

he forniscono rispettivamente

$$15.15) \quad C_2 = 0, \quad C_1 \text{ sen } \alpha l = 0.$$

La seconda delle (15.15) è soddisfatta se $C_1 = 0$, cioè se la trave rimane rettilinea oppure se $\text{sen } \alpha l = 0$, cioè se

$$15.16) \quad \alpha l = n\pi \text{ con } n \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Dalla (15.16), tenendo conto della posizione fatta, risulta

$$N_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2},$$

da cui si osserva che esistono infiniti valori del carico critico.

In pratica, però, interessa il più piccolo ($n = 1$) di tali valori:

$$(15.17) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

cui si associa la deformata

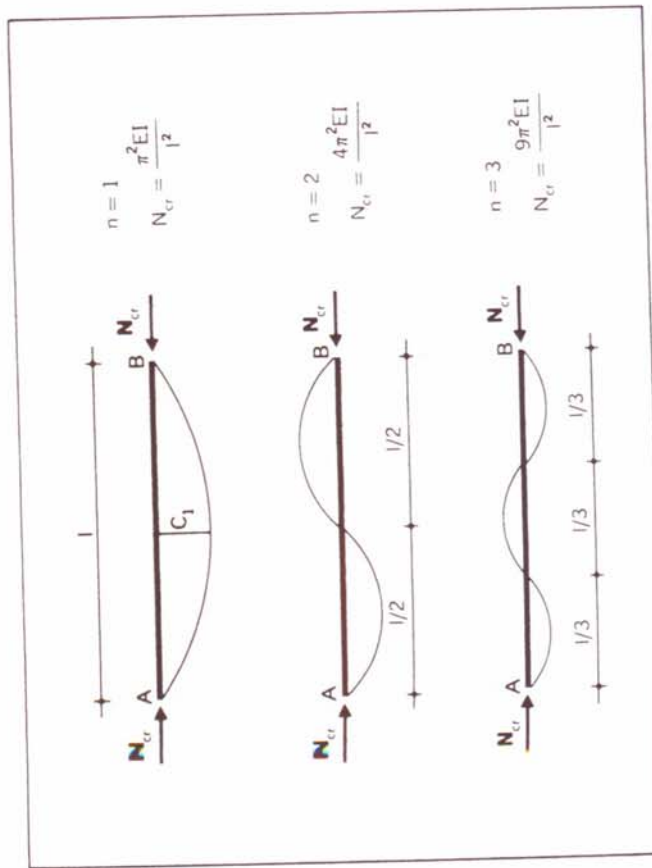


Figura 15.7

ell'equilibrio elastico

$$v = C_1 \sin \alpha z = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}$$

sinusoide di lunghezza pari ad l . In fig. 15.6 sono riportate le deformate flessionali anche per $n = 2$ e $n = 3$.

Altre condizioni di vincolo.

Per le travi a sezione costante comunque vincolate, il carico critico può essere espresso da una formula analoga alla (15.17), detta *formula di Eulero*,

$$(15.18) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

dove l_0 , che è una lunghezza fittizia detta *lunghezza libera di inflessione*, rappresenta la distanza tra due punti di flesso successivi della deformata flessionale, che è sempre una sinusoidale, a meno di una costante o di una funzione lineare in z .

Infatti, se la trave è comunque vincolata agli estremi, l'espressione del momento esterno non è più fornita dalla (15.8), ma i contributi che le eventuali reazioni esterne aggiungono possono essere al più lineari, per cui l'integrale generale dell'equazione differenziale che esprime il bilancio tra azioni stabilizzanti e instabilizzanti è ancora una sinusoidale.

Di conseguenza, anziché eseguire l'integrazione dell'equazione differenziale per le varie condizioni di vincolo, conviene stabilire la possibile deformata secondaria flessionale e confrontarla con quella fondamentale della trave appoggiata agli estremi. Nella fig. 15.7 sono riassunti i casi più comuni.

Anche nel caso di portali con traversi infinitamente rigidi, illustrati in fig. 15.8, le deformate dei ritri sono delle sinusoidi le cui lunghezze libere di inflessione risultano pari alla luce della trave (telaio con ritri incastrati) o al suo doppio (telaio con ritri incernierati alla base).

Controventatura.

Consideriamo ancora il portale semplice i cui ritri, collegati in sommità da un traverso infinitamente rigido, siano incernierati alla base. Ebbene, vogliamo determinare il carico critico nell'ipotesi che il traverso su cui agisce la forza F sia vincolato a non subire traslazioni orizzontali (fig. 15.9).

