

Dinamica del Corpo Rigido

Corpo rigido

- È un caso particolare dei sistemi di punti materiali
- È di grande importanza per le applicazioni pratiche
- Un corpo è detto rigido se le distanze tra tutte le possibili coppie di punti del corpo non cambiano

Corpo rigido

- Astrazione che si applica tanto meglio quanto più i corpi sono indeformabili
- Un corpo perfettamente rigido non esiste
- Dal punto di vista microscopico la rigidità dei solidi è dovuta a forze di natura elettrica tra gli atomi costituenti

Moto del corpo rigido

- Studio del moto di un corpo rigido:
 - in un SR inerziale
 - nel SCM (sistema non inerziale ma con gli assi sempre paralleli a quelli di un SR inerziale)
 - in un sistema con gli assi solidali al corpo rigido (sistema non inerziale, con assi che possono anche ruotare rispetto a quelli di un SR inerziale)

Moto del corpo rigido

- È determinato da una o più forze esterne, generalmente applicate in punti diversi del corpo
- Le forze sono quindi caratterizzati da una forza risultante \mathbf{F} e da un momento risultante τ
- Il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo quindi la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze esterne

Moto del corpo rigido

- Le leggi fondamentali sono le equazioni cardinali della meccanica

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

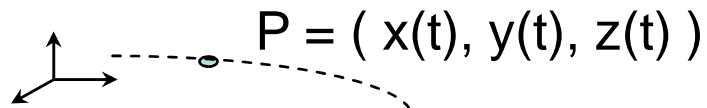
- Si può anche usare la conservazione dell'energia meccanica nel caso in cui le forze in gioco siano conservative o si abbia attrito statico $\Delta E = 0$

“Gradi di libertà” di un sistema

numero n di parametri indipendenti necessari a descriverne il moto (\Rightarrow definirne completamente la posizione)

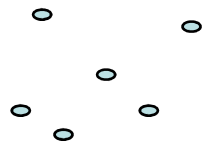
Esempi:

- **punto materiale** in moto nello spazio tridimensionale:



$$n = 3$$

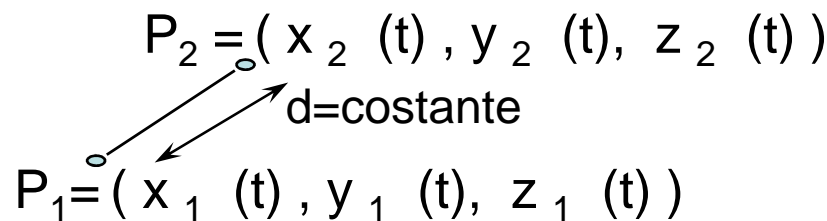
- sistema di **N punti materiali** indipendenti:



$$P_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$$

$$n = 3N$$

- **2 punti materiali** vincolati a mantenere una **distanza fissa**



$$n = 5 (= 3*2 - 1)$$

equazione di vincolo:

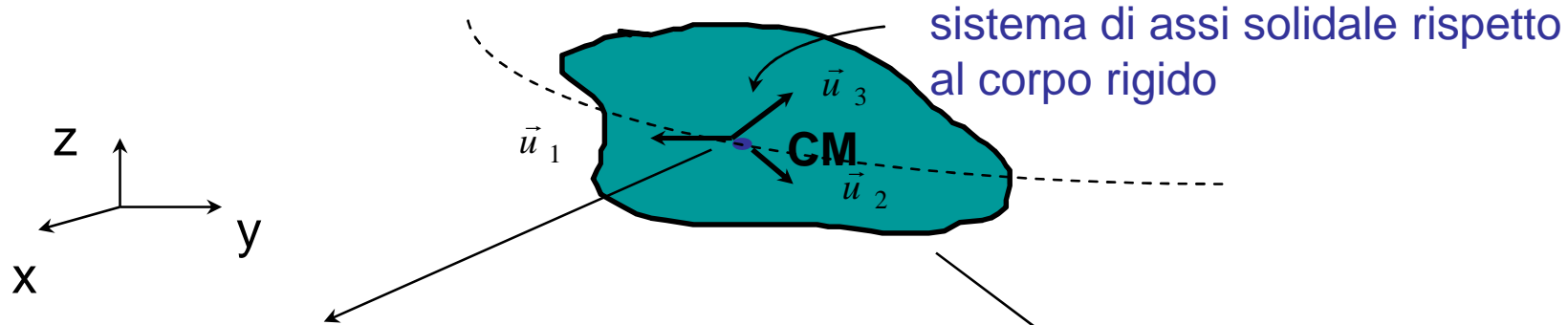
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2$$

- **corpo rigido** :

$$n = 6$$

Gradi di libertà di un corpo rigido

I gradi di libertà di un corpo rigido sono 6 :



posizione del centro di massa :
3 gradi di libertà

orientazione degli assi :

$$\vec{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$$

$$\vec{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})$$

$$\vec{u}_3 = (u_{3x}, u_{3y}, u_{3z})$$

\Rightarrow 9
parametri

condizioni:

$$|\vec{u}_1| = 1 \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

$$|\vec{u}_2| = 1 \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

$$|\vec{u}_3| = 1 \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

\Rightarrow 6
equazioni

$$9 - 6 = 3 \text{ parametri indipendenti}$$

6 gradi di libertà

Equilibrio statico del corpo rigido

- Un corpo rigido è in equilibrio statico se e solo se:
 - è inizialmente in quiete: $\vec{P} = 0$ $\vec{L} = 0$
 - \mathbf{P} e \mathbf{L} non variano nel tempo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

- Dalla prima eq. segue che $\vec{F} = 0$
- Dalla seconda che $\vec{\tau} = 0$
- Inoltre $\vec{F} = 0$ implica che il momento è indipendente dal polo scelto e quindi il polo può essere un punto qualunque

Traslazione di un corpo rigido

- Tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in genere curvilinee, con la stessa velocità, in genere varia
- Ogni punto ha lo stesso moto del CM: la conoscenza del moto del CM basta per conoscere il moto di tutti i punti del corpo
- Gli assi del sistema solidale col corpo rimangono sempre paralleli a quelli del SCM

Traslazione di un corpo rigido

- La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al CM
- Momento angolare ed energia cinetica nel SCM sono nulle $\vec{L}^* = 0$ $K^* = 0$

- QM ed energia cinetica del corpo rigido:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

- L'equazione del moto del CM è

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM}$$

Traslazione di un corpo rigido

- Il momento angolare è:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}^* = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

- e quindi il teorema del momento angolare non aggiunge alcuna informazione, infatti

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}$$

- Cioè τ è esprimibile in funzione di \mathbf{F}

Rotazione di un corpo rigido

- Ogni punto descrive un moto circolare, la traiettoria è un arco di circonferenza, di raggio diverso per ogni punto considerato, ma con centro su una stessa retta, detta asse di rotazione
- La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano la stessa velocità angolare ω in un dato istante, parallela all'asse di rotazione

Rotazione di un corpo rigido

- Se l'asse è fisso nel tempo ω può cambiare solo in modulo e verso
- Nel caso più generale ω può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile)

Moto di un corpo rigido

- Traslazione e rotazione sono i moti più importanti, in quanto vale il seguente teorema di meccanica razionale:

ogni spostamento infinitesimo puo` sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime con velocita` v e ω variabili nel tempo

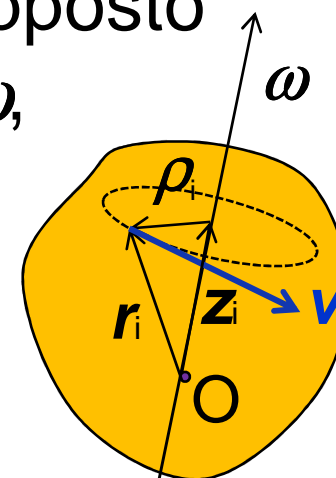
Moto di un corpo rigido

- Per descrivere una rototraslazione si utilizzano le equazioni cardinali:
 - il teorema del moto del CM
 - il teorema del momento angolare
- In una rototraslazione le velocità \mathbf{v} e ω sono, in generale, indipendenti
- In situazioni in cui è presente un vincolo le due velocità possono essere legate da una relazione che elimina tale indipendenza (rotolamento puro)

Momento angolare

- Calcoliamo il momento angolare di un corpo esteso in rotazione attorno ad un asse, supposto inizialmente fisso, con velocità angolare ω , rispetto al polo O scelto sull'asse

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$



- Scomponiamo $\vec{r}_i(t)$ lungo l'asse z di rotazione e della direzione ad esso perpendicolare

$$\vec{r}_i(t) = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i(t) \quad \vec{\rho}_i(t) = x_i(t)\hat{i} + y_i(t)\hat{j}$$

Momento angolare

- Abbiamo messo in evidenza la dipendenza dal tempo delle grandezze
- Fintanto che l'asse di rotazione rimane lo stesso
 - la coordinata z è indipendente da t
 - La coordinata $\rho(t)$ ruota, con modulo ρ indipendente da t

Momento angolare

- L diviene

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i + z_i \hat{\omega}) \times [\vec{\omega} \times (\vec{\rho}_i + z_i \hat{\omega})]$$

- Nella parentesi quadra il termine $\vec{\omega} \times \hat{\omega}$ si annulla

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i] + \sum_j m_j z_j \hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_j]$$

- Il vettore

$$\vec{\rho}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i]$$

- ha la direzione di ω e modulo:

$$\omega \rho_i^2 \quad \vec{\rho}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i] = \rho_i^2 \vec{\omega}$$

Momento angolare

- Il vettore

$$\hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_j]$$

- ha direzione opposta a ρ_j e modulo $\omega \rho_j$

$$\hat{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_j] = -\vec{\rho}_j \omega$$

Momento angolare

- \vec{L} è somma di un termine longitudinale e di un termine trasversale

$$\vec{L} = \left[\sum_i m_i \rho_i^2 \right] \vec{\omega} - \left[\sum_j m_j z_j \vec{\rho}_j \right] \omega = \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp}$$

- L'esistenza di quest'ultimo significa che, in generale, il momento angolare non è parallelo al vettore velocità angolare

Momento angolare

- Il termine longitudinale e` proporzionale al vettore velocita` angolare

$$\vec{L}_{//} = \left[\sum_i m_i (x_i^2(t) + y_i^2(t)) \right] \vec{\omega} = \left[\sum_i m_i \rho_i^2 \right] \vec{\omega} = I_{\omega} \vec{\omega}$$

- La costante di proporzionalita` e` detta momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione scelto
 - è indipendente dalla posizione del polo sull'asse (ρ non dipende dalla posizione di O)
 - è indipendente dal tempo (ρ non dipende da t perchè il corpo è rigido)

Momento angolare

- Il termine trasversale

$$\vec{L}_{\perp} = -\omega \sum_k m_k z_k (x_k(t) \hat{i} + y_k(t) \hat{j}) = -\omega \sum_k m_k z_k \vec{\rho}_k(t)$$

- dipende dal tempo (tramite x e y oppure ρ_l)
- dipende dalla posizione del polo sull'asse (tramite z)
- quindi non ci piace tanto perchè ci complica notevolmente la vita
- Cerchiamo dei casi in cui si annulla

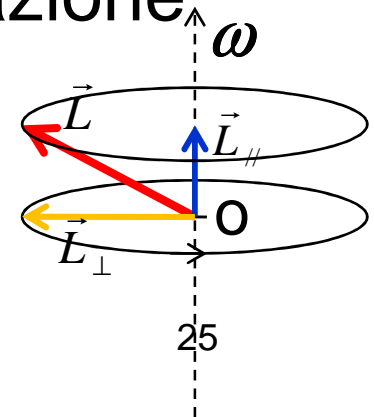
Momento angolare

$$\vec{L}_{\perp} = -\omega \sum_k m_k z_k \vec{\rho}_k(t)$$

- Questo termine è nullo in due casi notevoli in cui l'asse di rotazione
 - è un asse di simmetria della distribuzione di massa del corpo (allora per ogni punto x,y,z esiste un punto $-x,-y,z$ che compensa il primo)
 - è un asse principale d'inerzia (vedi oltre)

