

RESISTENZA dei MATERIALI

Non sempre il comportamento dei materiali è elastico, né tantomeno elastico lineare.

Evidentemente, ciò dipende dalla intensità dello stato tensionale applicato al materiale.

In altri termini, oltre una certa soglia dello stato tensionale, il materiale non si comporta più elasticamente; oltre una soglia ancora maggiore il comportamento non sarà più elastico lineare, ecc.



RESISTENZA dei MATERIALI

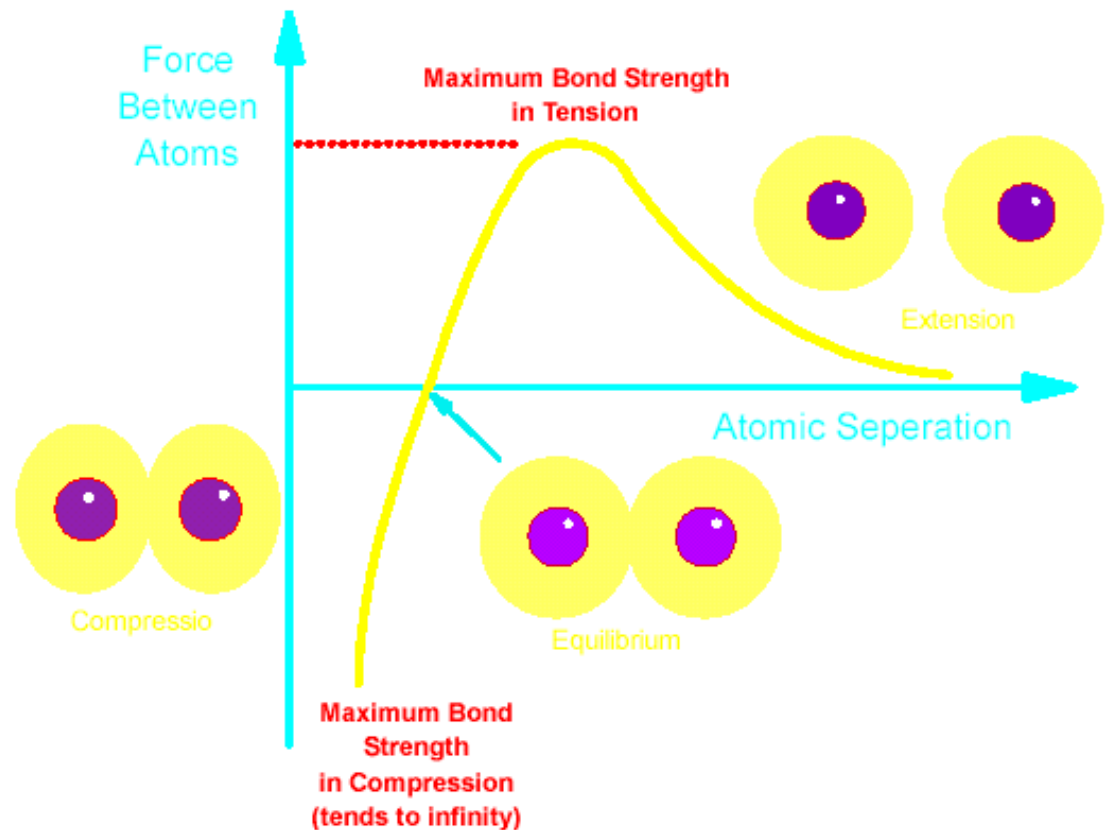
Scopo di questa sezione è quello di caratterizzare sperimentalmente il comportamento **INelastico** dei materiali e di definire le condizioni analitiche (criteri di resistenza o di plasticizzazione) che stabiliscono (convenzionalmente) la transizione tra il comportamento elastico e quello inelastico.

In tal modo è possibile **stimare la resistenza dei materiali e delle strutture da essi costituite.**



RESISTENZA dei MATERIALI

E' possibile
calcolare la
resistenza
TEORICA di un
materiale da
quella (nota)
dei legami
atomici



RESISTENZA dei MATERIALI

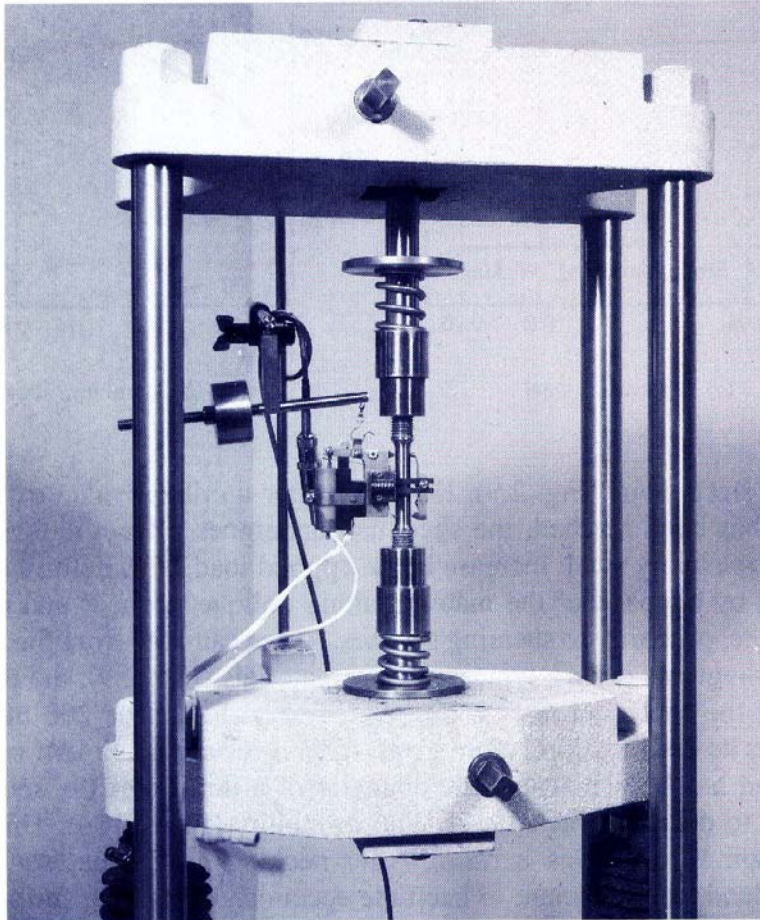
I materiali reali non raggiungono mai la resistenza teorica. Ciò è dovuto a difetti presenti nei materiali sostanzialmente di duplice natura:

- fratture micro- e macroscopiche nel solido
- imperfezioni nella struttura atomica.

Ne consegue che la resistenza EFFETTIVA di un materiale deve essere valutata sperimentalmente.



RESISTENZA dei MATERIALI



Prova di trazione
(monoassiale)

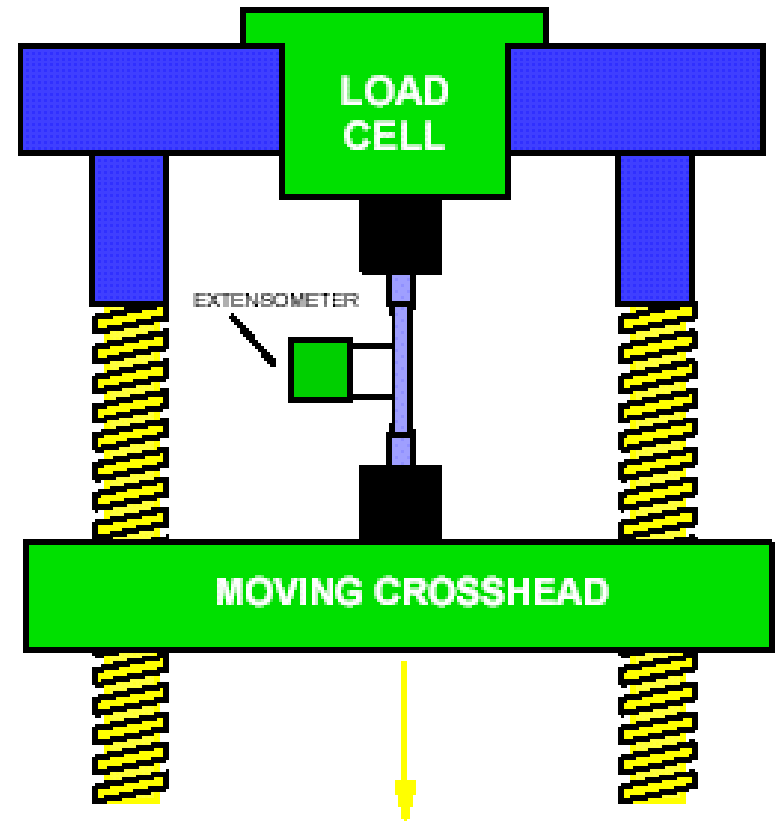
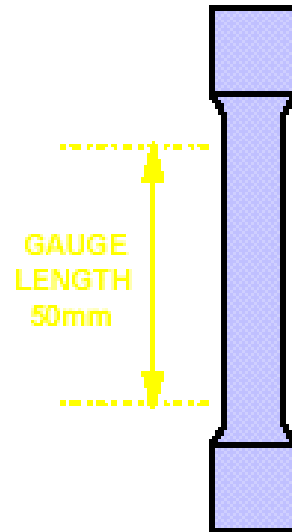
Macchina di
prova

Fig. 2.7 This machine is used to test tensile test specimens, such as those shown in this chapter.



RESISTENZA dei MATERIALI

Disegno
schematico
del
dispositivo
di prova



RESISTENZA dei MATERIALI

Provino iniziale

Provino a rottura

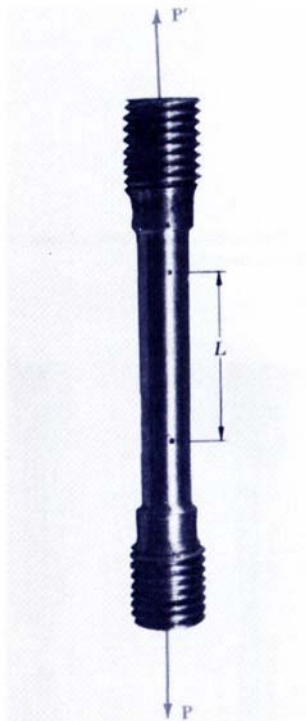
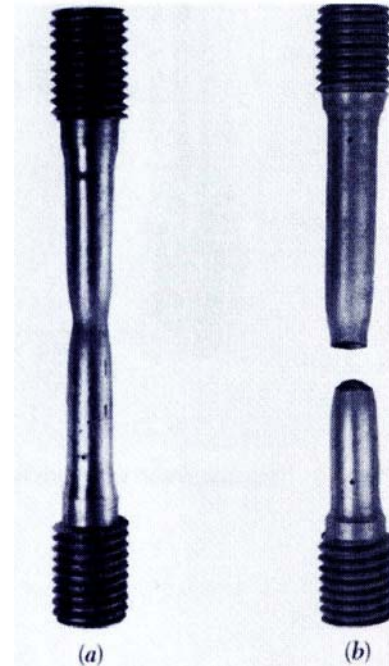
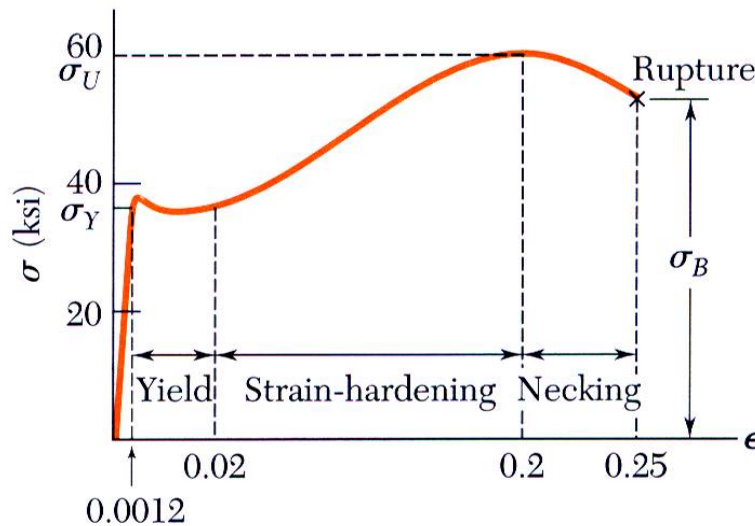


Fig. 2.8 Test specimen with tensile load.