La forza F si ripartisce ugualmente sui due ritri, la cui deformata flessionale, essendo impedito lo sbandamento laterale del traverso e dovendo restare verticale la tangente alla linea elastica dei ritri nei punti di attacco A e B al traverso, corrisponde a quella di una trave incastrata e appoggiata. La

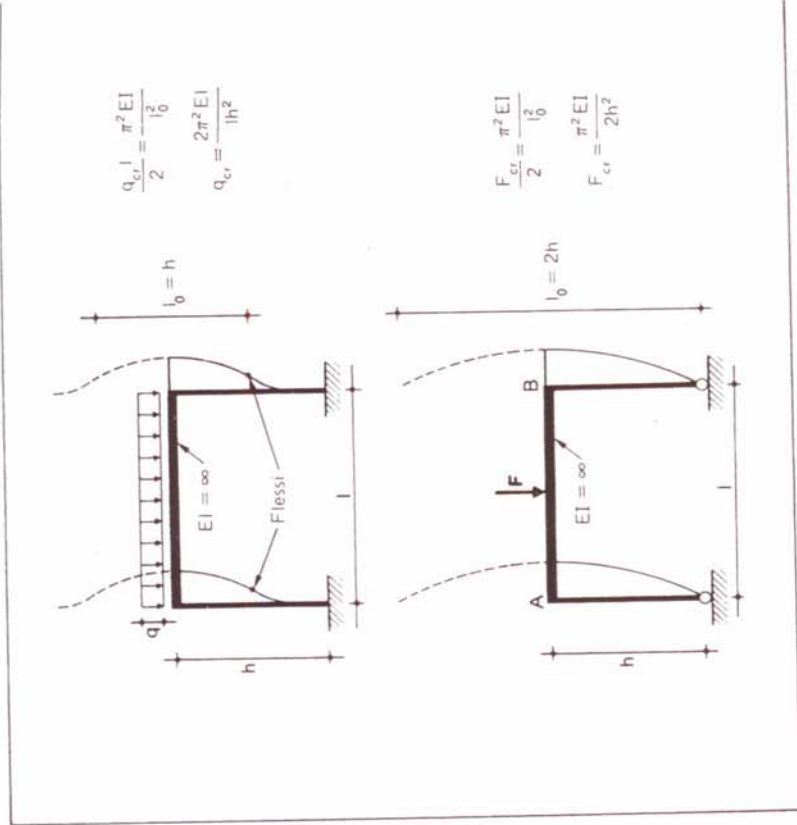


Figura 15.8

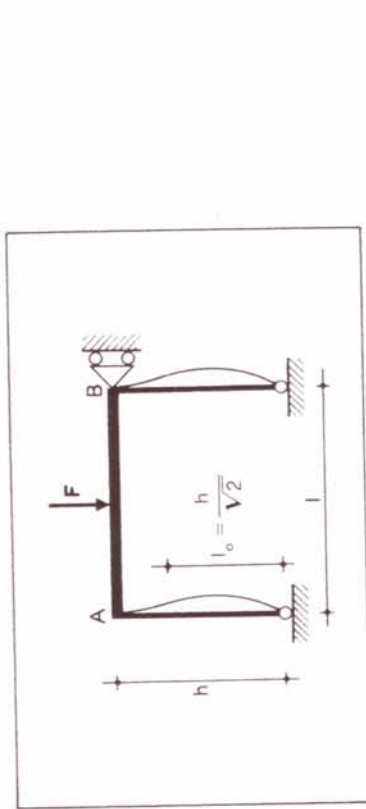


Figura 15.9

lunghezza libera di inflessione risulta pertanto pari a

$$l_0 = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

dove h , conformemente alle notazioni illustrate in fig. 15.9, rappresenta la

l'altezza della trave. Per la formula di Eulero si ha

$$\frac{F_{cr}}{2} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

da cui segue

$$F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{h^2}$$

Confrontando tale risultato con quello relativo allo schema senza il carrello in B, illustrato in fig. 15.8, si deduce facilmente che, impedendo lo sbandamento del traverso, il carico critico aumenta di 8 volte rispetto al caso di sbandamento consentito. E' tale circostanza dunque, che porta a controventare i telai con un traverso infinitamente rigido.

Osservazione.