Momento angolare

- Il momento angolare, calcolato rispetto ad un punto sull'asse di rotazione, può essere scritto come $\vec{L} = \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp} = I_{\omega} \vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$
- I vettori $\vec{\rho}_i$ ruotano tutti con la stessa velocità angolare, quindi anche \vec{L}_{\perp} e \vec{L} ruotano con tale velocità; quest'ultimo descrive una superficie conica attorno all'asse di rotazione
- Questo moto è detto precessione del momento angolare attorno all'asse di rotazione



Momento d'inerzia

- Per definire il momento d'inerzia di un corpo, bisogna conoscerne la distribuzione di massa, cioè la distanza degli elementi di massa dall'asse attorno a cui ruota

$$I(\hat{\omega}) = \sum_i m_i \left(x_i^2(\hat{\omega}, t) + y_i^2(\hat{\omega}, t) \right) = \sum_i m_i \rho_i^2(\hat{\omega})$$

- Per una distribuzione continua di massa

$$I(\hat{\omega}) = \int_{\text{corpo}} \left(x^2(\hat{\omega}, t) + y^2(\hat{\omega}, t) \right) dm = \int_{\text{corpo}} \rho^2(\hat{\omega}) dm$$

Momento d'inerzia

- Ne segue che cambiando l'asse di rotazione, cambia il momento d'inerzia, cioè la costante (indipendente dal tempo!) che lega il momento angolare longitudinale alla velocità angolare
- I è una grandezza scalare estensiva, cioè tale che per un sistema scomponibile in parti, può essere calcolata come somma dei contributi delle singole parti
- **non è una proprietà intrinseca** del corpo

Momento d'inerzia

- Questa nuova grandezza è stata introdotta per semplificare lo studio del moto dei corpi rigidi
- Le sue dimensioni fisiche sono
$$[I] = ML^2$$
- e l'unità di misura è

$$u(I) = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Assi principali d'inerzia

- Teorema di Poinsot (senza dimostrazione):
 - dato un corpo rigido qualunque, comunque venga scelto un punto O , è sempre possibile trovare tre direzioni mutuamente ortogonali passanti per O , per ognuna delle quali L è parallelo a ω
- Questi assi sono detti assi principali d'inerzia
- Se O coincide con il CM, gli assi si dicono assi centrali d'inerzia

“Tensore di inerzia”

Per una rotazione intorno ad un asse generico, la **relazione tra il momento angolare L e la velocità angolare ω** è data dal **“tensore di inerzia”** (o **“matrice di inerzia”**) :

$$L_j = \sum_{k=1}^3 I_{jk} \omega_k \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

dove :

$$I_{xx} \equiv \int_{\text{corpo}} (y^2 + z^2) dm \equiv I_x \quad \leftarrow \text{momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse } x$$

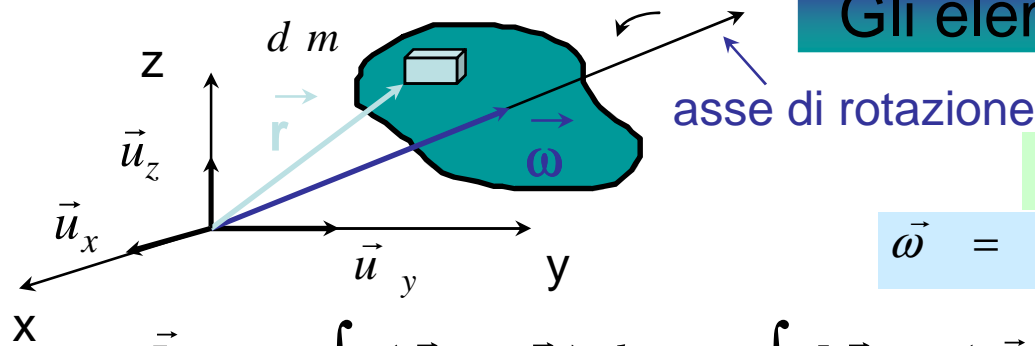
$$I_{yy} \equiv \int_{\text{corpo}} (x^2 + z^2) dm \equiv I_y \qquad I_{zz} \equiv \int_{\text{corpo}} (x^2 + y^2) dm \equiv I_z$$

gli **elementi diagonali** della matrice di inerzia sono i **momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi coordinati** ; inoltre, per gli elementi non diagonali:

$$I_{xy} = I_{yx} \equiv - \int_{\text{corpo}} xy dm \qquad I_{xz} = I_{zx} \equiv - \int_{\text{corpo}} xz dm$$

$$I_{yz} = I_{zy} \equiv - \int_{\text{corpo}} yz dm \quad \Rightarrow \text{ la matrice d'inerzia è simmetrica } \quad 30$$

Gli elementi della matrice d'inerzia



$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z$$

$$\vec{L}_O \equiv \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm =$$

$$= \int (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \times [(\omega_y z - \omega_z y) \vec{u}_x + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{u}_y + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{u}_z] dm$$

$$\Rightarrow L_x = \int [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] dm$$

$$\Rightarrow L_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm$$

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

e analoghe espressioni per L_y , L_z .

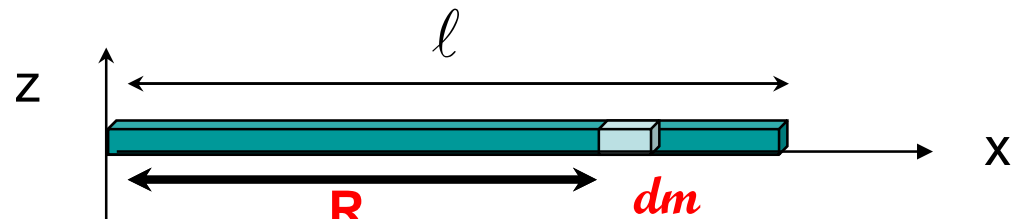
Calcolo del momento d'inerzia

- Asta omogenea
- Disco omogeneo
- Sfera omogenea

Esempi di calcolo del Momento di inerzia

Momento d'inerzia di un asta omogenea di lunghezza ℓ e massa M :

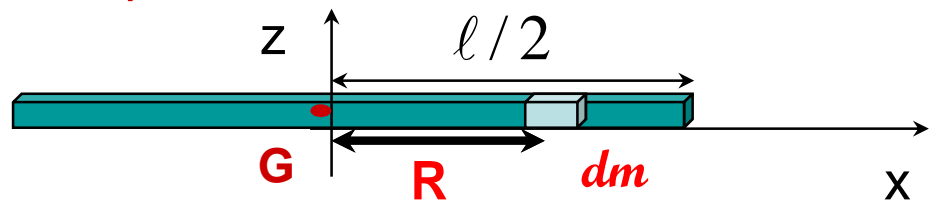
i) rispetto ad un **asse perpendicolare passante per un suo estremo** :



$$I_z \equiv \int_{\text{Corpo}} R^2 dm = \int_0^\ell x^2 \lambda dx = \frac{\lambda \ell^3}{3} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{M \ell^2}{3}}$$

densità lineare $\lambda = M / \ell$

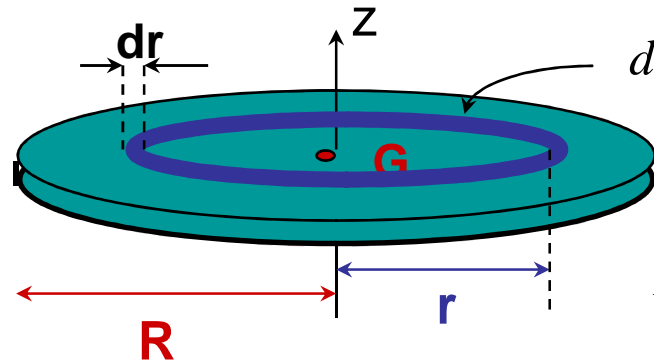
ii) rispetto ad un **asse perpendicolare passante per il suo centro di massa** :



$$I_z \equiv 2 \int_0^{\ell/2} x^2 \lambda dx = \frac{2 \lambda \ell^3}{24} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{M \ell^2}{12}}$$

Esempi di calcolo di momenti di inerzia

- i) **Momento d'inerzia** di un **disco omogeneo** di raggio R e massa M rispetto **all'asse perpendicolare passante per il suo centro di massa** :



$$d m = \sigma d S = \sigma 2 \pi r d r$$

densità superficiale:

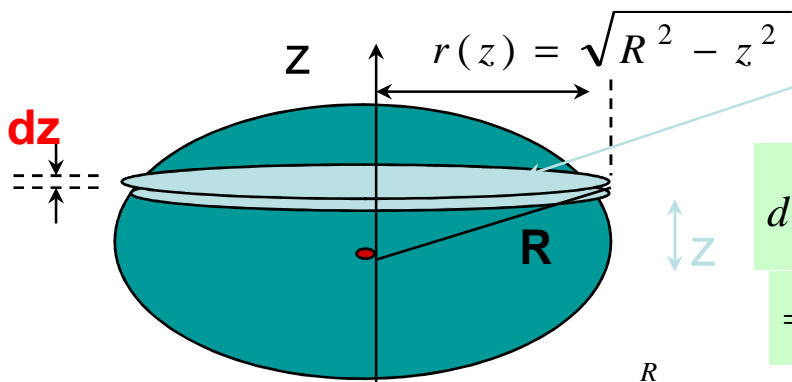
$$\sigma \equiv M / \pi R^2$$

$$I_{z_G} \equiv \int_{C o r p o} r^2 d m = \int_0^R r^2 \sigma 2 \pi r d r =$$

$$= \frac{2 \pi \sigma R^4}{4} \Rightarrow$$

$$I_{z_G} = \frac{M R^2}{2}$$

- ii) Momento d'inerzia di una **sfera omogenea** di raggio R e massa M :



disco di massa dM(z), momento d'inerzia dI(z)

$$d M (z) = \rho d V = \rho \pi r (z)^2 d z$$

$$d I (z) = \frac{r (z)^2 d M (z)}{2} = \rho = M / \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi r (z)^4 d z = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 d z$$

$$= R^4 - 2 R^2 z^2 + z^4$$

$$I_G = \int d I (z) = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 d z$$

$$= \rho \pi \left[R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{R^5}{5} \right] = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 \Rightarrow$$

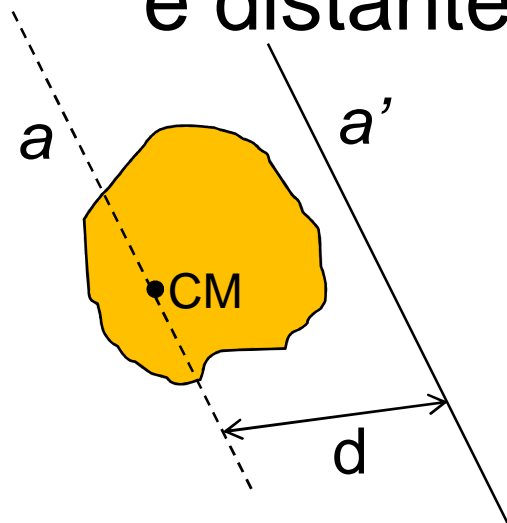
$$I_G = \frac{2}{5} M R^2$$

Come facilitare il calcolo del momento d'inerzia

- I calcoli più semplici sono quelli per assi di rotazione coincidenti con assi di simmetria passanti per il CM
- Per assi paralleli a questi assi, esiste un teorema che permette di calcolare semplicemente i momenti d'inerzia relativi