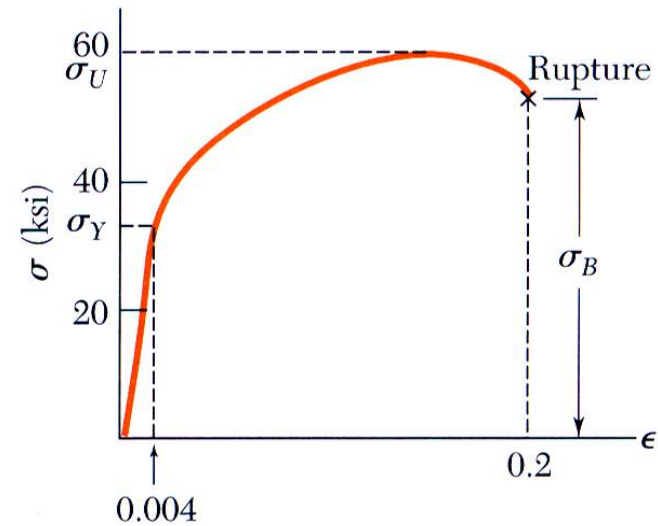


RESISTENZA dei MATERIALI

Legami σ - ϵ – Materiale duttile



(a) Low-carbon steel



(b) Aluminum alloy



RESISTENZA dei MATERIALI

Legami σ – ϵ – Materiale fragile

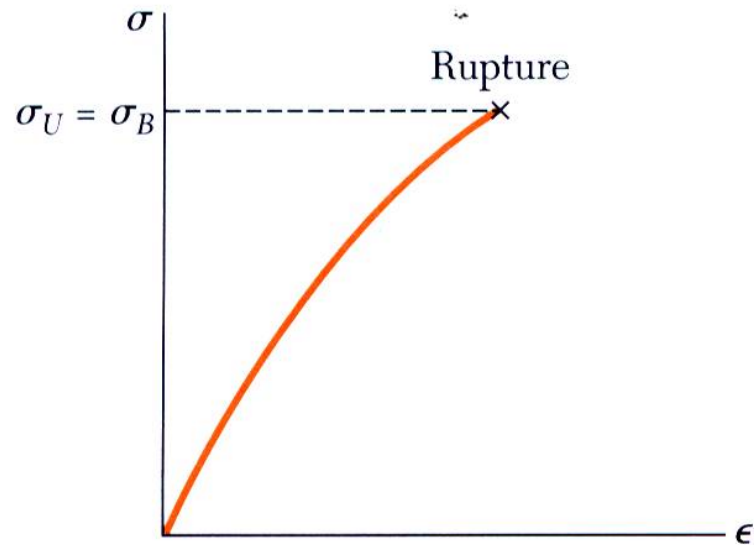
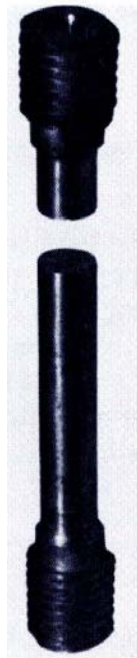


Fig. 2.11 Stress-strain diagram for a typical brittle material.



RESISTENZA dei MATERIALI

Come si nota dal disegno a lato, il comportamento degli acciai tende a diventare sempre più fragile all'aumentare del contenuto di carbonio.

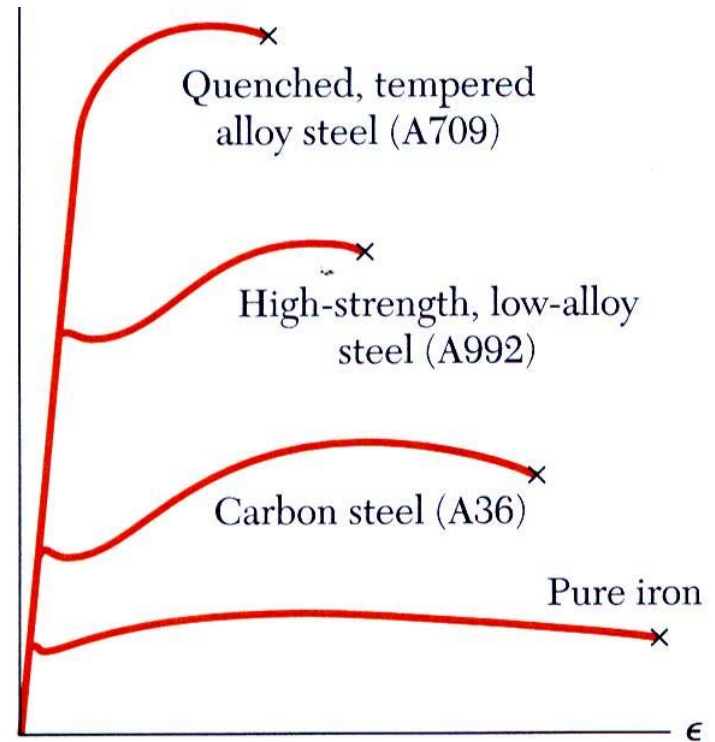


Fig. 2.16 Stress-strain diagrams for iron and different grades of steel.

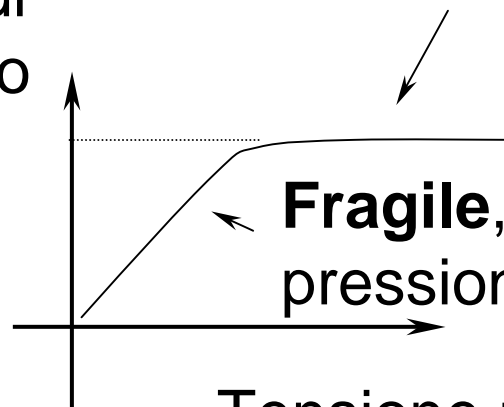


RESISTENZA dei MATERIALI

Ulteriore caratterizzazione dei materiali duttili e fragili

Yield strength
o tensione di
snervamento

σ_y



Duttile,
indipendente dalla
pressione

Fragile, dipendente dalla
pressione

Tensione normale
media (pressione)



RESISTENZA dei MATERIALI

Il termine “fragile” viene anche usato per caratterizzare quei materiali la cui rottura avviene per bassi valori delle deformazioni.

Cosa produce la dipendenza dalla tensione media dei materiali fragili?

La variazione di volume (dilatanza o compattamento) associata alle deformazioni tipiche di tali materiali.



RESISTENZA dei MATERIALI

La **dilatanza** indica un aumento di volume indotto dalle caratteristiche taglienti dello stato tensionale.

Questo termine è stato introdotto per descrivere la deformazione dei materiali granulari ma la dilatanza può anche verificarsi in materiali solidi (fragili) attraverso la propagazione di fratture (cracks).



RESISTENZA dei MATERIALI

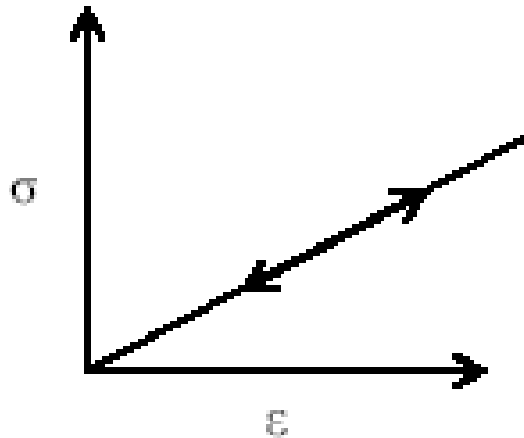
Al contrario le deformazioni dei materiali duttili hanno luogo senza cambiamenti di volume a livello macroscopico per effetto dell'azione delle **dislocazioni**.

Tali dislocazioni, e cioè spostamenti relativi tra i reticoli cristallini, ed il loro movimento all'interno del materiale consentono l'insorgere delle deformazioni senza aumenti di volume.

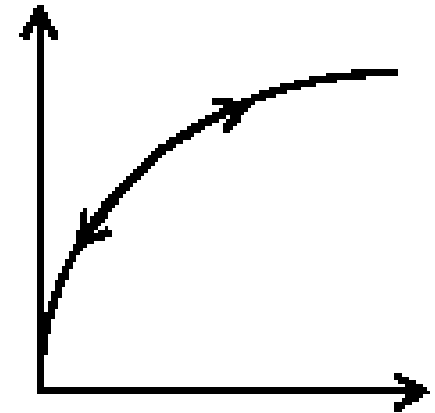


RESISTENZA dei MATERIALI

Alcune frequenti schematizzazioni di legami σ - ε



Linear elastic (follows Hooke's Law)

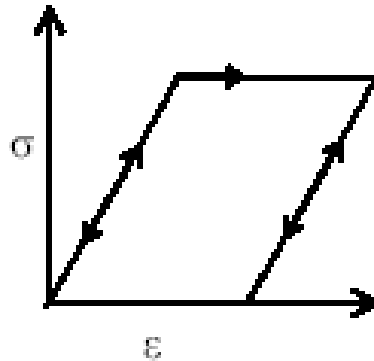


Non-linear Elastic

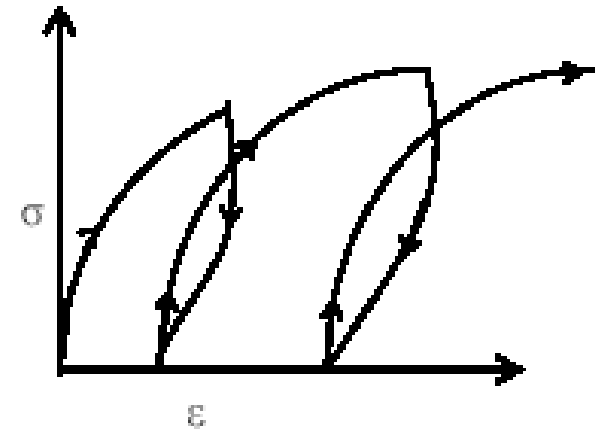


RESISTENZA dei MATERIALI

Alcune frequenti schematizzazioni di legami σ - ε



Elastic Perfectly Plastic



Cyclic Hardening Plasticity
(Non-linear Elastoplastic)



RESISTENZA dei MATERIALI

Si è definito **elastico** il comportamento di un materiale per il quale lo stato di deformazione scompare se si rimuove lo stato tensionale.

Il valore massimo della tensione per il quale si verifica tale comportamento viene detto **tensione di snervamento** o **limite elastico**.