Se la struttura può inflettersi soltanto in un piano, il momento di inerzia I che compare nella formula di Eulero (15.18) è quello relativo a tale piano. Se la trave può inflettersi secondo un piano qualsiasi, invece, il carico critico è quello corrispondente al piano di minima rigidità flessionale e, di conseguenza, il momento di inerzia da introdurre nella (15.18) è quello relativo al suddetto piano. Pertanto la formula di Eulero, in forma più completa, si scrive

$$(15.19) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2_0}$$

Per meglio chiarire quanto esposto sopra, consideriamo, ad esempio, la trave a mensola soggetta ad uno sforzo assiale di compressione (fig. 15.10.a). Nel caso che la sezione sia a doppio T, se la trave può inflettersi secondo qualsiasi piano (fig. 15.10.b), il momento di inerzia da introdurre nella formula di Eulero è quello minimo, cioè

$$I_{\min} = I_y$$

Se invece la mensola può assumere la sua configurazione variata soltanto nel piano yz (fig. 15.10.c), risulta

$$I_{\min} = I_x$$

Nel caso della sezione quadrata e circolare, illustrate nelle figg. 15.10.d, e, il momento di inerzia minimo coincide con il momento di inerzia rispetto a

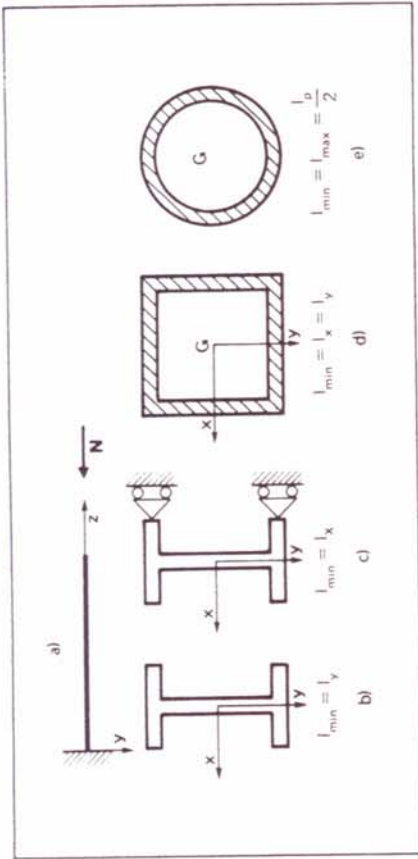


Figura 15.10

qualsiasi asse baricentrico.

Da quanto detto consegue che, per avere il migliore sfruttamento del materiale e quindi realizzare la massima economia, la sezione delle aste sottili compresse deve avere come ellisse di inerzia un cerchio.

Limiti di validità della formula di Eulero.

La formula di Eulero (15.18) viene ricavata dall'uguaglianza tra momento instabilizzante e momento stabilizzante e l'espressione di quest'ultimo si ottiene dall'equazione della linea elastica

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI},$$

valida nella trattazione alla De Saint-Venant. Pertanto, detta σ_0 la tensione normale al limite di proporzionalità del materiale e

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A}$$

la *tensione normale critica*, cioè la tensione corrispondente al carico critico N_{cr} nell'asta, la formula di Eulero è valida se risulta

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_0,$$

ovvero

$$(15.20) \quad \sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{Al^2_0} = \frac{\pi^2 EA \rho^2_{\min}}{Al^2_0} \leq \sigma_0.$$

Definendo come *sminuzza* dell'asta il rapporto

$$(15.21) \quad \lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}}$$

fra la lunghezza libera di inflessione e il minimo raggio di inerzia della sezione, per le (15.20) e (15.21) si può scrivere

$$(15.22) \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_0$$

Definendo *snellezza limite* λ_0 il valore di λ per cui si ha

$$\sigma_{cr} = \sigma_0,$$

dalla (15.22) consegue che

$$(15.23) \quad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}.$$

La formula di Eulero, quindi, è valida solo per

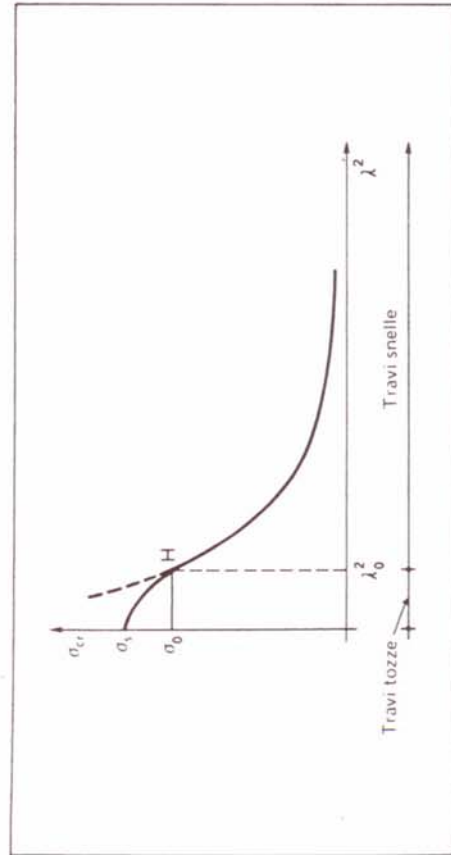
$$\lambda \geq \lambda_0.$$

Come è facile dedurre dalla (15.23), la snellezza limite dipende solo dalle caratteristiche E , σ_0 del materiale costituente la trave e non dalla geometria della stessa.