Teorema di Huygens-Steiner

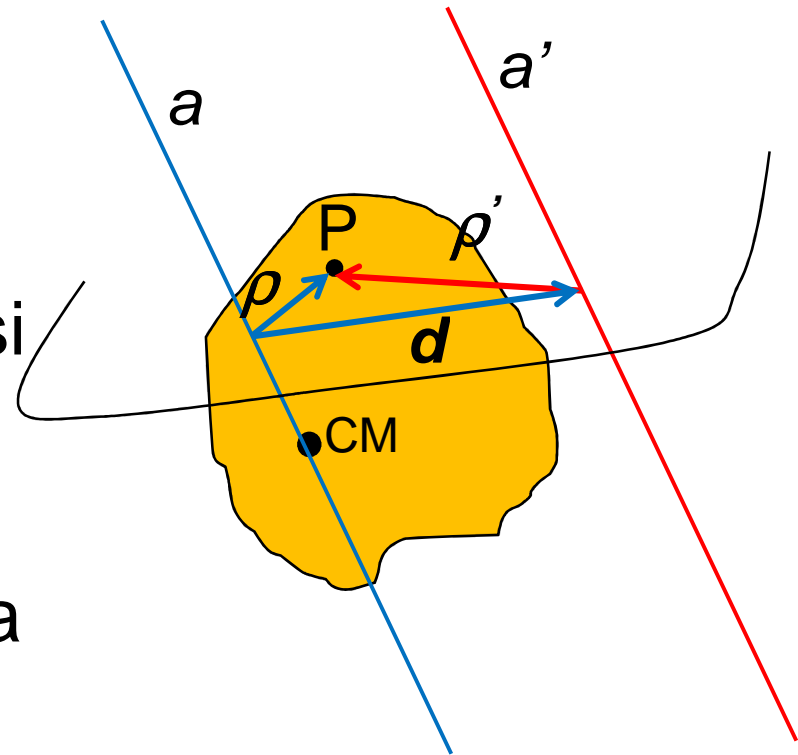
- Detto I il momento d'inerzia di un corpo di massa m , rispetto ad un asse a passante per il CM, il momento d'inerzia rispetto ad un asse a' parallelo al primo e distante d da questo e'



$$I' = I + md^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

- Detto P il generico punto del corpo, tracciamo il piano passante per P e perpendicolare ai due assi paralleli
- Sia ρ la distanza di P dall'asse a e ρ' la distanza di P dall'asse a'
- Vale la relazione $\vec{\rho}' = \vec{\rho} - \vec{d}$



Dimostrazione del teorema di Huygens-Steiner

- Il momento d'inerzia rispetto ad a' è

$$I' = \int_{\text{corpo}} \rho'^2 dm = \int_{\text{corpo}} (\vec{\rho} - \vec{d})^2 dm =$$

$$\int_{\text{corpo}} \rho^2 dm - 2\vec{d} \int_{\text{corpo}} \vec{\rho} dm + d^2 \int_{\text{corpo}} dm =$$

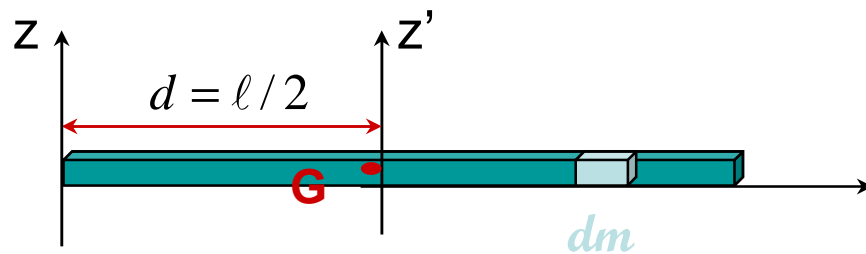
$$I - 2\vec{d} \cdot m\vec{\rho}_{CM} + md^2$$

- Il secondo termine è nullo, in quanto il centro di massa appartiene all'asse a

- quindi $I' = I + md^2$

Esempi di applicazione del teorema di Steiner :

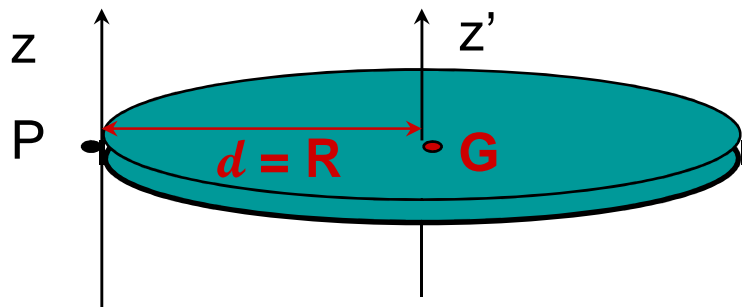
i)



$$\begin{aligned}
 I_z &= I_{z'_{CM}} + M d^2 = \\
 &= \frac{M \ell^2}{12} + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \boxed{\frac{M \ell^2}{3}}
 \end{aligned}$$

ii)

Momento d'inerzia di un **disco omogeneo** di massa M e raggio R rispetto ad un **asse ad esso perpendicolare** passante per un **punto P sul suo bordo** :

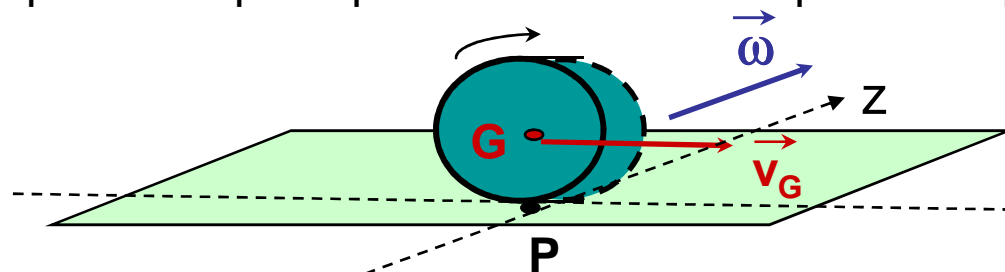


$$\begin{aligned}
 I_{z_P} &= I_{z'_{CM}} + M d^2 = \\
 &= \frac{M R^2}{2} + M R^2 = \frac{3 M R^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{z_P} = \frac{3 M R^2}{2}}$$

Si noti che:

un disco che ruoti senza strisciare (“**puro rotolamento**”) compie una rotazione intorno all'asse istantaneo passante per il punto di contatto col piano di appoggio



Energia cinetica di rotazione

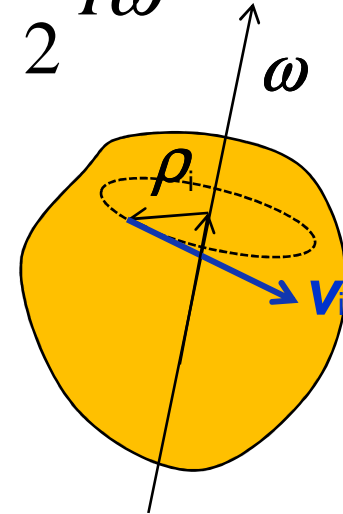
- Partendo dalla definizione di K

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Ricordando che $\vec{L}_{//} = I \vec{\omega}$
- Possiamo scrivere

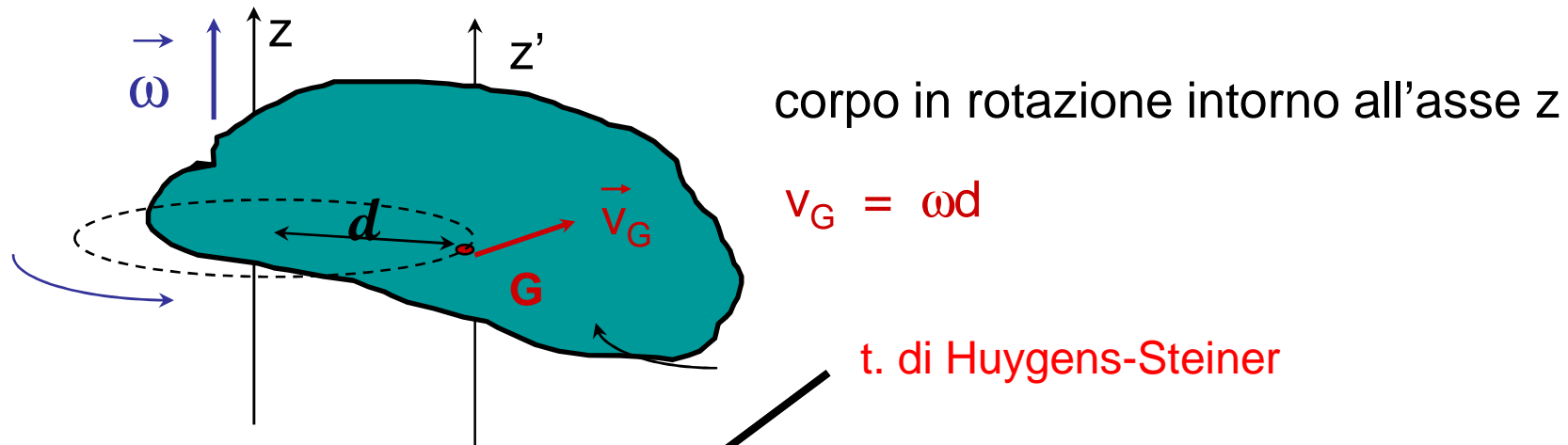
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L_{//} \omega = \frac{1}{2} \frac{L_{//}^2}{I}$$

- L'energia cinetica di rotazione dipende dal momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, ovvero dal momento angolare longitudinale



Energia cinetica di un corpo rigido

Il teorema di Koenig per un corpo rigido puo' essere ricavato dal teorema di Huygens-Steiner :



$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{z'} + M d^2) \omega^2 =$$
$$= \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} M (d \omega)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

Lavoro forze esterne

- In seguito all'azione di un momento esterno, la velocità angolare di un corpo viene portata dal valore iniziale ω_1 a quello finale ω_2
- Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di K è uguale al lavoro delle forze agenti sul sistema
- Per un corpo rigido, solo le forze esterne danno un contributo

$$\Delta K = W^E$$

Lavoro e potenza

- In termini infinitesimi

$$dK = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega d\omega = I \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I \alpha d\theta = \tau_{//} d\theta = dW^E$$

- Integrando gli ultimi due membri otteniamo il lavoro come integrale del momento nella

variabile angolare $\int_0^{\Theta} \tau_{//} d\theta = \int_I^F dW^E = W^E$

- Esprimiamo la potenza in funzione del momento e della velocità angolare

$$\mathcal{P} = \frac{dW^E}{dt} = \tau_{//} \frac{d\theta}{dt} = \tau_{//} \omega$$

Rotazione intorno ad un asse fisso

- È un caso particolare di grande importanza pratica nello studio di macchine e motori
- Il vettore ω ha la direzione fissa dell'asse, mentre modulo e verso possono cambiare nel tempo
- Se ω non è costante, il vettore accelerazione angolare
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$
- è diverso da zero e diretto lungo l'asse

Rotazione con asse fisso e L non // ω

- Dal teorema del MA, le equazioni del moto sono

$$\tau_{//} = \frac{dL_{//}}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad \vec{\tau}_{\perp} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

- Il moto longitudinale (1-D) è retto da $\tau_{//}$, parallelo all'asse e che può far cambiare ω solo in verso e modulo ma non in direzione
- Il moto trasversale (2-D) è retto da $\vec{\tau}_{\perp}$, perpendicolare all'asse e che tende a far ruotare l'asse, cioè a far cambiare la direzione di ω

Rotazione con asse fisso e $\mathbf{L} // \boldsymbol{\omega}$

- Il caso più semplice è quello in cui il momento angolare è parallelo all'asse, ovvero la componente trasversale è nulla; in tal caso

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- \mathbf{L} può variare in modulo e verso, ma non in direzione, quindi $d\vec{L}/dt$ è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$
- Il teorema del momento angolare impone allora che il momento delle forze $\boldsymbol{\tau}$ che fa variare \mathbf{L} sia anch'esso parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Leftrightarrow \tau_{//} = \frac{dL_{//}}{dt} = I\alpha$$

Rotazione con asse fisso e

$$\mathbf{L} // \boldsymbol{\omega}$$

- Risolvendo l'equazione rispetto all'accelerazione

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau_{//}}{I}$$

- Noto il momento, si può ricercare l'integrale primo del moto

$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha dt = \int_0^t \frac{\tau_{//}}{I} dt$$