RESISTENZA dei MATERIALI

Le tensioni comprese tra A e B in figura definiscono un **comportamento elastico**

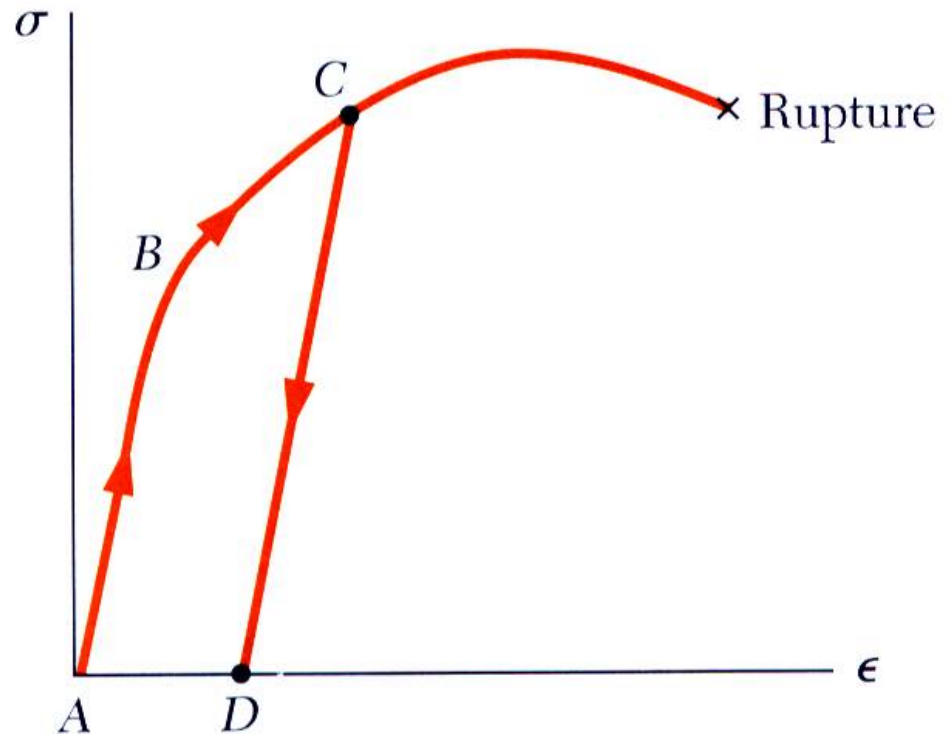


Fig. 2.18



RESISTENZA dei MATERIALI

Si definisce **plastico** il comportamento di un materiale per il quale lo stato di deformazione NON si annulla se si rimuove lo stato tensionale.

Con riferimento alla figura precedente ciò si verifica per il percorso di carico che porta la tensione dal valore nullo a quello corrispondente al punto C. Il corrispondente percorso deformativo è quello A-B-C-D (quindi con una deformazione permanente).



RESISTENZA dei MATERIALI

Come fare per definire, in un punto arbitrario della struttura, la transizione tra comportamento elastico e plastico del materiale che la costituisce?...

... mediante i CRITERI di PLASTICIZZAZIONE
ossia funzioni, la cui espressione deve essere opportunamente definita, dello stato tensionale

$$\sigma_{eq} = F(\mathbf{T}) = F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$$



RESISTENZA dei MATERIALI

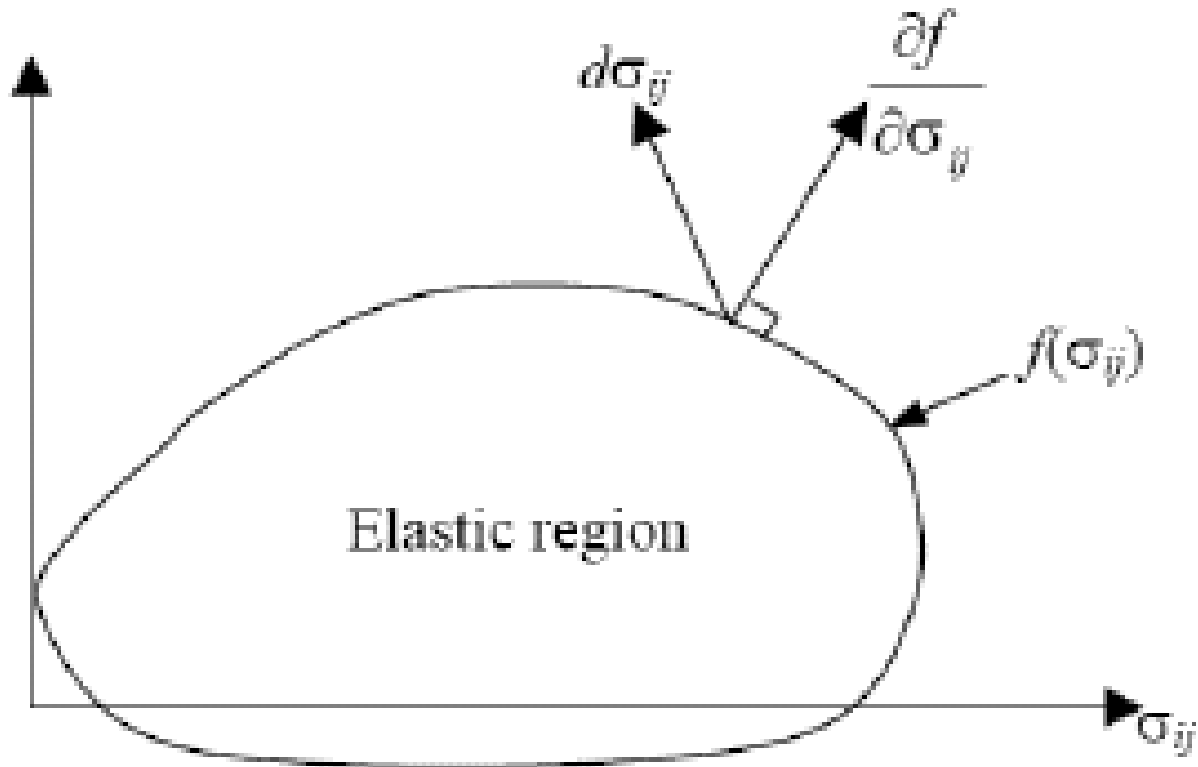
Tale funzione F , detta di plasticizzazione, definisce una superficie nello spazio delle tensioni che lo divide in due regioni complementari.

La regione interna è quella che definisce gli stati tensionali cui si associano deformazioni elastiche (e cioè reversibili).

La regione esterna è quella cui si associano deformazioni plastiche (irreversibili)



RESISTENZA dei MATERIALI



RESISTENZA dei MATERIALI

Come si vede, tale funzione “condensa” lo stato tensionale effettivo in punto, dipendente da sei costanti, in un’unica espressione scalare (σ_{eq}), il cui valore può essere determinato in prove **monoassiali** di tipo sperimentale.

Una prima significativa semplificazione si ottiene ipotizzando che il comportamento del materiale, prima e dopo la plasticizzazione, sia **ISOTROPO**.



RESISTENZA dei MATERIALI

Ciò consente di dimostrare che l'espressione della funzione F può essere semplificata in altre dipendenti da TRE soli parametri e cioè dai soli autovalori del tensore delle tensioni (tensioni principali) o, equivalentemente dai relativi invarianti.

$$\sigma_{eq} = F_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F_2(I_T, II_T, III_T)$$

Ricordiamo comunque che anche le tensioni principali sono invarianti e cioè indipendenti dal sistema di riferimento.



RESISTENZA dei MATERIALI

Ricordiamo che:

$$I_{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{ii} = \text{tr } \mathbf{T} = p$$

$$II_{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr } (\mathbf{T}^2) \right]$$

$$III_{\mathbf{T}} = \det \mathbf{T}$$

Tali invarianti sono detti **PRINCIPALI** per ricordare che essi sono quelli che compaiono nella....



RESISTENZA dei MATERIALI

... equazione secolare che consente di valutare le tensioni principali

$$\lambda^3 - I_{\mathbf{T}}\lambda^2 + II_{\mathbf{T}}\lambda - III_{\mathbf{T}} = 0$$

Tuttavia, tali invarianti non sono gli unici che si possono introdurre, in quanto si può sfruttare il teorema di Cayley-Hamilton:

$$\mathbf{T}^3 - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^2 + II_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - III_{\mathbf{T}}\mathbf{1} = 0$$



RESISTENZA dei MATERIALI

per introdurre i cosiddetti

INVARIANTI FONDAMENTALI

$$J_{1\mathbf{T}} = J_1 = \text{tr } \mathbf{T}$$

$$J_{2\mathbf{T}} = J_2 = \frac{1}{2} \text{tr } (\mathbf{T}^2)$$

$$J_{3\mathbf{T}} = J_3 = \frac{1}{3} \text{tr } (\mathbf{T}^3)$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Gli invarianti fondamentali sono legati agli invarianti principali dalle relazioni:

$$J_{1T} = I_T$$

$$J_{2T} = \frac{1}{2} \left[I_T^2 - 2II_T \right]$$

$$J_{3T} = \frac{1}{3} \left[I_T^3 - 3I_T II_T + 3III_T \right]$$



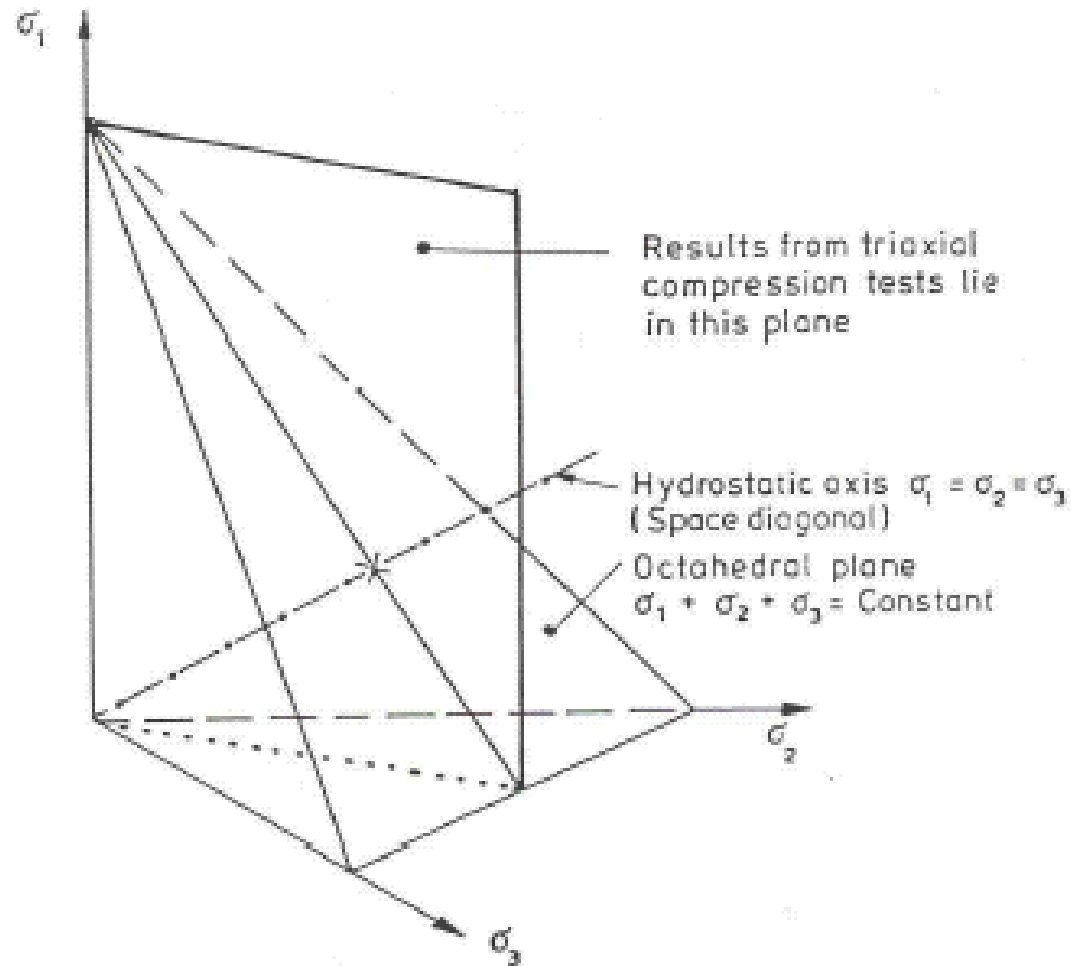
RESISTENZA dei MATERIALI

La possibilità, tipica dei materiali isotropi, di esprimere la funzione di plasticizzazione in funzione delle sole tensioni principali consente di rappresentarla in uno spazio tridimensionale.

