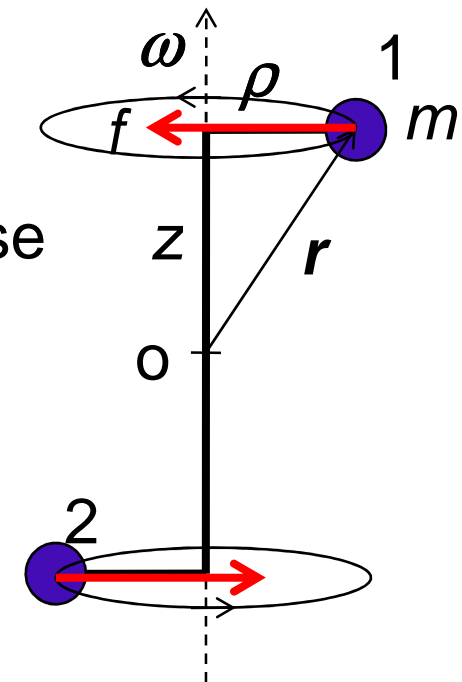
- Come si è detto il moto trasversale (2-D) è retto dall'eq.

$$\vec{\tau}_{\perp} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

- con  $\vec{\tau}_{\perp}$  perpendicolare all'asse e che tende a farlo ruotare, cioè a far cambiare  $\omega$  in direzione
- Cerchiamo ora di capire l'origine di  $\vec{\tau}_{\perp}$

# Un esempio semplice di $L$ non $// \omega$

- Affinche' le masse descrivano un moto circolare, e' necessario che sia presente una forza centripeta per ciascuna di esse
- Tali forze devono essere generate dall'asse
- Se vogliamo che l'asse rimanga fisso, occorre che i supporti che lo sostengono resistano alle forze dovute all'asse stesso
- I supporti reagiscono con forze uguali e contrarie a quelle dell'asse (ed uguali a quelle centripete)



# Un esempio semplice di $L$ non $// \omega$

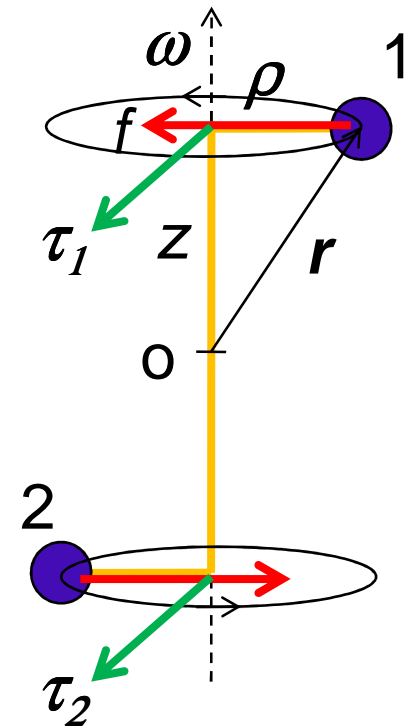
- Il momento delle forze centripete e`

$$\vec{\tau}_{\perp} = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{f}_2$$

- I due contributi sono uguali, hanno direzione  $-\hat{\varphi}$  e modulo  $fz$

- quindi

$$\vec{\tau}_{\perp} = -2fz\hat{\varphi} = -2m\omega^2\rho z\hat{\varphi} = -(2m\rho z)\omega^2\hat{\varphi}$$



# Un esempio semplice di $L$ non // $\omega$

- Ricordando l'espressione del momento angolare trasversale

$$\vec{L}_{\perp} = -2m\omega z\rho\hat{\rho}$$

- e la derivata del versore  $\rho$ :  $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\varphi}\omega$
- si verifica facilmente il teorema del momento angolare