- In particolare se il momento è costante

$$\omega(t) - \omega(0) = \frac{\tau_{//}}{I} t$$

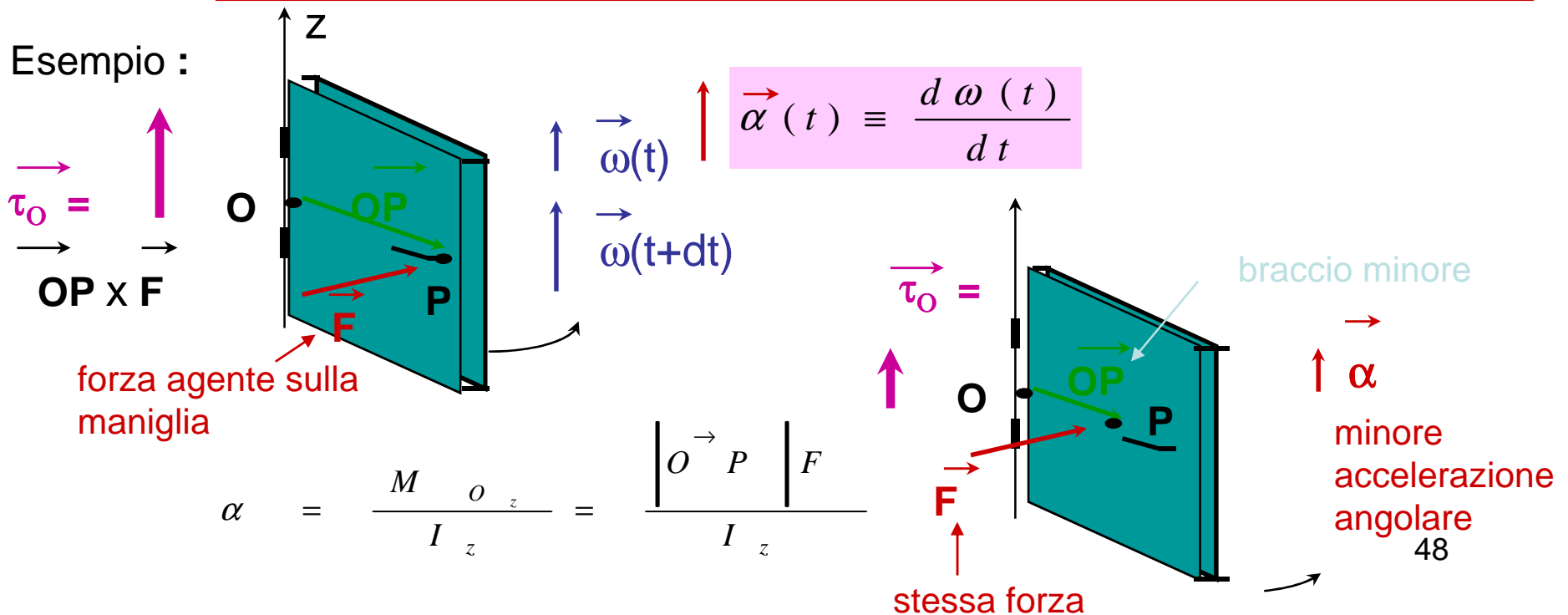
Equazione fondamentale della dinamica delle rotazioni:

$$\tau_z = I_z \alpha$$

è formalmente analoga alla 2^a legge della dinamica per un punto materiale, con le sostituzioni:

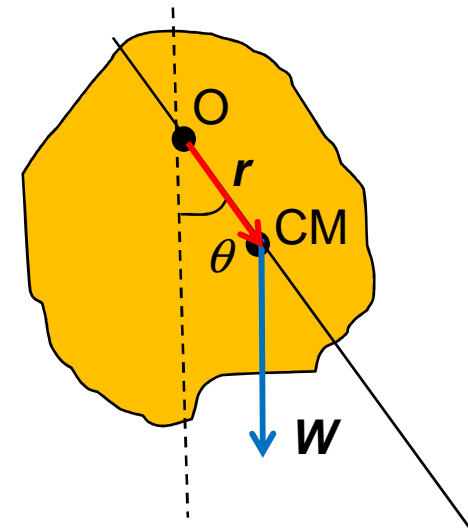
forza risultante F \Leftrightarrow momento delle forze esterne M
 accelerazione a \Leftrightarrow accelerazione angolare α
 massa m \Leftrightarrow momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z

Esempio :



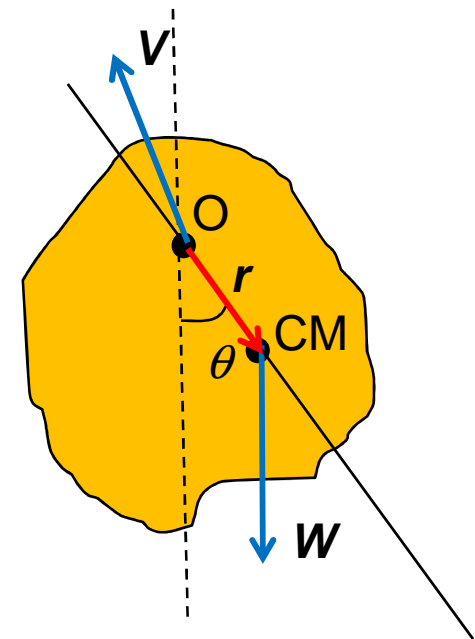
Pendolo fisico

- E' un qualunque corpo rigido oscillante attorno ad un asse orizzontale (non passante per il CM)
- Consideriamo la sezione del corpo perpendicolare all'asse e contenente il CM
- Sia O la traccia dell'asse di rotazione e r la distanza di O dal CM, W il peso del corpo e θ l'angolo formato da r con la verticale



Pendolo fisico

- L'asse è vincolato a rimanere fisso, esisterà quindi una forza vincolare V che agisce sul corpo
- Come ogni forza vincolare, essa è, a priori, incognita e sarà determinata a posteriori dopo aver risolto l'equazione del moto
- Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche con origine O , asse polare verticale e asse $z =$ asse di rotazione con verso uscente dal foglio



Pendolo fisico

- Le componenti del peso sono

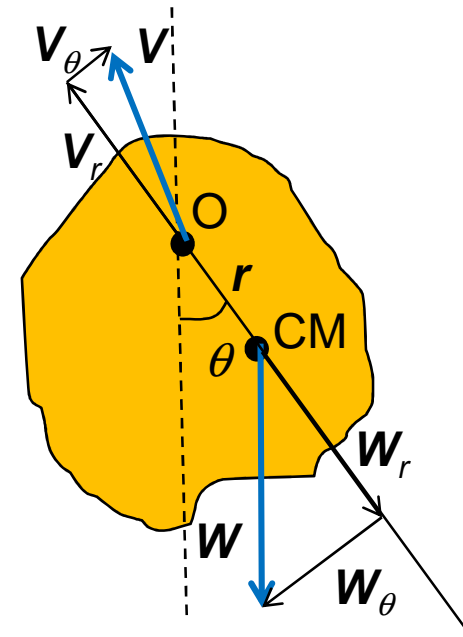
$$W_r = W \cos \theta$$

$$W_\theta = -W \sin \theta$$

- Le componenti della forza vincolare

$$V_r, V_\theta$$

- Entrambe le forze hanno componente z nulla



Pendolo fisico

- Scegliamo O come polo per il calcolo dei momenti: questo è conveniente perché la forza vincolare incognita ha momento nullo rispetto a O e il momento risultante τ è uguale al momento della forza peso

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W}$$

- Applichiamo al corpo le equazioni cardinali

$$\vec{F}_e = \vec{W} + \vec{V} = M\vec{a}^{(CM)} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Pendolo fisico

- Per i momenti si ha:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt}$$

- Note le espressioni del momento di forza e del momento angolare

$$\tau_z = rW_\theta = -rW \sin \theta \quad L_z = I\omega$$

Si ha:

$$-rW \sin \theta = \frac{d}{dt}(I\omega) = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- da cui si ricava la legge oraria $\theta(t)$

Pendolo fisico

- Per le forze abbiamo le due equazioni

$$W_r + V_r = Ma_r^{(CM)} = -M\omega^2 r = -Mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$W_\theta + V_\theta = Ma_\theta^{(CM)} = M \frac{d\omega}{dt} r = Mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

che ci servono per trovare le componenti della reazione vincolare

$$V_r = -W_r - Mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$V_\theta = -W_\theta + Mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Pendolo fisico

- Risolviamo ora l'equazione differenziale per $\theta(t)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \sin \theta$$

- Per piccole oscillazioni possiamo confondere il seno con l'arco, ottenendo

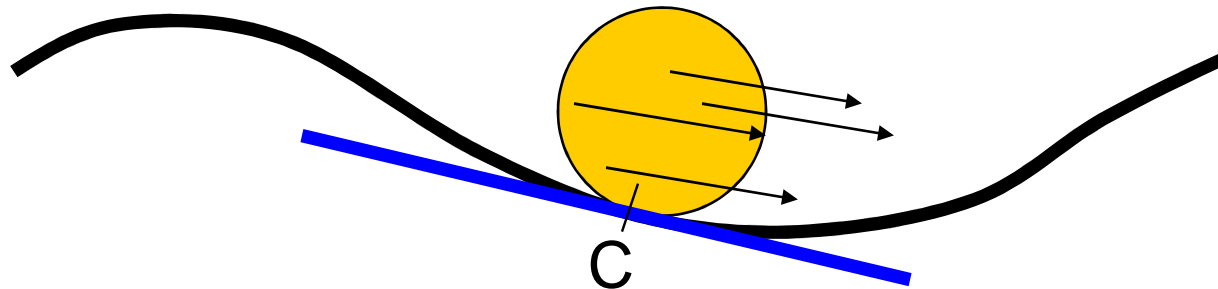
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \theta = -\Omega^2 \theta \Rightarrow \theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$$

- Equazione del moto armonico con pulsazione Ω e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{rW}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^*}{g}}$$

Slittamento

- Immaginiamo un corpo cilindrico o sferico in moto rispetto alla superficie di appoggio



- Se le velocità di tutti i punti sono uguali e sono parallele al piano tangente localmente alla superficie, abbiamo un moto di traslazione e il corpo slitta sulla superficie

Rotolamento

- In generale in corpo anche rotola sulla superficie
- Se il punto di contatto C tra corpo e superficie è fermo, istante per istante, si ha rotolamento puro
- Altrimenti avremo contemporaneamente slittamento e rotolamento

Rotolamento puro

- Tra superficie e corpo esiste una forza di attrito che mantiene fermo il punto di contatto C, istante per istante
- La velocità del punto C (o di qualsiasi altro punto) a distanza r dal CM è

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_C^* = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Rotolamento puro

- La condizione di puro rotolamento è $\vec{v}_C = 0$
ovvero $\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$

- In modulo la velocità del CM è $v_{CM} = \omega r$

- E l'accelerazione

$$a_{CM} = \alpha r$$

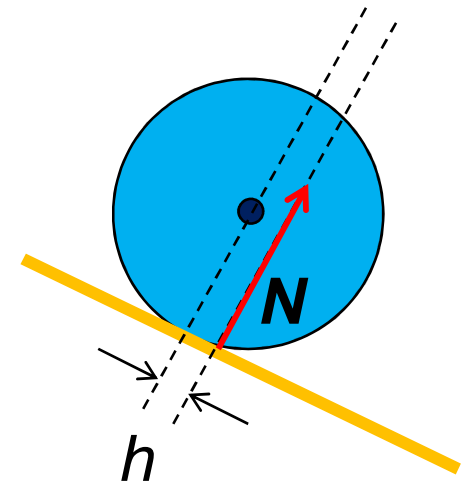
- Cioè nel moto di puro rotolamento esiste una relazione precisa tra velocità del CM e velocità angolare

Rotolamento puro

- A questo moto si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica
- Questo è possibile perché la forza d'attrito agisce sul punto di contatto, che è fermo, e quindi non compie lavoro
- Nuovamente questo è un caso limite: un corpo libero che rotola su un piano orizzontale, presto o tardi si arresta

Attrito volvente

- Si modella questo fenomeno ad una nuova forma di attrito, detto volvente, che è attivo tra il corpo e la superficie di appoggio
- È causato dalla deformazione locale del corpo e della superficie
- Per una ruota in moto, la retta d'azione della componente normale N della reazione vincolare alla superficie d'appoggio non contiene il centro della ruota