Tale rappresentazione è utilissima per comprendere il significato fisico delle diverse espressioni sin qui introdotte nella letteratura.



RESISTENZA dei MATERIALI



RESISTENZA dei MATERIALI

Il piano ottaedrale passante per l'origine viene detto **piano deviatorico** in quanto caratterizzato dall'aver traccia nulla.

Evidentemente tale denominazione deriva dal fatto che esso contiene tutti gli stati tensionali deviatorici, caratterizzati per l'appunto dall'aver traccia nulla.



RESISTENZA dei MATERIALI

Viceversa l'asse idrostatico (o sferico) è rappresentativo degli stati tensionali sferici.

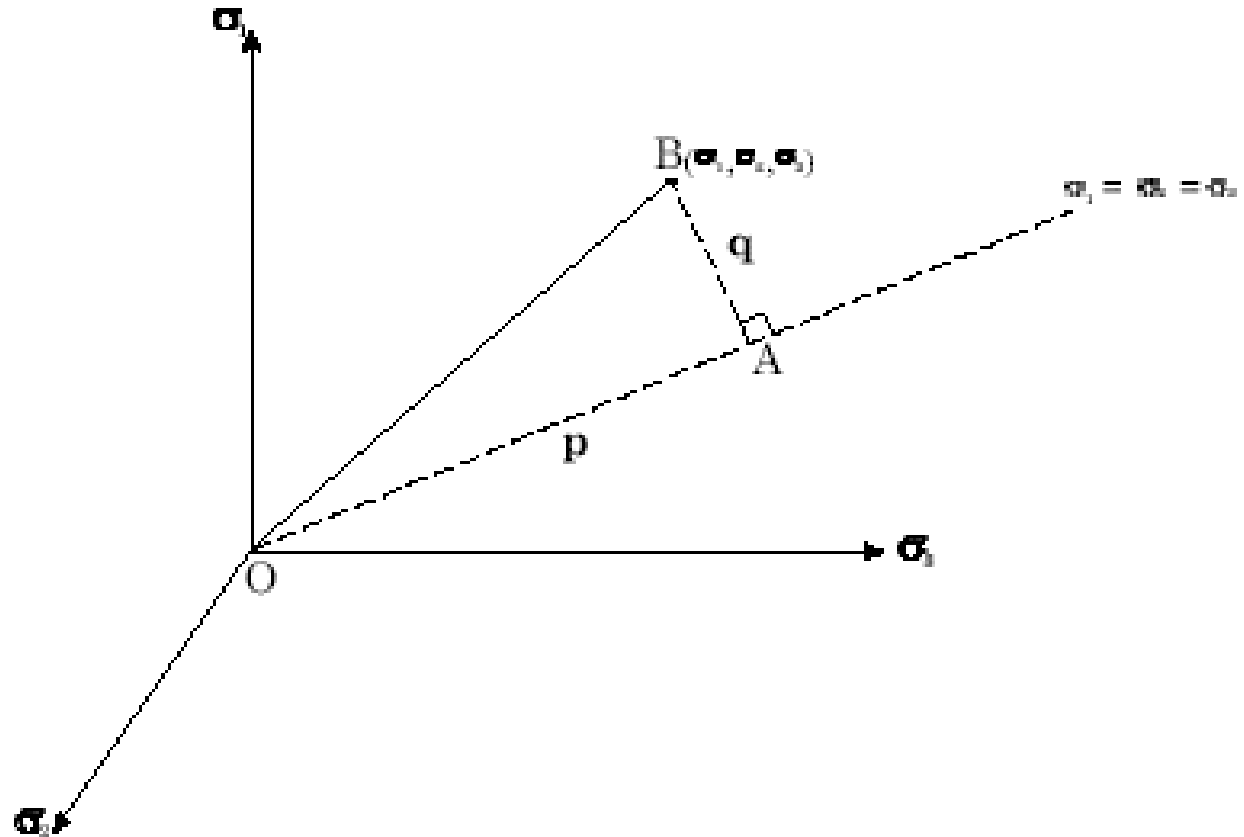
L'ortogonalità tra asse sferico e piano deviatorico traduce graficamente la proprietà analitica in base alla quale

$$\mathbf{T} = \text{sph } \mathbf{T} + \text{dev } \mathbf{T}$$

$$\text{sph } \mathbf{T} \cdot \text{dev } \mathbf{T} = 0$$



RESISTENZA dei MATERIALI



RESISTENZA dei MATERIALI

Tale decomposizione è fondamentale dal punto di vista applicativo poiché consente di visualizzare immediatamente le proprietà di cui devono godere le funzioni di plasticizzazione quando esse devono essere definite per materiali duttili o fragili.

Il problema che dobbiamo ora risolvere è:

Come si definisce la funzione di plasticizzazione F ?



RESISTENZA dei MATERIALI

I primi esperimenti di plasticità furono eseguiti sui metalli e hanno mostrato che la plasticizzazione è sostanzialmente indipendente dalla tensione media (o pressione) cioè dalla parte sferica dello stato tensionale.

Come detto questa proprietà è quella che caratterizza **i materiali duttili.**



RESISTENZA dei MATERIALI

Ne consegue che la superficie di plasticizzazione, dovendo essere indipendente dalla pressione e cioè definire stati tensionali elastici qualunque sia il suo valore, dovrà essere una superficie cilindrica avente per asse l'asse idrostatico.

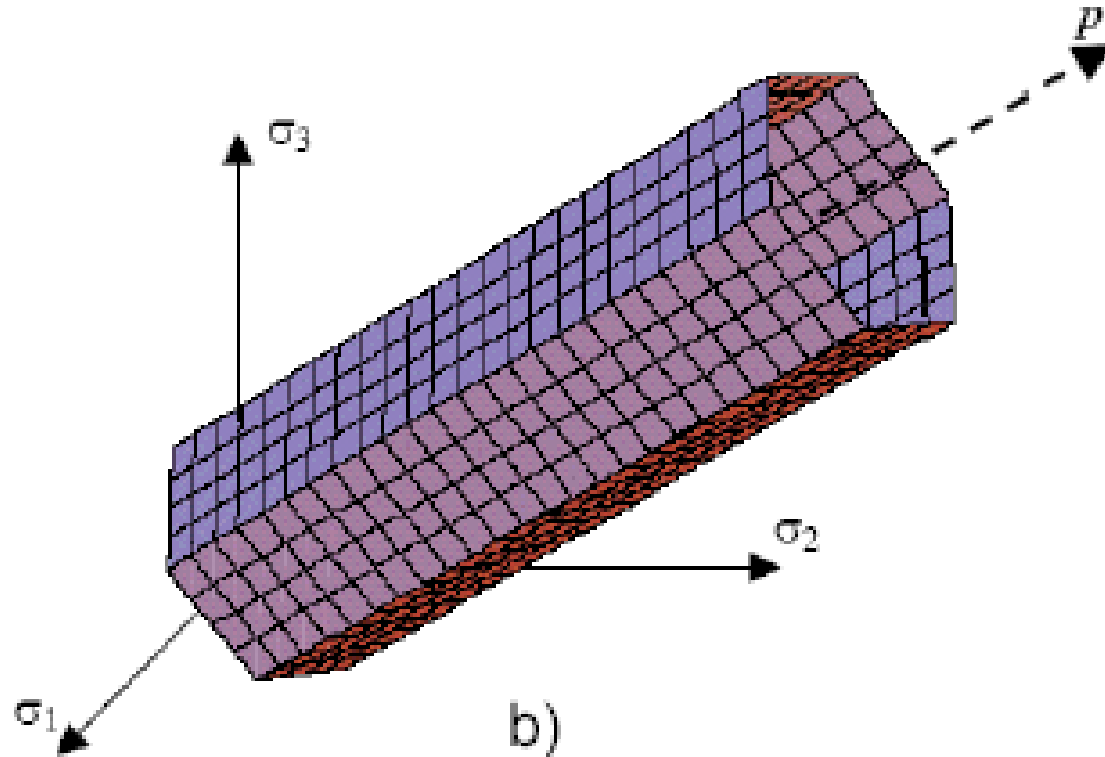
Se ne mostrano nel seguito due esempi corrispondenti ai criteri più usati per i metalli

- Tresca (1864)
- von Mises (1913)



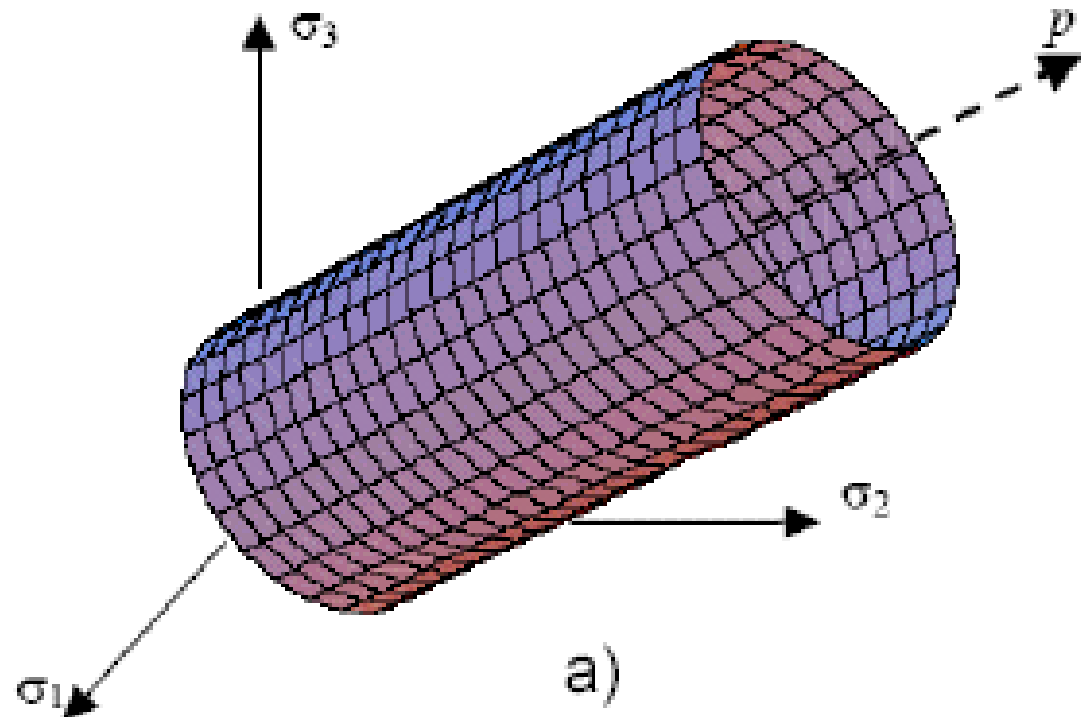
RESISTENZA dei MATERIALI

Tresca



RESISTENZA dei MATERIALI

von Mises



RESISTENZA dei MATERIALI

Altre frequenti rappresentazioni dei criteri suddetti sono quelle corrispondenti alla vista lungo l'asse idrostatico, e cioè ortogonalmente al piano deviatorico, oppure quelle corrispondenti ad uno stato piano di tensione