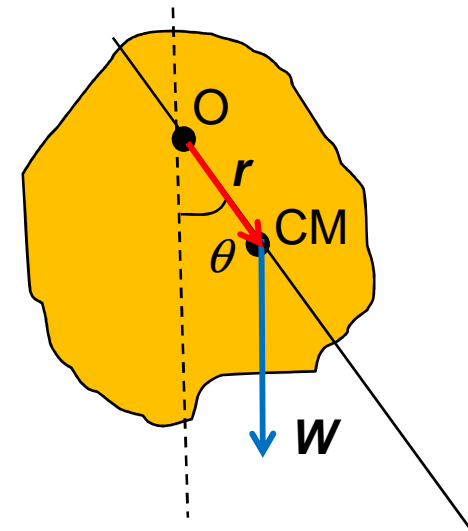
$$\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = -2m\omega z\rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -(2m\rho z)\omega^2\hat{\varphi} = \vec{\tau}_{\perp}$$

# Un esempio semplice di $L$ non // $\omega$

- Per riassumere: l'asse agisce sulle masse generando il momento di forza trasversale e le due masse agiscono sull'asse con forze che tendono a farlo ruotare
- Il momento generato dai cuscinetti che supportano l'asse è uguale e contrario a quello dell'asse (per la 3<sup>a</sup> legge della dinamica) e quindi uguale al momento trasversale
- Questi momenti devono essere resi più piccoli possibile, per ridurre l'usura dei cuscinetti
- Si cerca quindi di rendere  $L$  parallelo a  $\omega$ , facendo ruotare il corpo attorno ad un asse di simmetria

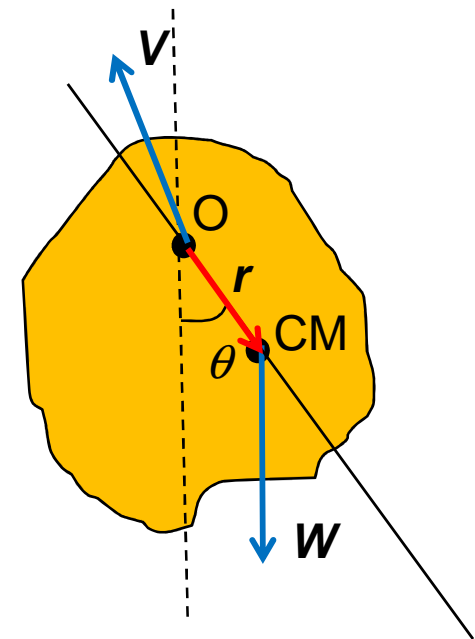
# Pendolo fisico

- È un qualunque corpo rigido oscillante attorno ad un asse orizzontale (non passante per il CM)
- Consideriamo la sezione del corpo perpendicolare all'asse e contenente il CM
- Sia  $O$  la traccia dell'asse di rotazione e  $r$  la distanza di  $O$  dal CM,  $W$  il peso del corpo e  $\theta$  l'angolo formato da  $r$  con la verticale



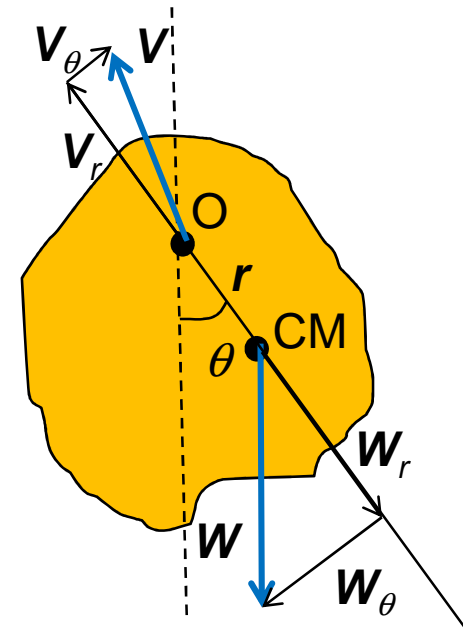
# Pendolo fisico

- L'asse è vincolato a rimanere fisso, esisterà quindi una forza vincolare  $V$  che agisce sul corpo
- Come ogni forza vincolare, essa è, a priori, incognita e sarà determinata dopo aver risolto l'equazione del moto
- Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche con origine  $O$ , asse polare verticale e asse  $z =$  asse di rotazione con verso uscente dal foglio



# Pendolo fisico

- Le componenti del peso sono allora  
$$W_r = W \cos \theta$$
$$W_\theta = -W \sin \theta$$
- E le componenti della forza vincolare  $V_r, V_\theta$
- Entrambe le forze hanno componente  $z$  nulla