La relazione tra λ^2 e σ_{cr} fornita dalla formula di Eulero

$$(15.24) \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

è un'iperbole equilatera (detta *iperbole di Eulero*) avente per asintoti gli



assi σ_{cr} e λ^2 , come è mostrato in fig. 15.11.

Se $\lambda > \lambda_0$, cioè per travi snelle, la tensione critica di Eulero può essere considerata come la tensione di collasso.

Se invece $\lambda < \lambda_0$, cioè per travi tozze, la formula di Eulero non è più valida. Per tale motivo il ramo di iperbole a sinistra di H è disegnato a tratti, esso è costituito da un insieme di punti le cui coordinate (σ_{cr}, λ^2) soddisfano l'equazione (15.24) ma, essendo $\lambda < \lambda_0$, l'iperbole di Eulero fornisce per essi valori di σ_{cr} , e quindi di N_{cr} , in eccesso rispetto al vero (infatti σ_{cr} non può mai superare il valore della tensione di crisi a compressione). In tal caso, qualora σ_0 coincida con la tensione di snervamento σ_s , la σ_0 stessa può essere considerata come tensione di collasso, quindi la linea limite per le σ_{cr} nel campo $\lambda < \lambda_0$ è l'orizzontale continua per H . Se invece $\sigma_s > \sigma_0$, la linea limite deve partire da σ_s per $\lambda = 0$ e raccordarsi all'iperbole di Eulero in H (con la stessa tangente, per continuità).

Osservazioni.

a) Per un acciaio da costruzione risulta

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_0 = 2000 \text{ kg/cm}^2, \quad \lambda_0 \cong 100.$$

b) Usando la formula di Eulero per $\lambda < \lambda_0$, la trave cedrebbe per schiacciamento prima che per inflessione laterale. Per una trave tozza, cioè, lo sbandamento flessionale, secondo la (15.24), si avrebbe per una tensione superiore a quella di snervamento e rottura del materiale soggetto a semplice compressione. Per $\lambda > \lambda_0$, quindi, la verifica si fa con la formula di Eulero; per $\lambda < \lambda_0$ la verifica si fa a compressione semplice e, volendo effettuare verifiche al carico critico per le travi tozze, si possono usare formule empiriche (Rankine, Tetmayer). E' conveniente però usare un metodo generale di verifica come il *metodo omega*, di cui si tratterà fra breve.

c) Poichè il carico critico fornito dalla (15.18) dipende dal modulo di elasticità normale E e non dalla tensione di rottura del materiale, non è conveniente, dal punto di vista economico, usare acciai ad alta resistenza che, praticamente, hanno lo stesso modulo E degli acciai comuni.

Metodo omega.

Il metodo omega, valido solo per travi a sezione costante, è un procedimento generale di verifica per un'asta compressa applicabile per qualsiasi valore della snellezza λ (6). Infatti tale metodo tiene automaticamente con-

(6) Le norme vigenti limitano i valori massimi della snellezza a 200 per le membrature principali e a 250 per quelle secondarie.

o delle curve limiti che sostituiscono l'iperbole di Eulero nell'intervallo $[0, \lambda_0]$.

Esso consente quindi di effettuare la verifica al carico di punta in maniera analoga a quella a semplice compressione, amplificando lo sforzo assiale di compressione del coefficiente ω , cioè applicando la seguente formula:

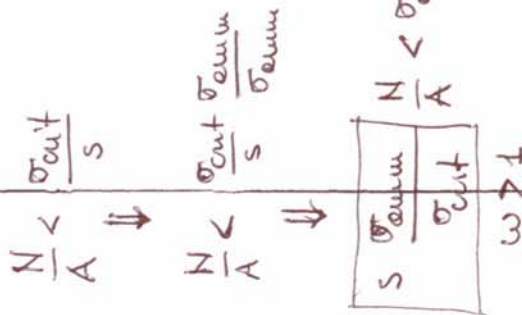
$$(15.25) \quad \frac{\omega N}{A} \leq \sigma_{am}$$

Il coefficiente ω è un numero adimensionale che viene letto su tabelle in funzione della snellezza (λ) e del materiale. Nelle tabb. 15.1 e 15.2 sono riportati i valori di ω (in funzione di λ) per i singoli profilati e tubi di acciaio di tipo 1 e tipo 2.