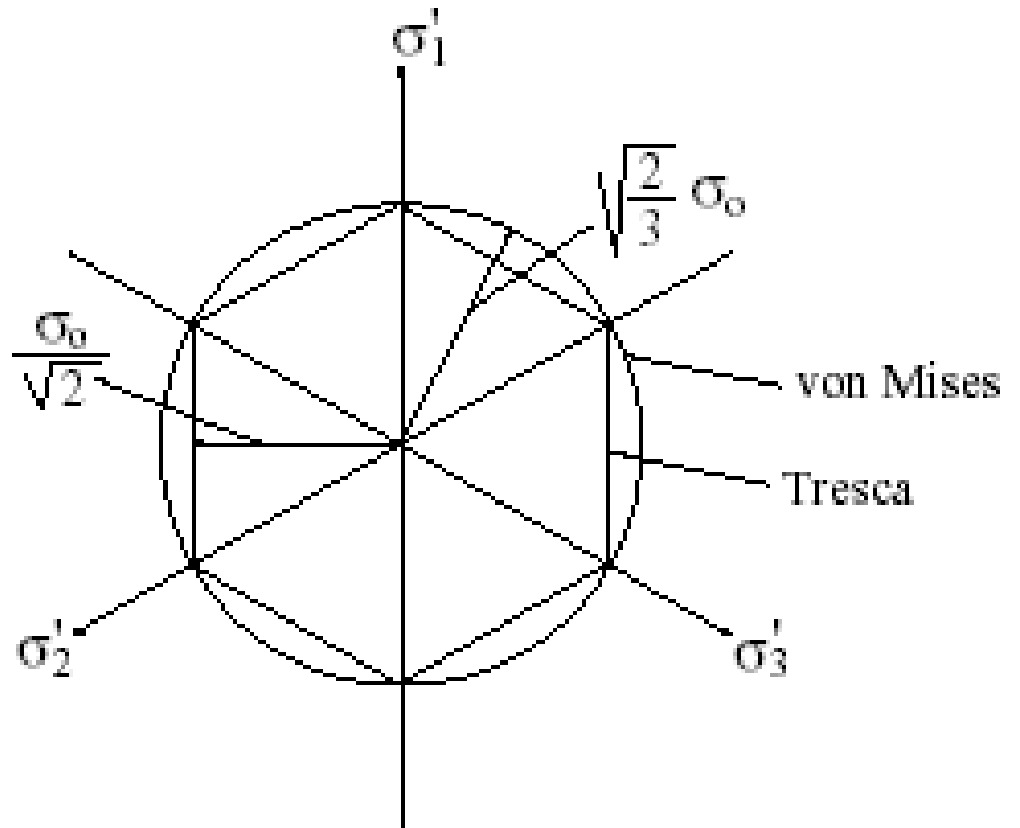


RESISTENZA dei MATERIALI

Vista
ortogonale
al piano
deviatorico.

N.B.

$$\sigma_0 = \sigma_y$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Viceversa la superficie di plasticizzazione dei materiali fragili dipende dalla pressione e quindi essa viene rappresentata nello spazio delle tensioni principali attraverso coni.

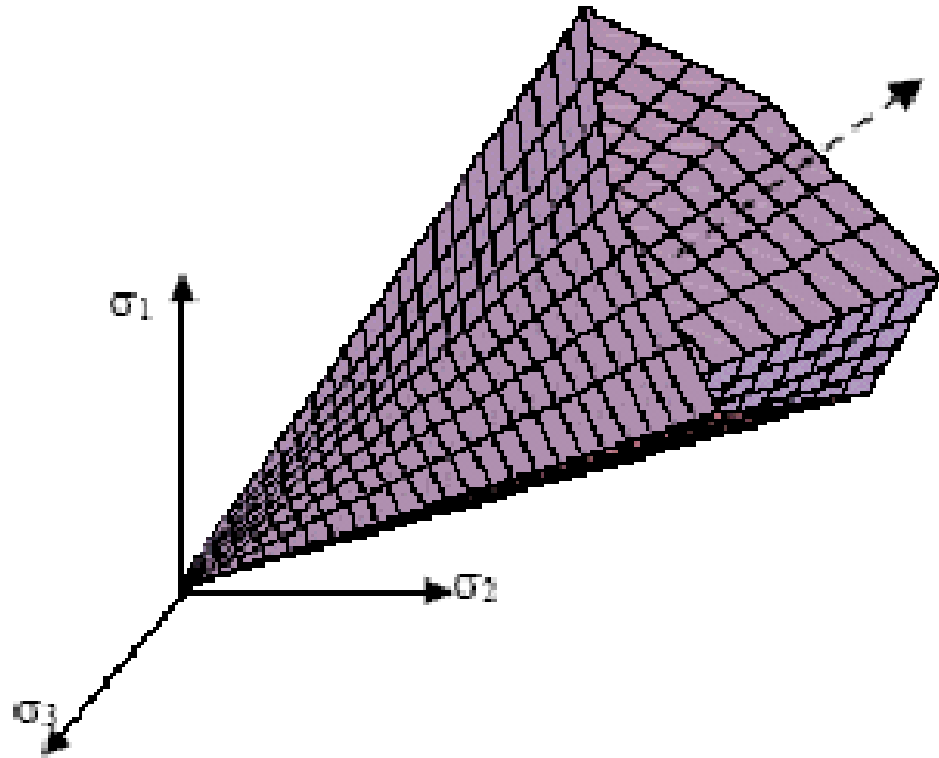
Se ne mostrano nel seguito due esempi corrispondenti ai criteri più usati

- Mohr-Coulomb
- Drucker-Prager



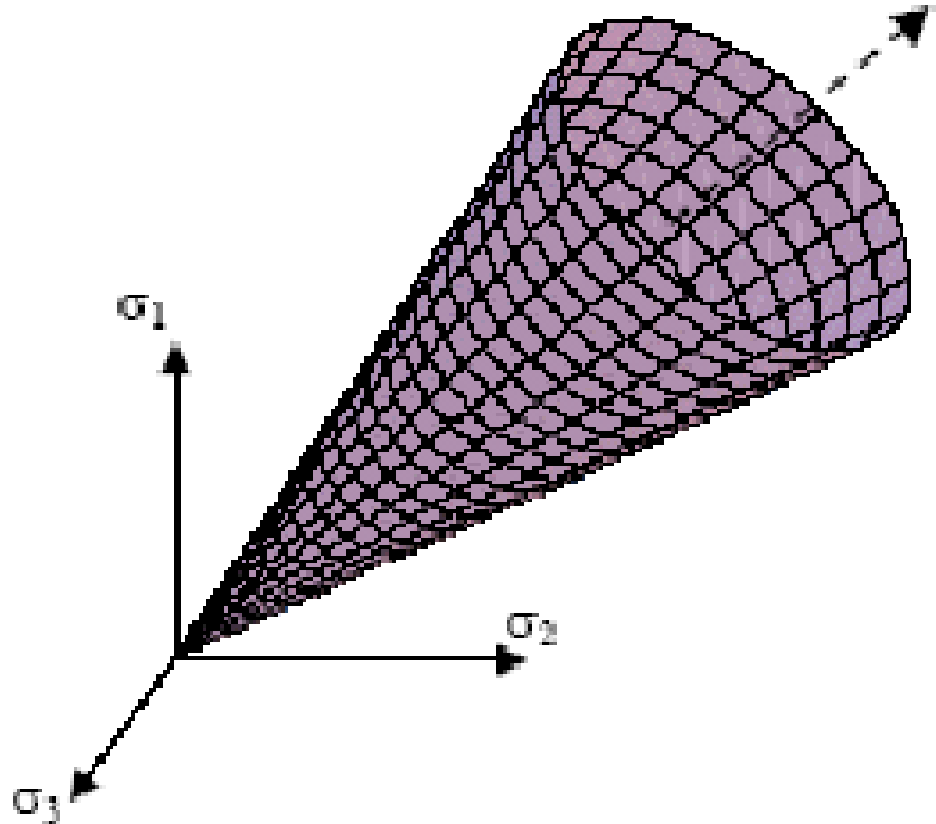
RESISTENZA dei MATERIALI

Mohr-
Coulomb
(coesione
nulla)



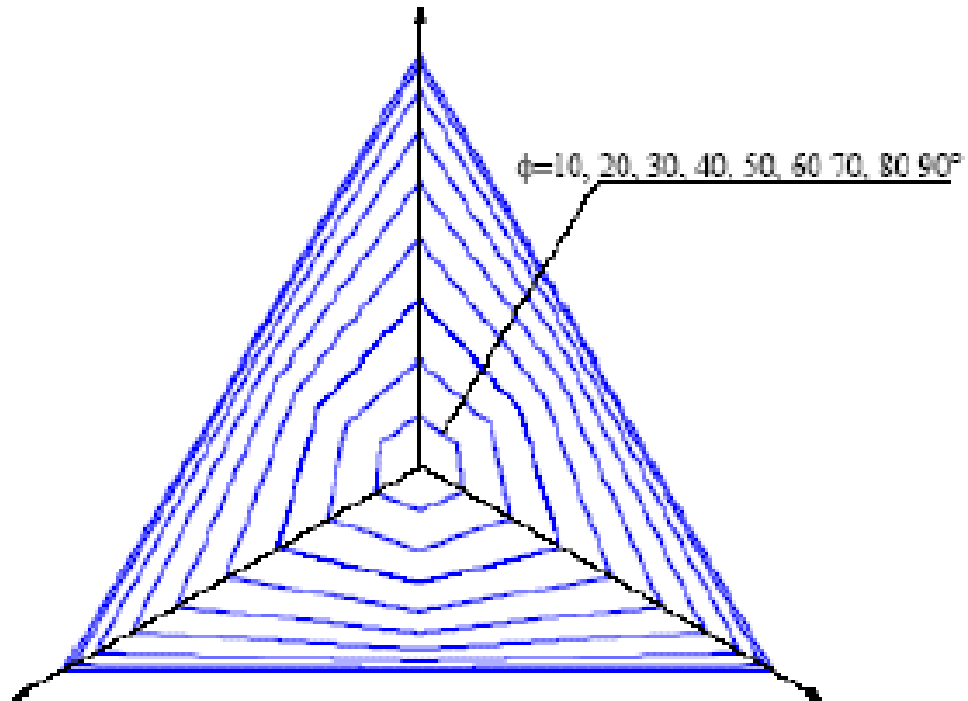
RESISTENZA dei MATERIALI

Drucker-
Prager
(coesione
nulla)