# Pendolo fisico

- Scegliamo O come polo per il calcolo dei momenti: questo e` conveniente perche' la forza vincolare incognita ha momento nullo rispetto a O e il momento risultante  $\vec{\tau}$  e` uguale al momento della forza peso  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W}$
- Applichiamo al corpo le equazioni cardinali
$$\vec{W} + \vec{V} = M\vec{a}^{(CM)} \qquad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$
- Proiettando queste equazioni vettoriali lungo gli assi coordinati otteniamo equazioni 1-D

# Pendolo fisico

- Per i momenti  $\tau_z = \frac{dL_z}{dt}$
- Note le espressioni del momento di forza e del momento angolare

$$\tau_z = rW_\theta = -rW \sin \theta \qquad L_z = I\omega$$

( $I$  e' il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione) l'equazione diviene:

$$-rW \sin \theta = \frac{d}{dt}(I\omega) = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- che e' sufficiente per trovare la legge oraria  $\theta(t)$

# Pendolo fisico

- Per le forze abbiamo le due equazioni

$$W_r + V_r = Ma_r^{(CM)} = -M\omega^2 r = -Mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$W_\theta + V_\theta = Ma_\theta^{(CM)} = M \frac{d\omega}{dt} r = Mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

che ci servono per trovare le componenti della reazione vincolare una volta nota  $\omega(t)$

$$V_r = -W_r - Mr\omega^2$$

$$V_\theta = -W_\theta + Mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

# Pendolo fisico

- Risolviamo ora l'equazione differenziale per  $\theta(t)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \sin \theta$$

- Per piccole oscillazioni possiamo confondere il seno con l'arco, ottenendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \theta = -\Omega^2 \theta$$

- Che è l'equazione del moto armonico con pulsazione  $\Omega$  e periodo

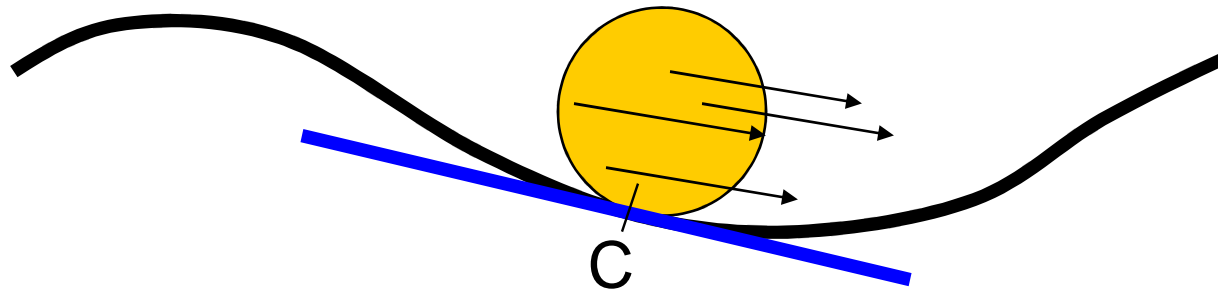
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{rW}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr}}$$

# Pendolo fisico

- La soluzione è  $\theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$
- Con  $A$  e  $\phi$  due costanti determinabili imponendo le condizioni iniziali

# Slittamento

- Immaginiamo un corpo cilindrico o sferico in moto rispetto alla superficie di appoggio



- Se le velocità di tutti i punti sono uguali e sono parallele al piano tangente localmente alla superficie, abbiamo un moto di traslazione e il corpo slitta sulla superficie

# Rotolamento

- In generale in corpo anche rotola sulla superficie
- Se il punto di contatto  $C$  tra corpo e superficie è fermo, istante per istante, si ha rotolamento puro
- Altrimenti avremo contemporaneamente slittamento e rotolamento

# Rotolamento puro

- Tra superficie e corpo esiste una forza di attrito che mantiene fermo il punto di contatto C, istante per istante
- Questa è la forza di attrito statico
- La velocità del punto C (o di qualsiasi altro punto) a distanza  $r$  dal CM è

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_C^* = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