Attrito volvente

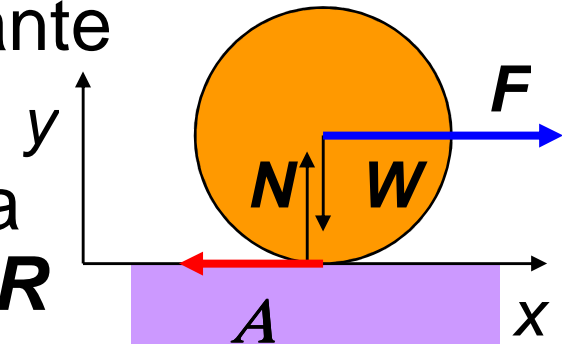
- L'effetto è modellizzato da un momento che si oppone al moto

$$\tau_v = hN$$

- h è il braccio di N ed è detto coefficiente di attrito volvente)
- L'effetto dell'attrito volvente è sempre molto minore di quello dell'attrito radente e statico, per cui è generalmente trascurabile
- Da qui deriva il grande vantaggio che si ottiene, in molti casi, di dotare i veicoli di ruote piuttosto che di pattini

Moto di rotolamento

- Consideriamo un corpo di massa m e raggio r che rotola su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza F costante applicata all'asse
- Sul corpo agiscono anche la forza peso W e la reazione del vincolo R
- R si scompone in una forza normale al vincolo N e una forza di attrito A parallela al vincolo
- A deve opporsi al moto del punto di contatto verso $+x$ e quindi dev'essere diretta verso $-x$



Moto di rotolamento

- Dalla 1^a equazione cardinale:

$$\vec{F} + \vec{A} + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

- che proiettata lungo x e y dà

$$F - A = ma_{CM} \qquad -W + N = 0$$

- dato che l'accelerazione è diversa da zero solo lungo x , mentre è nulla lungo y
- La seconda equazione permette di trovare N :

$$N = W$$

- La prima equazione contiene l'incognita a_{CM}
- e la forza d'attrito A

Moto di rotolamento

- Dalla 2^a equazione cardinale:

$$\tau_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt}$$

- Scelto il CM come polo si ha:

$$rA = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha$$

Moto di rotolamento

- Questa equazione contiene l'incognita α e la forza d'attrito A
- Distinguiamo due casi:
 - attrito statico:

$$A \leq A_{\max} = \mu_s N$$

- attrito dinamico:

$$A = \mu_d N$$

Moto di rotolamento puro

- In totale abbiamo due equazioni e tre incognite

$$F - A = ma_{CM} \quad rA = I\alpha$$

- Nel caso di rotolamento: $a_{CM} = \alpha r$

- Risolvendo per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{Fr^2}{I + mr^2} \quad \alpha = \frac{Fr}{I + mr^2} \quad A = \frac{FI}{I + mr^2}$$

Moto di rotolamento

- Nel caso di slittamento abbiamo solo due equazioni, ma anche solo due incognite perché siamo in regime di attrito dinamico in cui:

$$A = \mu_d N = \mu_d W$$

- Risolvendo per le incognite:

$$a_{CM} = \frac{F - \mu_d W}{m} \quad \alpha = \frac{r\mu_d W}{I}$$

Moto di rotolamento puro

- Quand'è possibile il rotolamento puro?
Occorre che la soluzione trovata per A sia minore del valore statico massimo

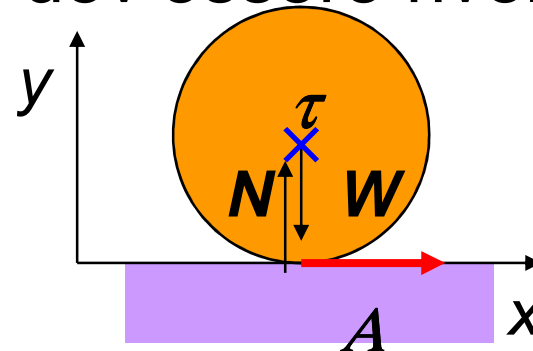
$$A = \frac{FI}{I + mr^2} \leq \mu_s N$$

- Questo impone un limite al valore di F :

$$F \leq \mu_s W \frac{I + mr^2}{I}$$

Moto di rotolamento

- Il corpo sia ora sotto l'azione di un momento costante τ applicato all'asse (entrante nel foglio)
- Quanto detto prima per la reazione del vincolo R continua a valere, eccetto che ora la forza d'attrito deve opporsi al moto del punto di contatto verso $-x$ e quindi dev'essere rivolta verso $+x$



Moto di rotolamento

- 1^a equazione cardinale:

$$\vec{A} + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

- che proiettata lungo x e y dà

$$A = ma_{CM} \quad -W + N = 0$$

- Di nuovo la seconda equazione permette di trovare N :

$$N = W$$

- Dalla prima segue che quando un motore fa girare una ruota, è la forza d'attrito a spingere avanti la ruota

Moto di rotolamento

- 2^a equazione cardinale: $\tau_{\omega} = \frac{dL_{\omega}}{dt}$

- Scelto il CM come polo

$$\tau - rA = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha$$

- Distinguiamo, come prima, due casi.

Moto di rotolamento puro

- Nel caso di rotolamento puro abbiamo tre incognite e la solita relazione tra a_{CM} e α .
- Possiamo quindi risolvere le equazioni di prima e trovare le incognite:

$$a_{CM} = \frac{\tau r}{I + mr^2} \quad \alpha = \frac{\tau}{I + mr^2} \quad A = \frac{\tau mr}{I + mr^2}$$

Moto di rotolamento

- Nel caso di slittamento abbiamo due incognite e due equazioni
- Possiamo risolverle trovando:

$$a_{CM} = \frac{\mu_s W}{m} \quad \alpha = \frac{\tau - r\mu_s W}{I}$$

Moto di rotolamento puro

- Quand'è possibile il rotolamento puro?
Occorre che la soluzione trovata per A sia minore del valore statico massimo

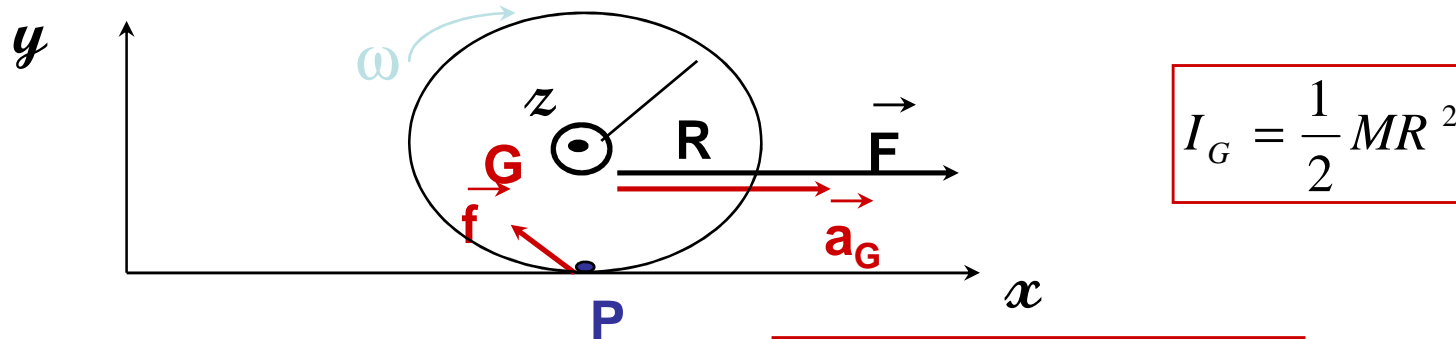
$$A = \frac{\tau mr}{I + mr^2} \leq \mu_s N$$

- Questo impone un limite al valore di τ .

$$\tau \leq \mu_s W \frac{I + mr^2}{mr}$$

Esempio:

moto di puro rotolamento di un disco omogeneo di raggio R e massa M
momento di inerzia rispetto all'asse z passante per G :



$$\Rightarrow f_x = \frac{-F}{1 + MR^2 / I_G} = -\frac{F}{3}$$

$$a_{CMx} = \frac{F / M}{1 + I_G / MR^2} = \frac{F / M}{1 + 1/2} \Rightarrow a_{CMx} = \frac{2}{3} \frac{F}{M} \quad \left(= \frac{F + f_x}{M} \right)$$

L'accelerazione a_{CM} è inferiore a quella che si avrebbe per un punto materiale di massa M soggetto alla stessa forza F .

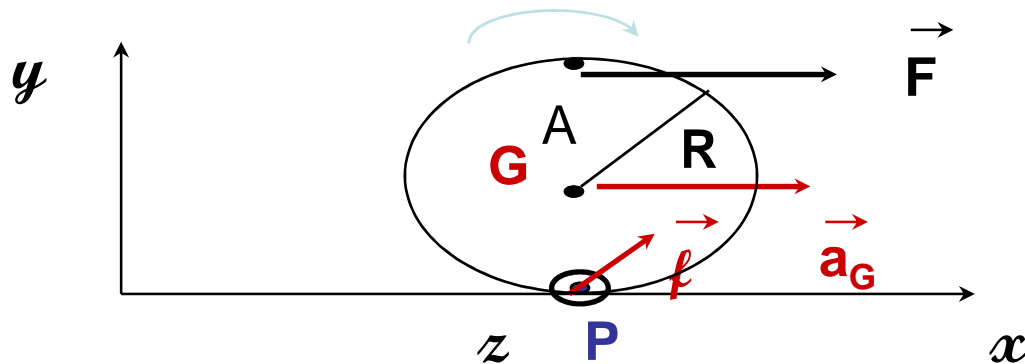
Il lavoro compiuto dalla forza F in un tratto Δx :

$$W_F = F\Delta x = \Delta E_k = \frac{1}{2} Mv_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3M}{2} v_G^2$$

determina un aumento di **energia cinetica sia di traslazione che di rotazione**, mentre per un punto materiale:

Forza d'attrito statico nel puro rotolamento

La forza d'attrito statico f_x non sempre è opposta al moto; ad esempio, se la forza 'motrice' F è applicata nel punto A sulla sommità del disco:

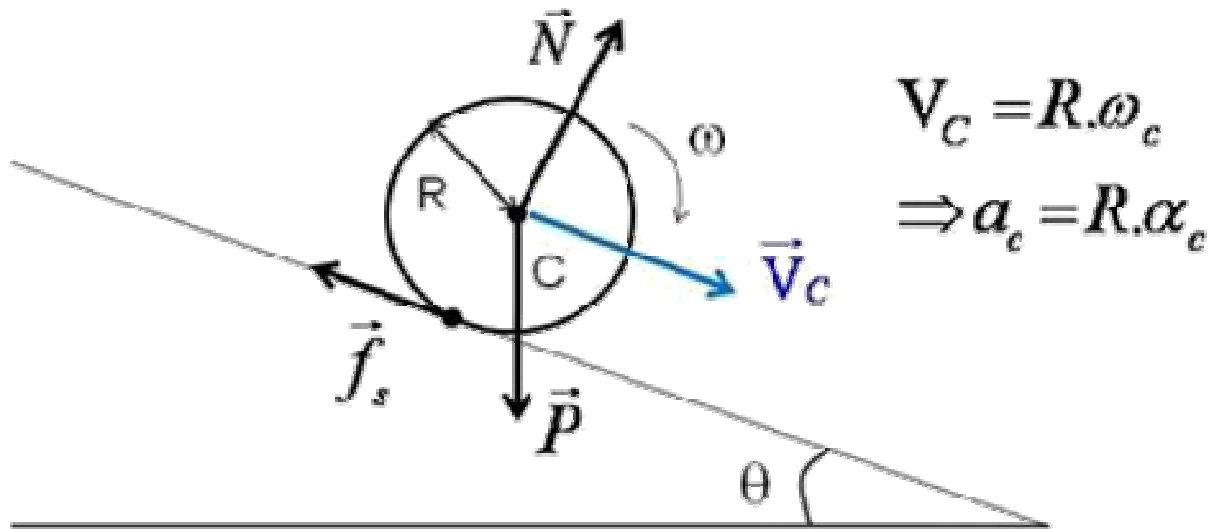


$$\frac{dL_{Pz}}{dt} = I_P \alpha_z = \left(\vec{PA} \times \vec{F} \right)_z = -2RF \quad \text{con: } I_P = \frac{3}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow \alpha = |\alpha_z| = \frac{2RF}{I_P} = \frac{4F}{3MR} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \alpha R = \frac{4F}{3M}$$

$$\Rightarrow f_x = M a_{CM} - F = \frac{F}{3} > 0.$$

Sfera che rotola su piano inclinato



$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \sin \theta - f_s = m a_c \\ f_s \cdot R = I_c \cdot \alpha_c \end{cases} \Rightarrow a_c = \left(\frac{m R^2}{m R^2 + I_c} \right) g \sin \theta \leq g \sin \theta \quad f_s = \left(\frac{I_c}{m R^2 + I_c} \right) g \cdot \sin \theta$$