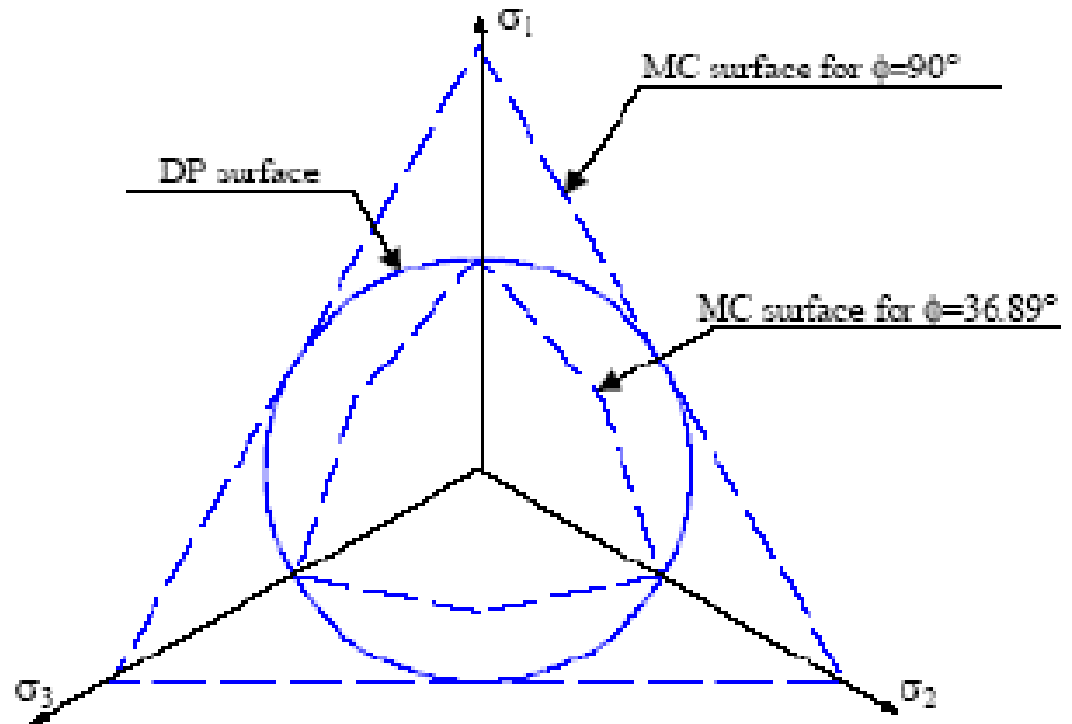
RESISTENZA dei MATERIALI

Vista
ortogonale
al piano
deviatorico



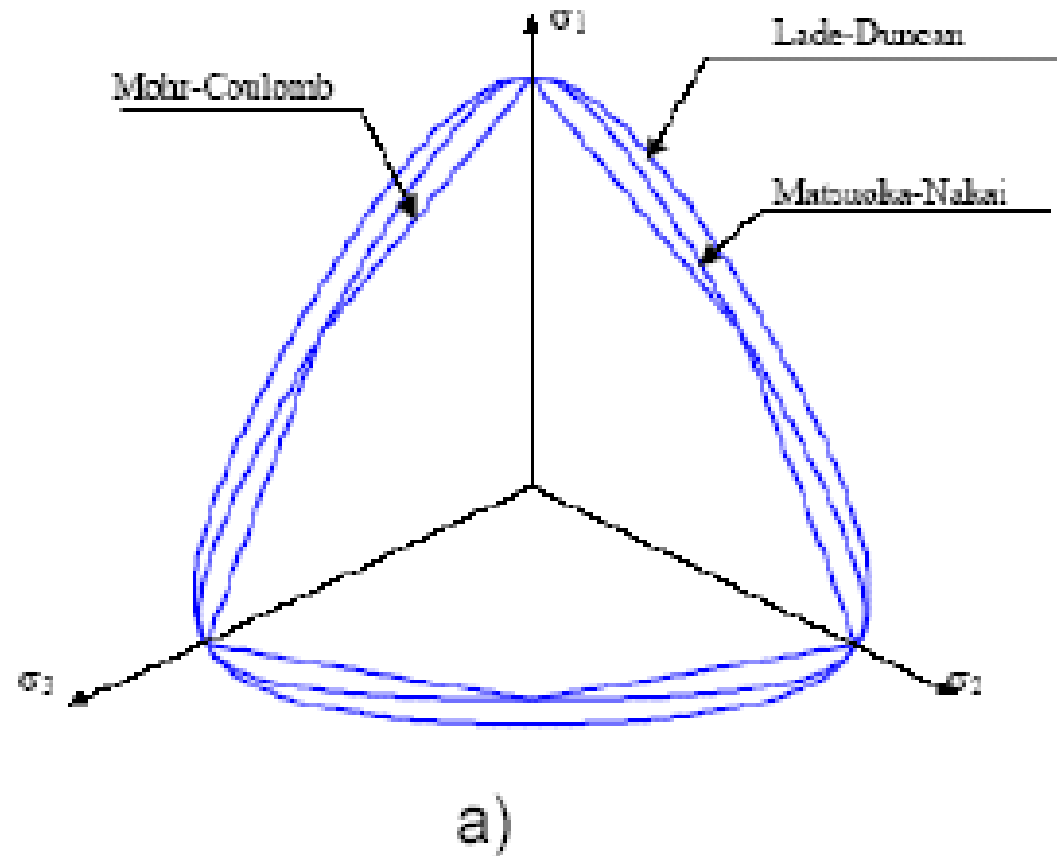
RESISTENZA dei MATERIALI

Vista
ortogonale
al piano
deviatorico.



RESISTENZA dei MATERIALI

Criteri più sofisticati.



RESISTENZA dei MATERIALI

Prima di descrivere le espressioni delle funzioni F per i diversi criteri è opportuno precisare che, in considerazione del ruolo giocato dalla parte sferica del tensore delle tensioni e da quella deviatorica, vengono comunemente introdotti in letteratura ulteriori invarianti la cui definizione può variare per effetto di coefficienti moltiplicativi.



RESISTENZA dei MATERIALI

Due di questi , che sostituiscono il secondo ed il terzo invariante (sia esso principale che fondamentale) sono il secondo ed il terzo invariante del DEVIATORE delle TENSIONI

$$J_{2D} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[(\text{dev } \mathbf{T})^2 \right] = \frac{1}{2} \text{dev } \mathbf{T} \cdot \text{dev } \mathbf{T}$$

$$J_{3D} = \frac{1}{3} \text{tr} \left[(\text{dev } \mathbf{T})^3 \right] = \frac{1}{3} (\text{dev } \mathbf{T})^2 \cdot \text{dev } \mathbf{T}$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Risulta:

$$J_{2D} = J_{2T} - \frac{J_{1T}^2}{6}$$

$$J_{3D} = J_{3T} - \frac{2}{3} J_{1T} J_{2T} + \frac{2}{27} J_{1T}^3$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Particolarmente utili sono le espressioni del secondo invariante del deviatore delle tensioni in funzione delle componenti del tensore delle tensioni o delle tensioni principali.

$$J_{2D} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Un'altra grandezza spesso utilizzata nelle applicazioni è la tensione tangenziale ottaedrale:

$$\tau_{\text{ott}}^2 = \frac{1}{9} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{2}{3} \left[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right]$$

Risulta:

$$J_{2D} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ott}}^2 = \frac{q^2}{3}$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Riassumendo i più noti criteri di plasticizzazione sono:

MATERIALI DUTTILI

- Tresca
- von Mises

MATERIALI FRAGILI

- Mohr-Coulomb
- Drucker-Prager



RESISTENZA dei MATERIALI

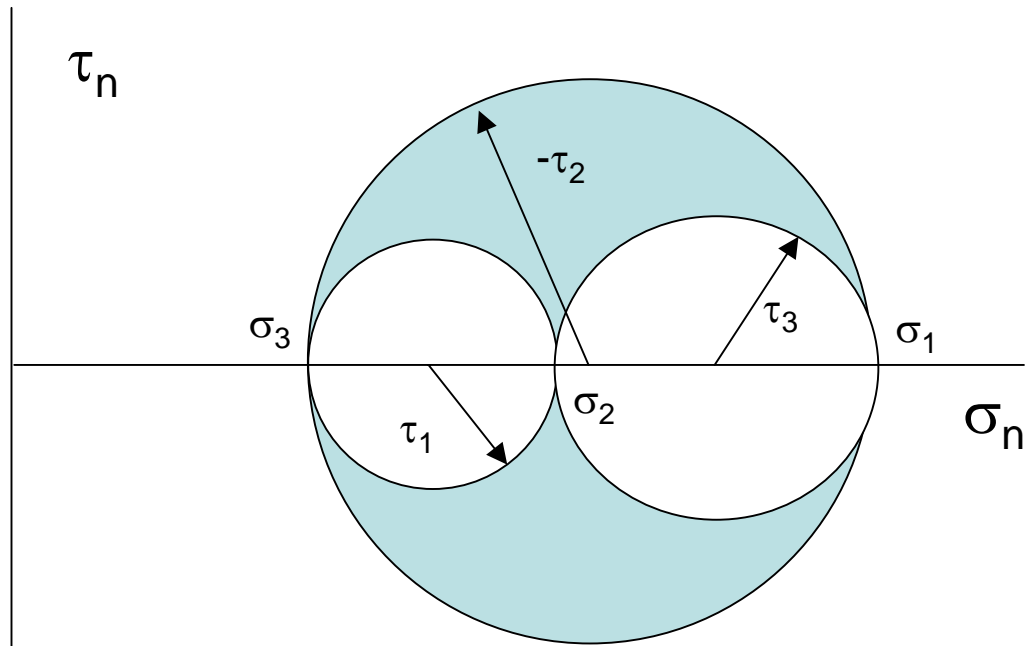
Criterio di Tresca (o della massima tensione tangenziale)

Il criterio stabilisce che la crisi (plasticizzazione) del materiale ha inizio quando la massima tensione tangenziale diventa uguale a quella che si attinge per lo stesso materiale nello stato monoassiale di una prova sperimentale.



RESISTENZA dei MATERIALI

Ricordando



RESISTENZA dei MATERIALI

risulta:

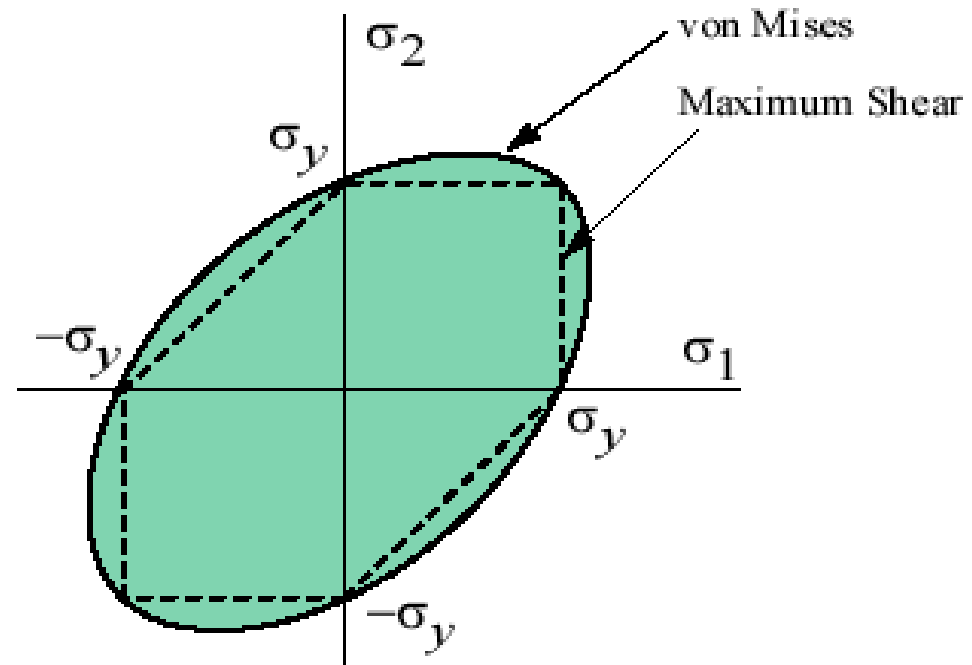
$$\tau_{\max} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \\ \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \\ \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \tau_{\max} \leq \tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$$

N.B.: sostituendo il segno di \leq con il segno di $=$ si ottiene l'espressione della superficie limite



RESISTENZA dei MATERIALI

Nel caso
piano ($\sigma_3=0$)
il sistema di
disugua-
glianze
precedenti
si
rappresenta
come già
mostrato



RESISTENZA dei MATERIALI

Criterio di Mises (o della massima tensione tangenziale)

Viene presentato in diversi modi:

- criterio della massima energia distortante
- criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale
- della massima media quadratica delle tensioni tangenziali



RESISTENZA dei MATERIALI

In realtà tutte queste definizioni sono accomunate dal fatto che esse dipendono da opportune misure, tra loro proporzionali, del secondo invariante del deviatore delle tensioni.