# Rotolamento puro

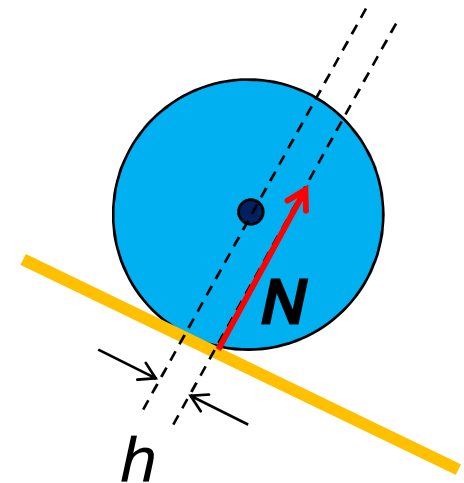
- La condizione di puro rotolamento è  $\vec{v}_C = 0$   
ovvero  $\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$
- In modulo la velocità del CM è  $v_{CM} = \omega r$
- E l'accelerazione  $a_{CM} = \alpha r$
- Cioè nel moto di puro rotolamento esiste una relazione precisa tra velocità del CM e velocità angolare

# Rotolamento puro

- A questo moto si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica
- Questo è possibile perché la forza d'attrito agisce sul punto di contatto, che è fermo, e quindi non compie lavoro
- Nuovamente questo è un caso limite: un corpo libero che rotola su un piano orizzontale, presto o tardi si arresta

# Attrito volvente

- Si attribuisce questo fenomeno ad una nuova forma di attrito, detto volvente, che è attivo tra il corpo e la superficie di appoggio
- È attribuito alla deformazione locale del corpo e della superficie
- Per una ruota in moto, la retta d'azione della componente normale  $N$  della reazione vincolare alla superficie d'appoggio non contiene il centro della ruota

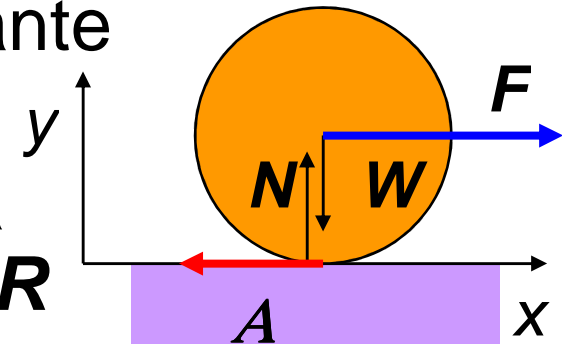


# Attrito volvente

- L'effetto è schematizzato con l'azione di un momento che si oppone al moto  $\tau_v = hN$  ( $h$  è il braccio di  $N$  ed è detto coefficiente di attrito volvente)
- L'effetto dell'attrito volvente è sempre molto minore di quello dell'attrito radente e statico, per cui è generalmente trascurabile
- Da qui deriva il grande vantaggio che si ottiene, in molti casi, di dotare i veicoli di ruote piuttosto che di pattini

# Moto di rotolamento (1)

- Consideriamo un corpo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotola su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza  $F$  costante applicata all'asse
- Su corpo agiscono anche la forza peso  $W$  e la reazione del vincolo  $R$
- Questa può pensarsi composta da una forza normale al vincolo  $N$  e una forza di attrito  $A$  parallela al vincolo
- $A$  deve opporsi al moto del punto di contatto verso  $+x$  e quindi dev'essere diretta verso  $-x$



# Moto di rotolamento (1)

- Dalla 1<sup>a</sup> equazione cardinale:

$$\vec{F} + \vec{A} + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

- che proiettata lungo  $x$  e  $y$  dà

$$F - A = ma_{CM} \qquad -W + N = 0$$

- dato che l'accelerazione è tutta lungo  $x$ ,  
mentre è nulla lungo  $y$
- La seconda equazione permette di trovare  $N$ :

$$N = W$$

- La prima equazione contiene l'incognita  $a_{CM}$  e  
la forza d'attrito  $A$

# Moto di rotolamento (1)

- Dalla 2<sup>a</sup> equazione cardinale:  $\tau_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt}$
- Scelto il CM come polo
$$rA = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha$$
- Questa equazione contiene l'incognita  $\alpha$  e la forza d'attrito  $A$
- Distinguiamo due casi:
  - Attrito statico:  $A = \Sigma \leq \Sigma^{\max} = \mu_s N$  il cui valore e' incognito a priori
  - Attrito dinamico:  $A = \Delta = \mu_d N$  il cui valore e' noto