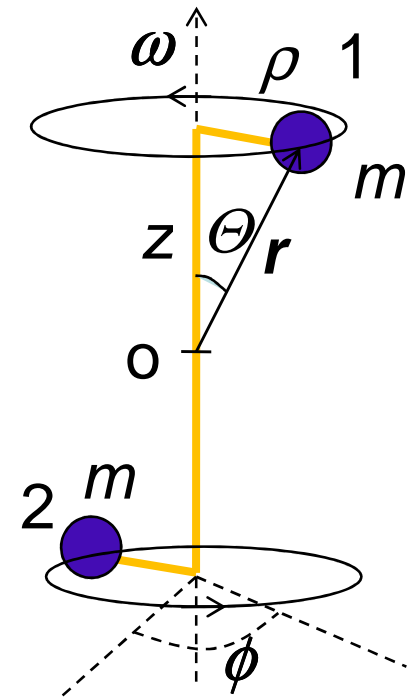
$$\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_c^2 = m g \sin \theta \Delta x$$

$$\left(\frac{a_c}{g \cdot \sin \theta} \right) = \frac{5}{7} \text{ (sfera)} > \frac{2}{3} \text{ (cilindro)} > \frac{1}{2} \text{ (anello)}$$

APPROFONDIMENTI

Un esempio semplice di L non $// \omega$

- Consideriamo un sistema formato da una sbarra di lunghezza $2z$, a ciascuna estremità della quale è posta una sbarretta di lunghezza ρ e una massa m
- Supponiamo che la sbarra e le due sbarrette abbiano massa trascurabile
- Supponiamo che il sistema ruoti attorno alla direzione (fissa) della sbarra con azimut ϕ e velocità ω
- Calcoliamo il momento angolare del sistema rispetto al punto mediano O della sbarra



Un esempio semplice di \mathbf{L} non $\parallel \boldsymbol{\omega}$

- I contributi delle due masse sono uguali

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = 2\vec{r} \times m\vec{v} = 2\vec{l}$$

- Poiche' il moto delle masse e' circolare, la componente longitudinale di \mathbf{L} vale

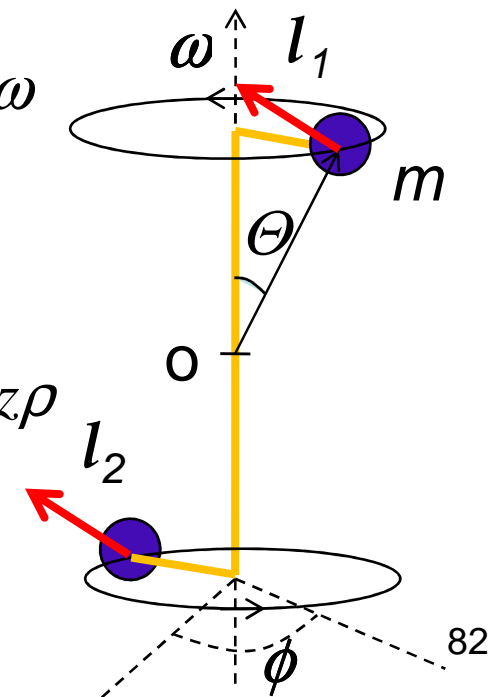
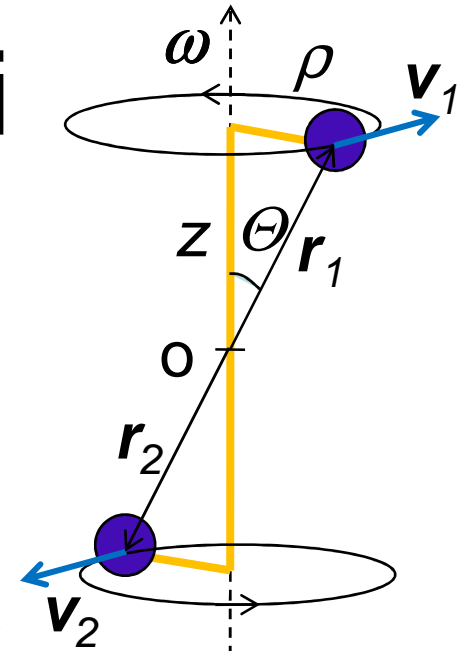
$$L_{\parallel} = 2l_{\parallel} = 2rmv \sin \Theta = 2mr\omega\rho \sin \Theta = 2m\rho^2 \omega$$

$$\vec{L}_{\parallel} = 2m\rho^2 \omega \hat{\omega} = 2m\rho^2 \vec{\omega} = I(\hat{\omega})\vec{\omega}$$

- E quella trasversale

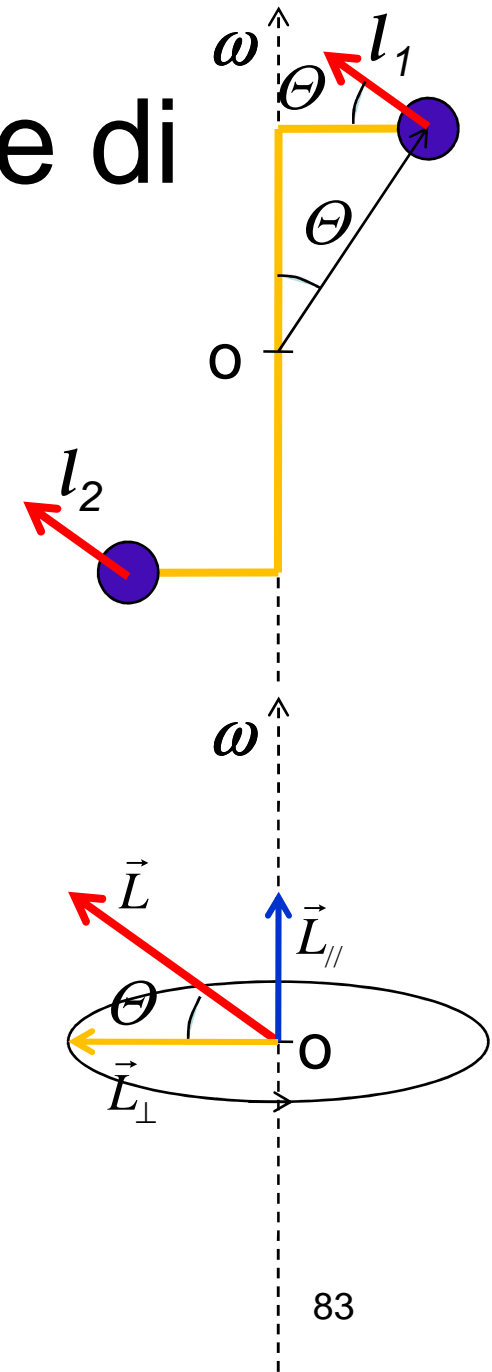
$$L_{\perp} = 2l_{\perp} = 2rmv \cos \Theta = 2mr\omega\rho \cos \Theta = 2m\omega z\rho$$

$$\vec{L}_{\perp} = 2m\omega z\rho(-\hat{\rho}(t)) = -2m\omega z\vec{\rho}(t)$$



Un esempio semplice di L non $// \omega$

- La componente longitudinale e' proporzionale a ω secondo il momento d'inerzia, che e' costante
- La componente trasversale ruota attorno all'asse (precessione) con modulo proporzionale a ω



Un esempio semplice di L non $// \omega$

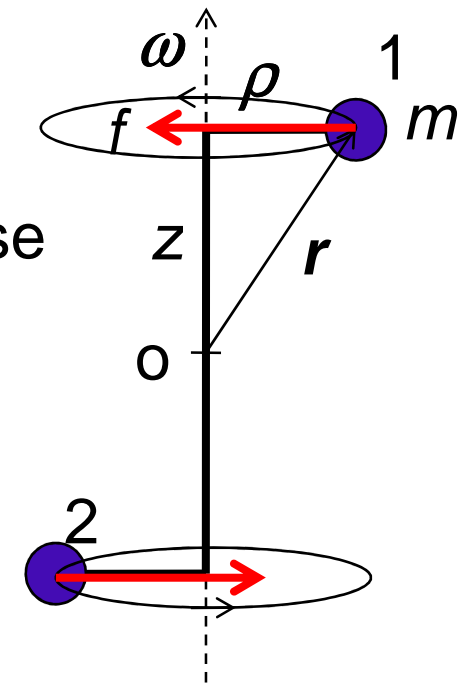
- Come si è detto il moto trasversale (2-D) è retto dall'eq.

$$\vec{\tau}_{\perp} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

- con $\vec{\tau}_{\perp}$ perpendicolare all'asse e che tende a farlo ruotare, cioè a far cambiare ω in direzione
- Cerchiamo ora di capire l'origine di $\vec{\tau}_{\perp}$

Un esempio semplice di L non $// \omega$

- Affinche' le masse descrivano un moto circolare, e' necessario che sia presente una forza centripeta per ciascuna di esse
- Tali forze devono essere generate dall'asse
- Se vogliamo che l'asse rimanga fisso, occorre che i supporti che lo sostengono resistano alle forze dovute all'asse stesso
- I supporti reagiscono con forze uguali e contrarie a quelle dell'asse (ed uguali a quelle centripete)



Un esempio semplice di L non $// \omega$

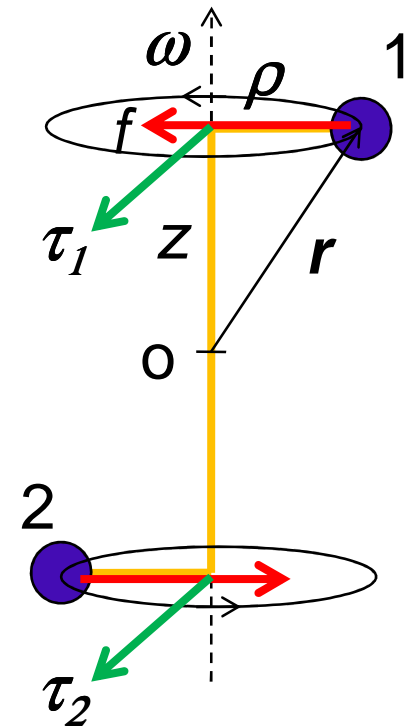
- Il momento delle forze centripete e`

$$\vec{\tau}_{\perp} = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{f}_2$$

- I due contributi sono uguali, hanno direzione $-\hat{\varphi}$ e modulo fz

- quindi

$$\vec{\tau}_{\perp} = -2fz\hat{\varphi} = -2m\omega^2\rho z\hat{\varphi} = -(2m\rho z)\omega^2\hat{\varphi}$$



Un esempio semplice di L non // ω

- Ricordando l'espressione del momento angolare trasversale

$$\vec{L}_{\perp} = -2m\omega z\rho\hat{\rho}$$

- e la derivata del versore ρ : $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\varphi}\omega$
- si verifica facilmente il teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = -2m\omega z\rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -(2m\rho z)\omega^2\hat{\varphi} = \vec{\tau}_{\perp}$$

Un esempio semplice di L non // ω

- Per riassumere: l'asse agisce sulle masse generando il momento di forza trasversale e le due masse agiscono sull'asse con forze che tendono a farlo ruotare
- Il momento generato dai cuscinetti che supportano l'asse è uguale e contrario a quello dell'asse (per la 3^a legge della dinamica) e quindi uguale al momento trasversale
- Questi momenti devono essere resi più piccoli possibile, per ridurre l'usura dei cuscinetti
- Si cerca quindi di rendere L parallelo a ω , facendo ruotare il corpo attorno ad un asse di simmetria

TEOREMA DI POINSOT

Momento anolare e matrice d'inerzia

Dato un asse di rotazione, è possibile scegliere un'asse coordinato (ad es. l'asse lungo la direzione di rotazione; in questo caso: $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$)
l'espressione per il momento angolare:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{pmatrix}$$

si semplifica :

$$L_x = I_{xz} \omega$$

$$L_y = I_{yz} \omega$$

$$L_z = I_{zz} \omega \equiv I_z \omega$$

← componente del
momento angolare
lungo l'asse di rotazione

Tuttavia, essendo in generale $I_{xz} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$,
il momento angolare ha componenti lungo gli assi x,y
perpendicolari all'asse di rotazione, ossia $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$.