Il modo più semplice di presentare tale criterio è quello di interpretarlo come una estensione del criterio di Tresca.

Invece di assumere come parametro di crisi la...



RESISTENZA dei MATERIALI

...tensione tangenziale massima sembra più ragionevole considerare una media delle tensioni tangenziali massime, e cioè quelle relative alle direzioni principali.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right]}$$

$$\text{con } \tau_{\max} \leq \tau_y = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{6}}$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Dunque l'equazione della superficie $F=0$ secondo Mises è:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$$

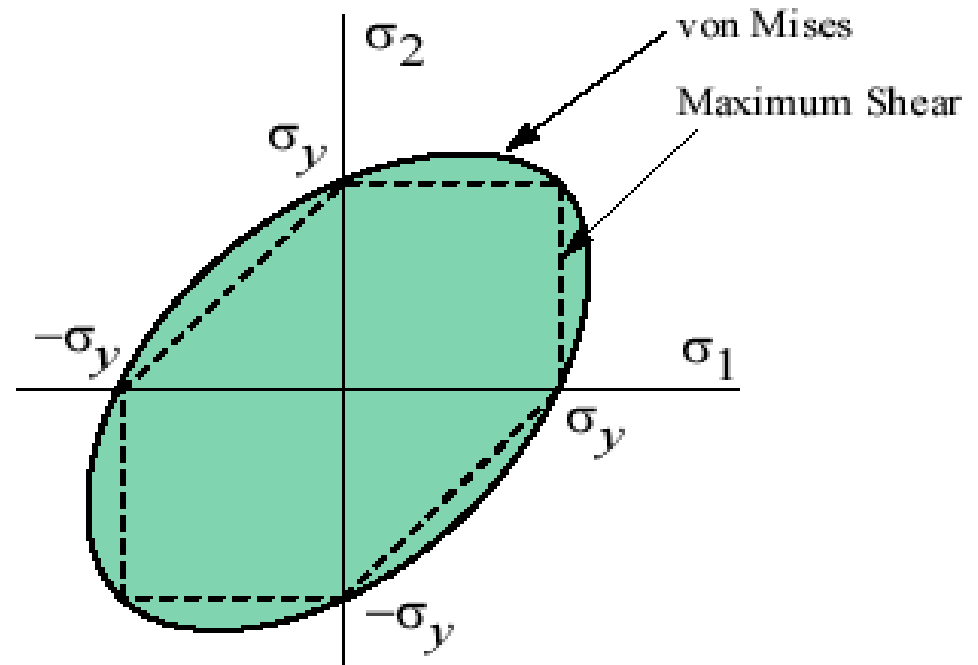
e, in uno stato piano di tensione:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2$$



RESISTENZA dei MATERIALI

che
fornisce la
rappresen-
tazione
illustrata in
precedenza



RESISTENZA dei MATERIALI

Ricordando l'espressione

$$J_{2D} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

che, in termini di tensioni principali, diventa

$$J_{2D} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$



RESISTENZA dei MATERIALI

si ha:

$$2J_{2D} = \frac{2}{3}\sigma_y^2 \Leftrightarrow |\text{dev } \mathbf{T}| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$$

relazione che si può esprimere in funzione della tensione tangenziale ottaedrale ricordando:

$$J_{2D} = \frac{3}{2}\tau_{\text{ott}}^2 = \frac{q^2}{3}$$

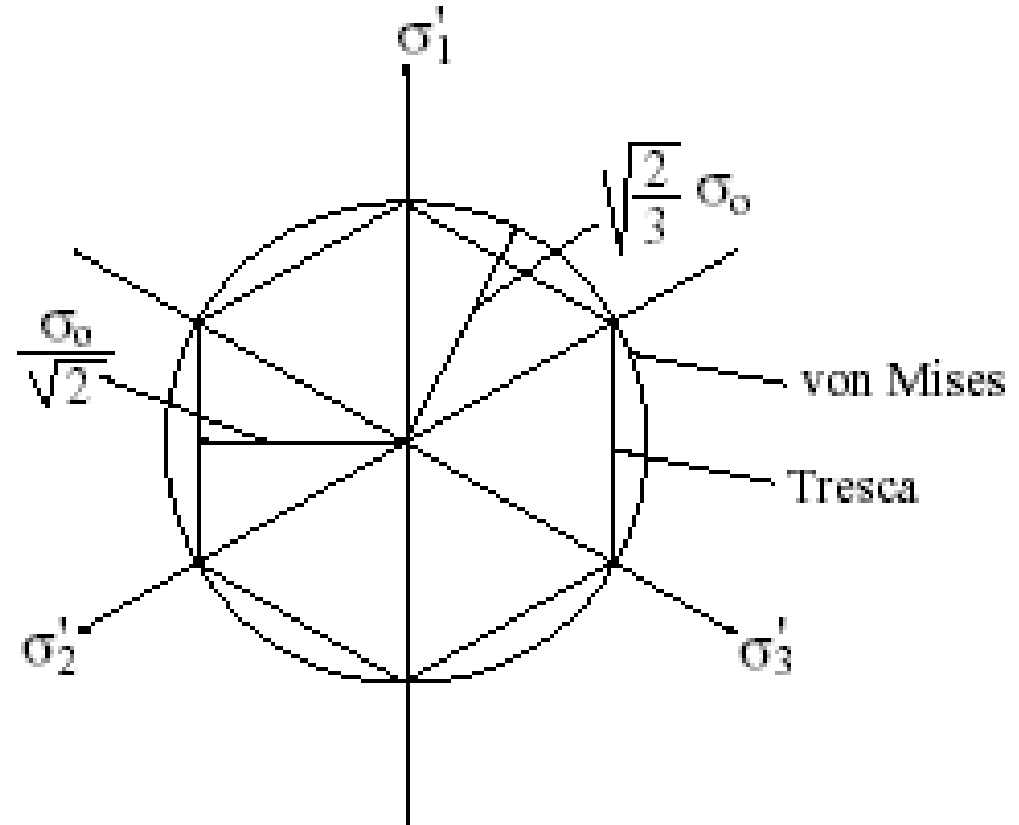


RESISTENZA dei MATERIALI

La
relazione

$$|\text{dev } \mathbf{T}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y$$

è illustrata
a lato



RESISTENZA dei MATERIALI

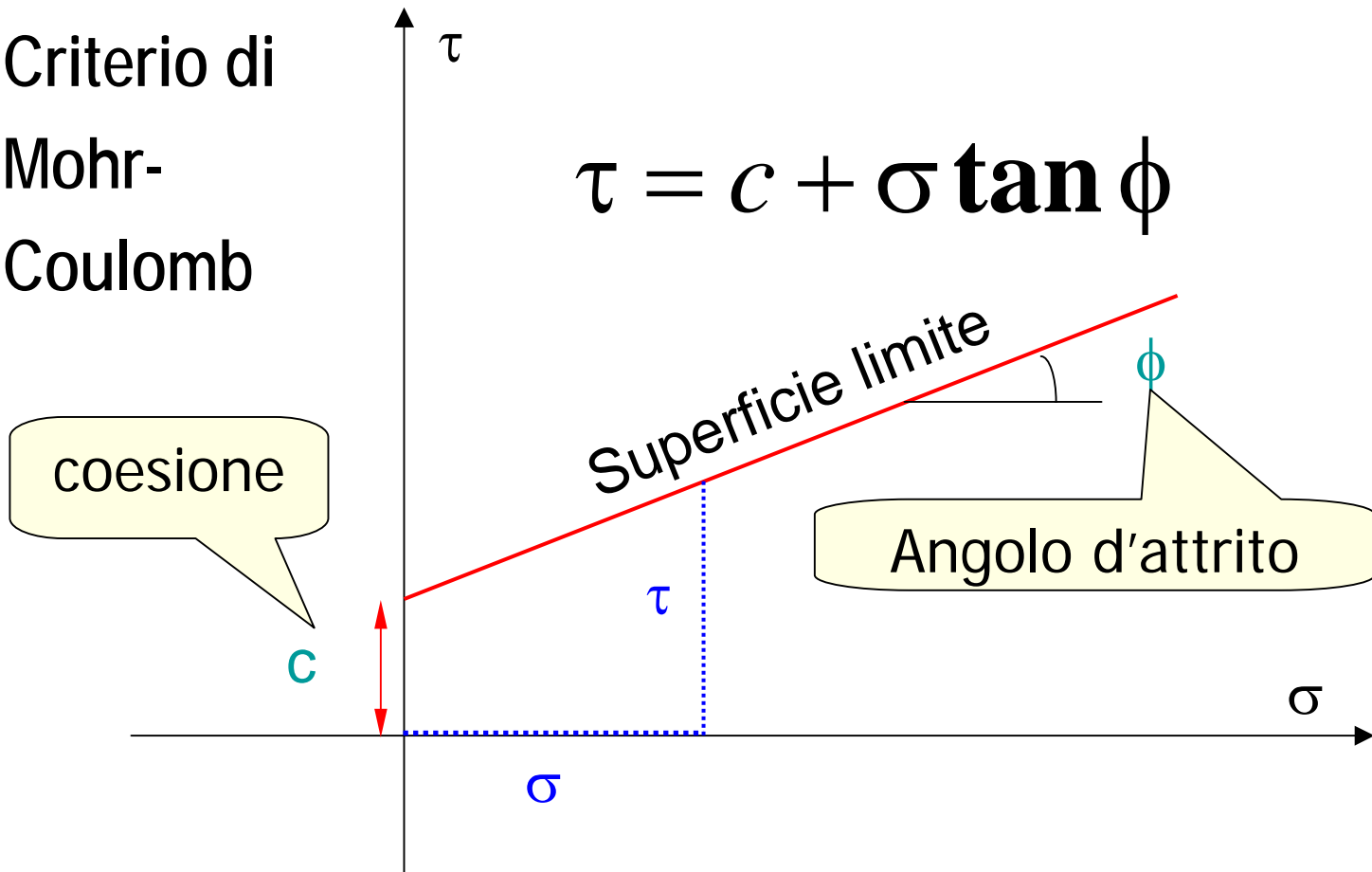
I criteri di resistenza per i materiali fragili sono basati sull'assunto sperimentale che la forza di attrito esercitata tra un corpo ed una superficie aumenta con l'aumento della pressione esercitata dal corpo sulla superficie.

Trasformando le forze nelle corrispondenti tensioni, si ottiene il criterio di Mohr-Coulomb in base al quale la tensione tangenziale aumenta con la tensione normale.