# Moto di rotolamento puro (1)

- In totale abbiamo due equazioni e tre incognite (la 3<sup>a</sup> e`  $\Sigma$ ), ci serve un'altra equazione per determinare le incognite
- Nel caso di rotolamento puro una tale relazione esiste:  $a_{CM} = \alpha r$
- Risolvendo per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{Fr^2}{I + mr^2} \quad \alpha = \frac{Fr}{I + mr^2} \quad \Sigma = \frac{FI}{I + mr^2}$$

# Moto di rotolamento (1)

- Nel caso di slittamento abbiamo solo due equazioni, ma anche solo due incognite (ora  $A=\Delta$ )
- Risolvendo per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{F - \mu_d W}{m} \qquad \alpha = \frac{r\mu_d W}{I}$$

# Moto di rotolamento puro (1)

- Quand'è possibile il rotolamento puro?  
Occorre che la soluzione trovata per  $\Sigma$  sia minore del valore statico massimo

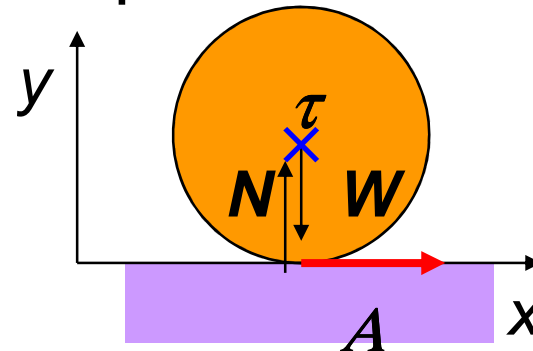
$$\Sigma = \frac{FI}{I + mr^2} \leq \mu_s N$$

- Questo impone un limite al valore di  $F$ :

$$F \leq \mu_s W \frac{I + mr^2}{I}$$

## Moto di rotolamento (2)

- Il corpo sia ora sotto l'azione di un momento costante  $\tau$  applicato all'asse (entrante nel foglio)
- Quanto detto prima per la reazione del vincolo  $\mathbf{R}$  continua a valere, eccetto che ora la forza d'attrito deve opporsi al moto del punto di contatto verso  $-x$  e quindi dev'essere rivolta verso  $+x$



# Moto di rotolamento (2)

- 1<sup>a</sup> equazione cardinale:

$$\vec{A} + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

- che proiettata lungo  $x$  e  $y$  dà

$$A = ma_{CM} \qquad -W + N = 0$$

- Di nuovo la seconda equazione permette di trovare  $N$ :  $N = W$
- La prima eq. stabilisce che quando un motore fa girare una ruota, è la forza d'attrito a spingere avanti la ruota

## Moto di rotolamento (2)

- 2<sup>a</sup> equazione cardinale:  $\tau_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt}$
- Scelto il CM come polo

$$\tau - rA = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha$$

- Distinguiamo, come prima, due casi.

# Moto di rotolamento puro (2)

- Nel caso di rotolamento puro abbiamo tre incognite e una terza relazione tra  $a_{CM}$  e  $\alpha$ .
- Possiamo risolvere per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{\tau r}{I + mr^2} \quad \alpha = \frac{\tau}{I + mr^2} \quad \Sigma = \frac{\tau m r}{I + mr^2}$$

## Moto di rotolamento (2)

- Nel caso di slittamento abbiamo due incognite e due equazioni
- Possiamo risolvere per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{\mu_s W}{m} \quad \alpha = \frac{\tau - r\mu_s W}{I}$$

# Moto di rotolamento puro (2)

- Quand'è possibile il rotolamento puro?  
Occorre che la soluzione trovata per  $\Sigma$  sia minore del valore statico massimo

$$\Sigma = \frac{\tau m r}{I + m r^2} \leq \mu_s N$$

- Questo impone un limite al valore di  $\tau$ .

$$\tau \leq \mu_s W \frac{I + m r^2}{m r}$$