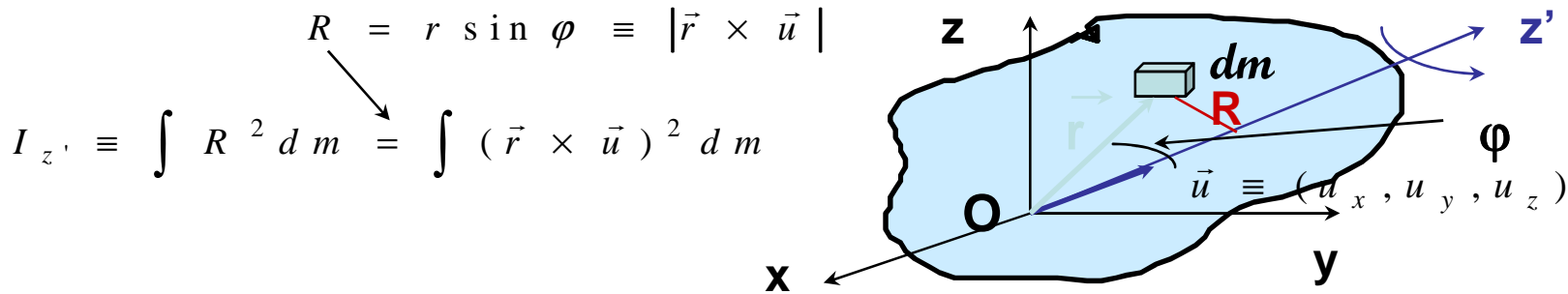
Se $I_{xz} = I_{yz} = 0$, l'asse z e' un asse principale di inerzia.

⇒ Un sistema di coordinate nel quale la **matrice di inerzia** è **diagonale**
costituisce un **sistema di assi principali di inerzia**⁹⁰

Teorema di Poinsot

Il momento d'inerzia $I_{z'}$ rispetto ad un generico asse z' di rotazione passante per il punto O e individuato dal versore $\vec{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$ è esprimibile in funzione del tensore di inerzia I_{jk} :

$$I_{z'} = I_{xx} u_x^2 + I_{yy} u_y^2 + I_{zz} u_z^2 - 2(I_{xy} u_x u_y + I_{xz} u_x u_z + I_{yz} u_y u_z)$$



$$I_{z'} = \int [(y u_z - z u_y)^2 + (x u_z - z u_x)^2 + (x u_y - y u_x)^2] dm =$$

$$\underbrace{y^2 u_z^2 + z^2 u_y^2 - 2 y z u_z u_y}_{\text{blue}} \quad \underbrace{x^2 u_z^2 + z^2 u_x^2 - 2 x z u_z u_x}_{\text{pink}} \quad \underbrace{x^2 u_y^2 + y^2 u_x^2 - 2 x y u_x u_y}_{\text{green}}$$

$$= \int [u_x^2 (y^2 + z^2) + u_y^2 (x^2 + z^2) + u_z^2 (x^2 + y^2) - 2 y z u_y u_z - 2 x z u_x u_z - 2 x y u_x u_y] dm =$$

$$= u_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int (x^2 + z^2) dm + u_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2 u_y u_z \int y z dm - 2 u_x u_z \int x z dm - 2 u_x u_y \int x y dm$$

91

“Ellissoide di inerzia”

L'equazione che esprime il momento d'inerzia:

$$I_{z'} = I_{xx} u_x^2 + I_{yy} u_y^2 + I_{zz} u_z^2 - 2(I_{xy} u_x u_y + I_{xz} u_x u_z + I_{yz} u_y u_z)$$

può essere riscritta, dividendo ambo i membri per $I_{z'}$:

$$(1) \quad I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} X Y - 2 I_{xz} X Z - 2 I_{yz} Y Z = 1$$

con : $X \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} u_x, Y \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} u_y, Z \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} u_z$

la (1) è l'equazione di un ellissoide, detto **“ellissoide di inerzia”** del corpo rispetto al generico punto O del corpo: essa individua la **superficie i cui punti**

$P = (X, Y, Z) \equiv \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}} (u_x, u_y, u_z)$ → coseni direttori dell'asse z'

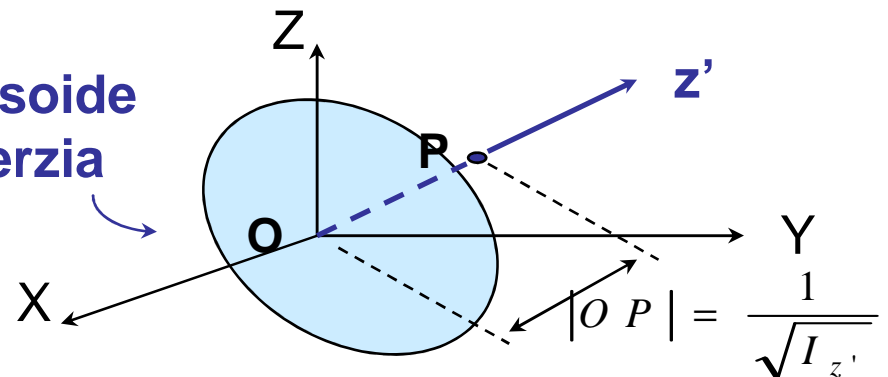
sono a distanza $|OP| = \frac{1}{\sqrt{I_{z'}}$ **dal punto O**

Il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse z' passante per un punto O del corpo è individuato dall'intersezione P dell'asse z' con l'ellissoide d'inerzia del corpo mediante la relazione:

$$I_{z'} = \frac{1}{|OP|^2}$$

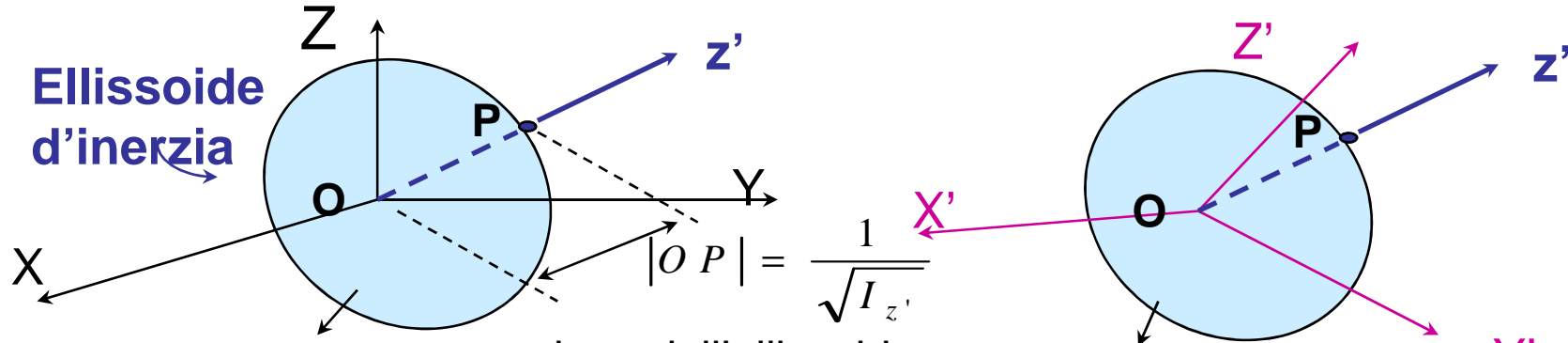
“Teorema di Poinsot”

Ellissoide d'inerzia



Ellissoide d'inerzia e assi principali

Dato un generico punto O del corpo, la forma ed orientazione nello spazio dell'ellissoide d'inerzia rispetto ad O e' caratteristica del corpo e non dipende dagli assi coordinati ; solo il valore degli elementi della matrice d'inerzia dipende da questa scelta



equazione dell'ellissoide:

$$I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} XY - 2 I_{xz} XZ - 2 I_{yz} YZ = 1$$

$$I_{x'x'} X'^2 + I_{y'y'} Y'^2 + I_{z'z'} Z'^2 - 2 I_{x'y'} X'Y' - 2 I_{x'z'} X'Z' - 2 I_{y'z'} Y'Z' = 1$$

$$I_{xx} \neq I_{x'x'} \quad I_{yy} \neq I_{y'y'} \quad , \dots \text{ ecc.}$$

E' sempre possibile "diagonalizzare" la matrice d'inerzia, ossia trovare un sistema di assi coordinati per il quale sia:

$$I \equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

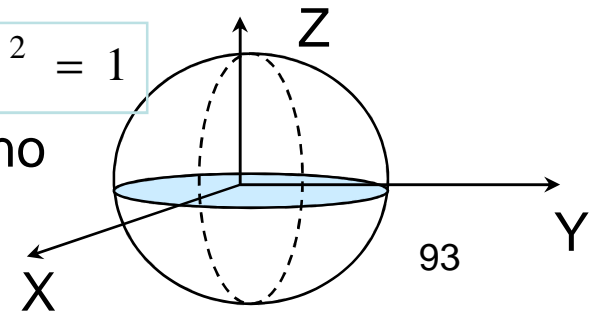
equazione dell'ellissoide:

$$I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 = 1$$

X, Y, Z "assi principali d'inerzia": per rotazioni intorno

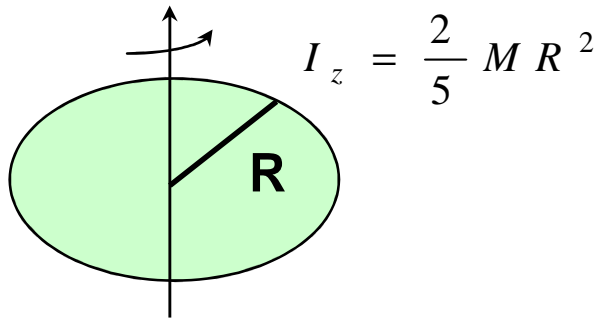
ad essi:

$$\vec{L} = I_{jj} \vec{\omega} \quad (j=x,y,z)$$

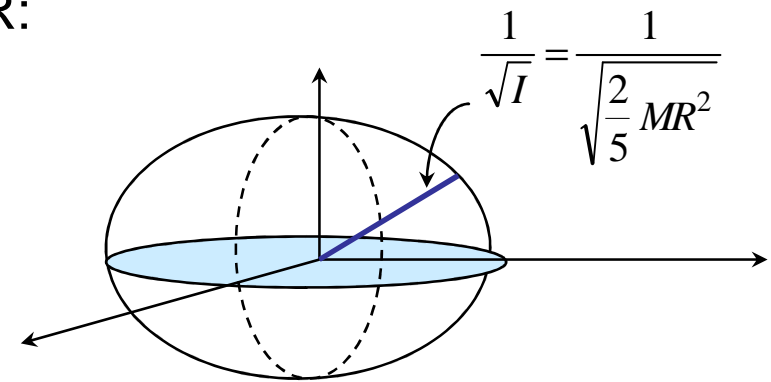


Esempi di ellissoide d'inerzia:

i) ellissoide d'inerzia di una sfera di raggio R:

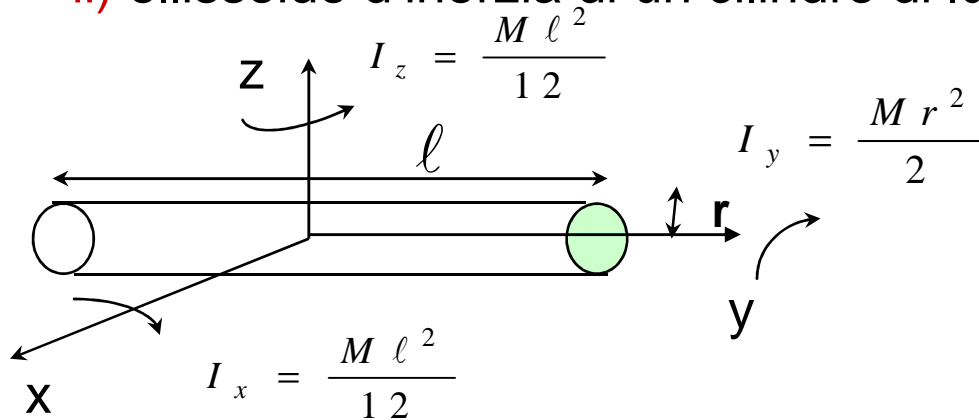


corpo sferico omogeneo

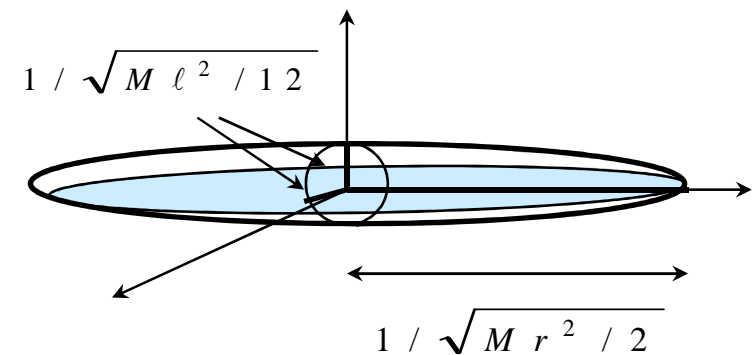


l' ellissoide d'inerzia è una sfer

ii) ellissoide d'inerzia di un cilindro di lunghezza ℓ e raggio r :



corpo cilindrico



ellissoide d'inerzia

GIROSCOPIO

Giroscopio

“**Giroscopio**” : corpo rigido rotante con un punto mantenuto fisso da un sistema vincoli; l’asse di rotazione, passante per il punto fisso, in generale varia la sua orientazione ed il moto risultante può risultare molto complicato.

Se il punto fisso è il centro di massa e non esistono forze esterne aventi mome risultante diverso da zero rispetto ad esso:

$$\vec{M}_G^{(E)} = 0$$

(\Rightarrow le reazioni vincolari che sostengono il giroscopio hanno momento nullo rispetto al CM)

il momento angolare rimane costante:

$$\vec{L}_G = \text{costante}$$

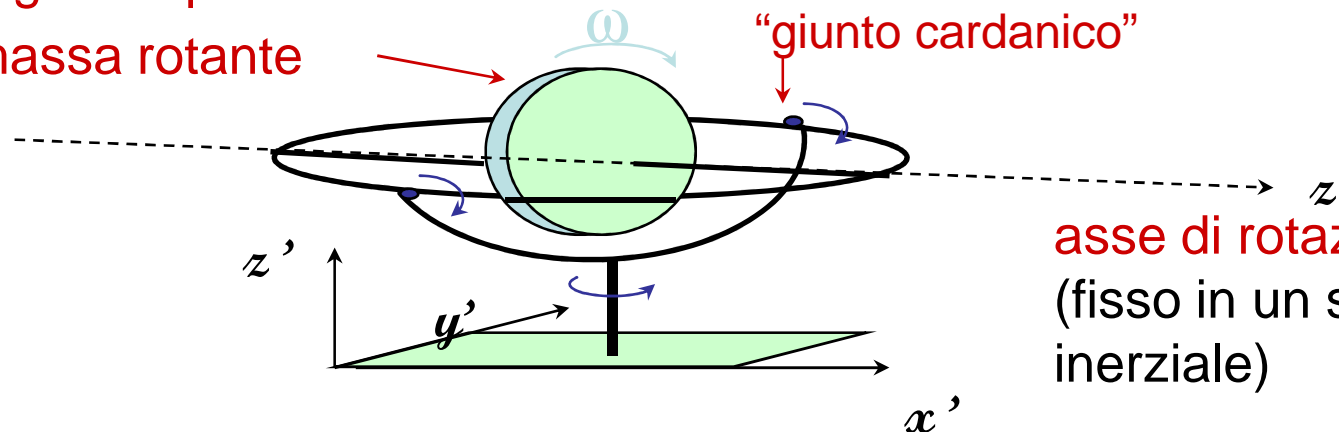
Se l’asse di rotazione è un asse principale d’inerzia: $\omega = \text{costante}$

\Rightarrow la direzione di rotazione rimane costante in un sistema inerziale :

“bussola giroscopica”

massa rotante

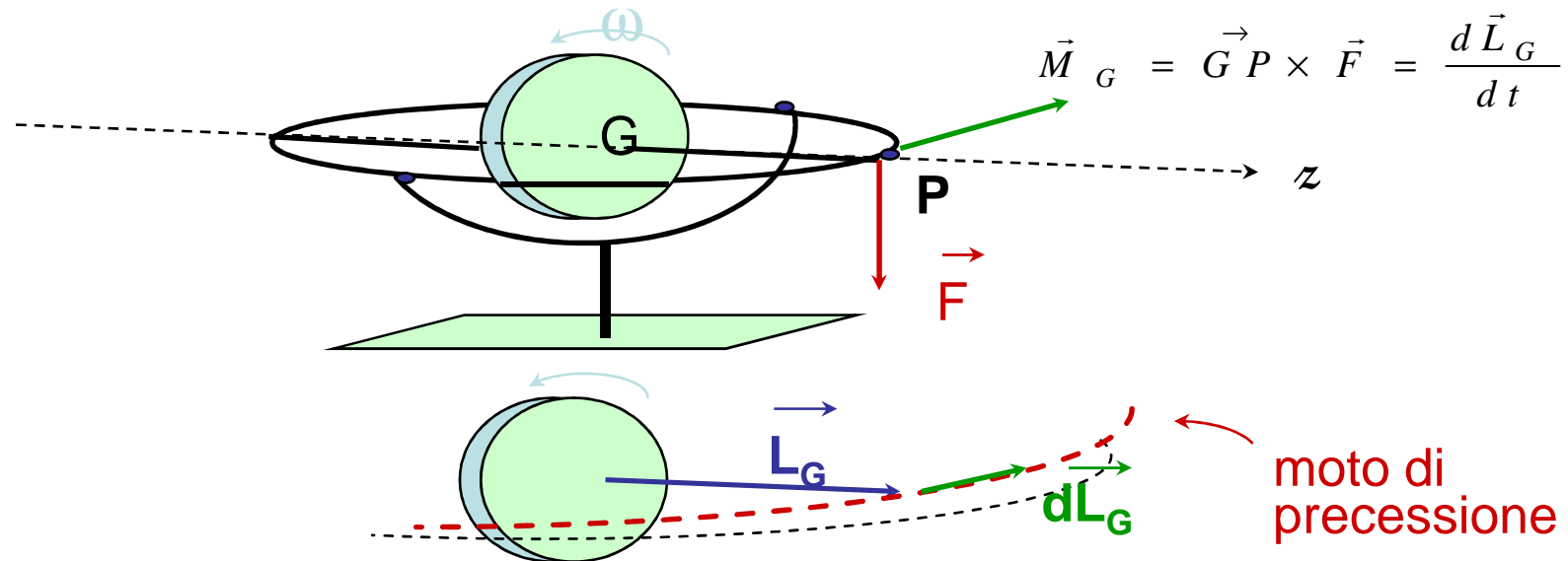
“giunto cardanico”



asse di rotazione
(fisso in un sistema
inerziale)

Precessione e nutazione

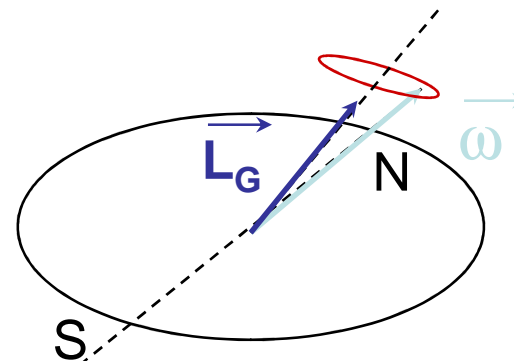
Se al giroscopio viene applicato un momento esterno si ha un **“moto di preces** del momento angolare e dell’asse di rotazione del giroscopio :



Se $M_G^{(E)} = 0$ ma l’asse di rotazione non è un asse principale d’inerzia ($\vec{L} \neq \vec{\omega}$) l’asse di rotazione ruota intorno alla direzione costante di \vec{L} : **moto di “nutazione**

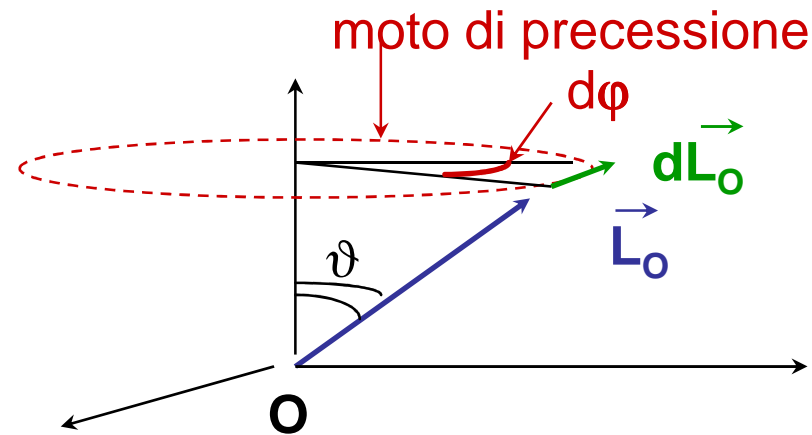
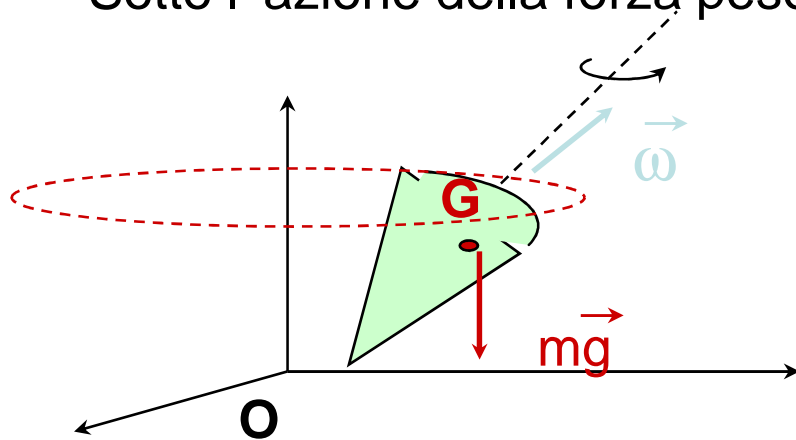
Esempio: moto della **Terra**:

l’asse di rotazione compie un moto di nutazione con periodo di 19 anni (l’angolo tra \vec{L} ed $\vec{\omega}$ è comunque molto piccolo)



Esempio: moto di precessione di una trottola

Sotto l'azione della forza peso:



$$d L_o = L_o \sin \vartheta d \varphi$$

$$\frac{d L_o}{d t} = L_o \sin \vartheta \frac{d \varphi}{d t} \equiv L_o \sin \vartheta \Omega = M_o = m g \left| \vec{O G} \right| \sin \vartheta$$

“velocità angolare di precessione”

$$\Rightarrow \Omega = \frac{m g \left| \vec{O G} \right|}{L_o}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{m g \left| \vec{O G} \right|}{I \omega}}$$

⇒ la velocità angolare di precessione Ω è inversamente proporzionale alla velocità angolare di rotazione ω della trottola