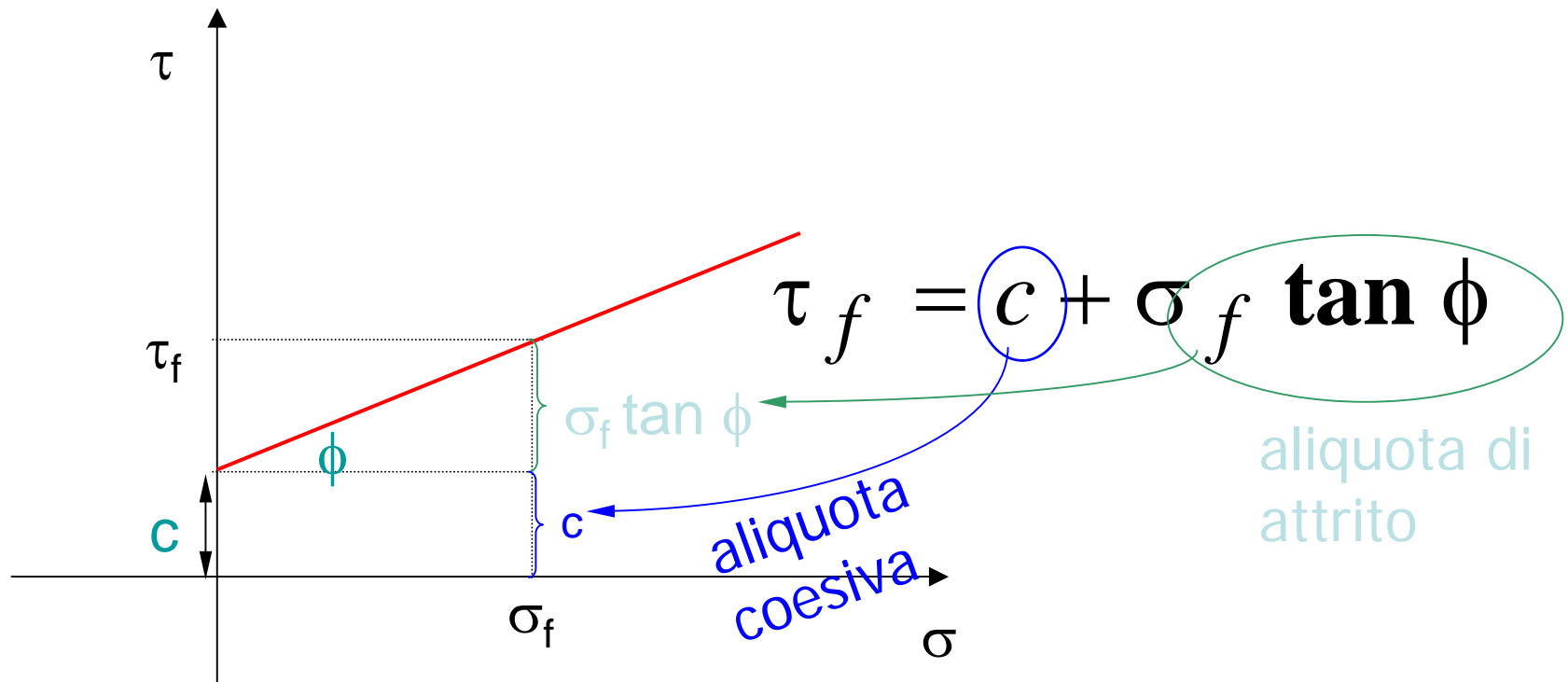
RESISTENZA dei MATERIALI

Criterio di
Mohr-
Coulomb



RESISTENZA dei MATERIALI

La resistenza a taglio consiste di due aliquote, coesiva e di attrito, ed aumenta con c e ϕ



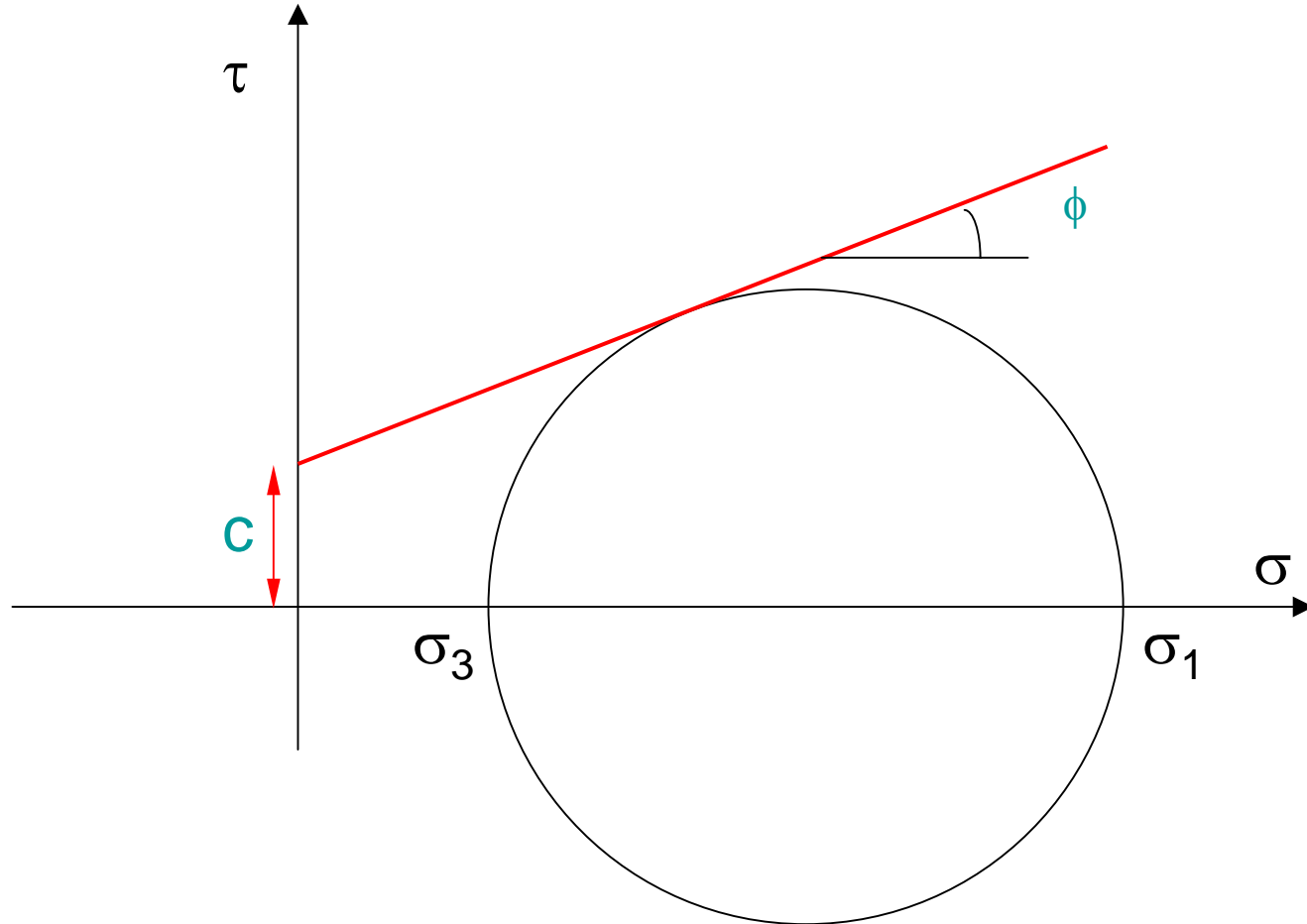
RESISTENZA dei MATERIALI

Imporre che lo stato tensionale in un punto sia tale da soddisfare il criterio di Mohr-Coulomb significa imporre che il cerchio massimo di Mohr (e cioè quello espresso in funzione delle tensioni principali estreme σ_1 e σ_3) sia tangente alla retta di Mohr-Coulomb.

N.B.: Ne consegue che tale criterio trascura gli effetti della tensione principale intermedia e che per $\phi=0$ il criterio coincide con quello di Tresca.



RESISTENZA dei MATERIALI



RESISTENZA dei MATERIALI

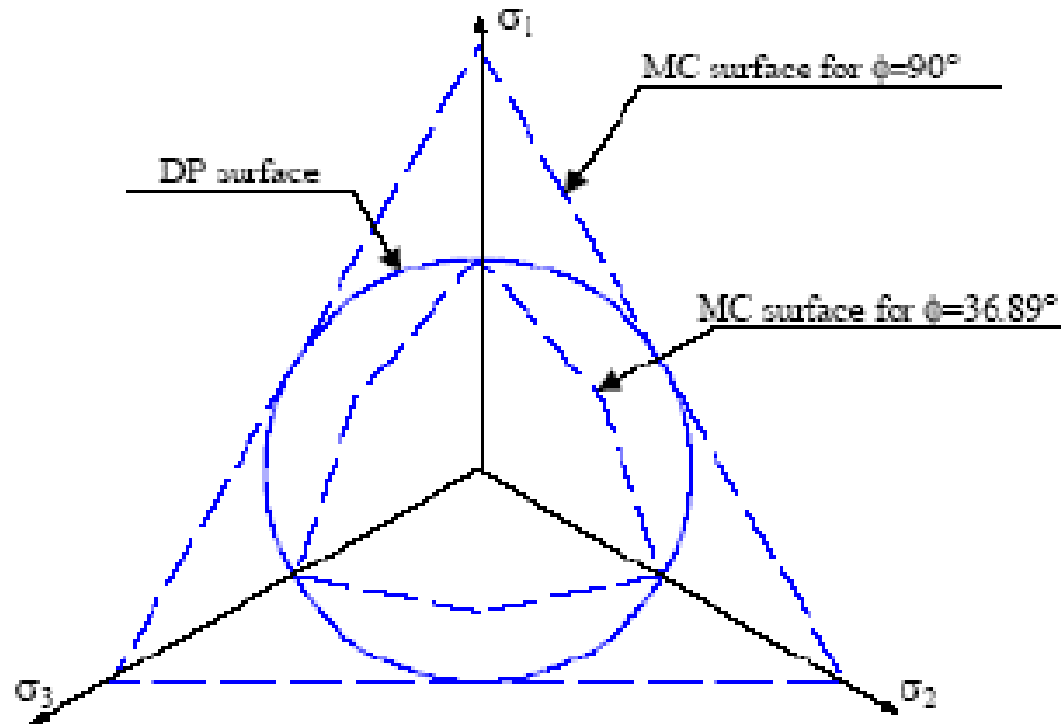
Si ricava in tal modo che:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi$$

che rappresenta l'equazione di un esagono irregolare illustrato nella figura successiva.



RESISTENZA dei MATERIALI



RESISTENZA dei MATERIALI

Si noti inoltre che nel criterio di Mohr-Coulomb la tensione limite a compressione è maggiore di quella a trazione. Ciò dipende dalla dipendenza del criterio dal terzo invariante del deviatore delle tensioni.

Per esprimere il criterio di Mohr-Coulomb in funzione degli invarianti di tensione si introduce un parametro detto...



RESISTENZA dei MATERIALI

... parametro di Lode

$$\theta = -\frac{1}{3} \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

L'espressione del criterio di Mohr-Coulomb diventa allora

$$F = J_1 \sin\varphi + \sqrt{J_{2D}} \cos\theta - \frac{\sqrt{J_{2D}}}{3} \sin\varphi \sin\theta - c \cos\varphi$$



RESISTENZA dei MATERIALI

Una generalizzazione del criterio di Mohr-Coulomb che tiene conto dell'influenza di tutte le tensioni principali è dovuta a Drucker-Prager

$$F = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - k$$

in uno stato di compressione idrostatica risulta:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad k = \frac{6 c \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$$