I valori di ω sono forniti dalla relazione

Tabella 15.1. Coefficienti ω per singoli profilati e tubi di acciaio tipo 1.

λ	ω									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,09	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13
30	1,13	1,14	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
40	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,22	1,23	1,23
50	1,24	1,25	1,25	1,26	1,27	1,27	1,28	1,29	1,30	1,30
60	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40
70	1,41	1,42	1,44	1,45	1,46	1,47	1,49	1,50	1,51	1,53
80	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	1,63	1,65	1,67	1,69	1,71
90	1,73	1,75	1,78	1,80	1,83	1,85	1,87	1,90	1,92	1,95
100	1,97	2,00	2,03	2,06	2,09	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23
110	2,26	2,29	2,32	2,36	2,39	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55
120	2,58	2,62	2,65	2,69	2,72	2,76	2,80	2,83	2,87	2,90
130	2,94	2,98	3,02	3,06	3,10	3,14	3,19	3,23	3,27	3,31
140	3,35	3,39	3,44	3,48	3,53	3,57	3,61	3,66	3,70	3,75
150	3,79	3,84	3,89	3,95	4,00	4,05	4,10	4,15	4,21	4,26
160	4,31	4,36	4,42	4,47	4,53	4,58	4,64	4,69	4,74	4,80
170	4,85	4,90	4,96	5,01	5,07	5,12	5,18	5,23	5,29	5,34
180	5,40	5,46	5,52	5,58	5,64	5,69	5,75	5,81	5,87	5,93
190	5,99	6,05	6,11	6,17	6,23	6,29	6,35	6,41	6,47	6,53
200	6,59	6,65	6,71	6,78	6,84	6,90	6,96	7,02	7,09	7,15
210	7,21	7,27	7,34	7,40	7,46	7,52	7,59	7,65	7,71	7,78
220	7,84	7,91	7,98	8,05	8,12	8,19	8,27	8,34	8,41	8,48
230	8,55	8,63	8,71	8,79	8,87	8,96	9,04	9,12	9,20	9,28
240	9,36	9,44	9,52	9,61	9,69	9,77	9,85	9,93	10,02	10,10
250	10,18	—	—	—	—	—	—	—	—	—



$$\omega = \sigma_{am} \frac{s}{\sigma_{cr}} = \frac{\sigma_{amm} s \lambda^2}{\pi^2 E}$$

dove σ_{am} è la tensione normale ammissibile, s il coefficiente di sicurezza adottato e σ_{cr} la tensione critica cui corrisponde l'inflessione laterale. La tensione critica σ_{cr} è uguale a quella critica σ_{cr} fornita dalla formula di Eulero per $\lambda \geq \lambda_0$. Il coefficiente di sicurezza s varia da 1,5 per $\lambda = 0$ a 2,5 per $\lambda = 250$.

Il metodo omega può essere usato anche per il progetto, ma, avendo contemporaneamente due incognite, si può procedere solo per tentativi. Le incognite sono la sezione A e il coefficiente ω . Quest'ultimo è legato a λ , che a sua volta dipende da A . Fissata pertanto l'area della sezione di tentativo

$$\bar{A} = \frac{N}{\sigma}$$

Tabella 15.2. Coefficienti ω per singoli profilati e tubi di acciaio tipo 2.

λ	ω									
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16
30	1,17	1,18	1,18	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,23	1,23
40	1,24	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,30	1,31
50	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,38	1,40	1,14	1,42	1,44
60	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62
70	1,64	1,67	1,69	1,72	1,75	1,77	1,80	1,83	1,86	1,88
80	1,91	1,94	1,98	2,01	2,04	2,07	2,11	2,14	2,17	2,21
90	2,24	2,27	2,31	2,34	2,38	2,41	2,44	2,48	2,51	2,55
100	2,58	2,62	2,66	2,71	2,75	2,79	2,83	2,87	2,92	2,96
110	3,00	3,05	3,10	3,15	3,20	3,24	3,29	3,34	3,39	3,44
120	3,49	3,55	3,61	3,66	3,72	3,78	3,84	3,90	3,95	4,01
130	4,07	4,13	4,20	4,26	4,33	4,39	4,46	4,52	4,59	4,65
140	4,72	4,79	4,87	4,94	5,01	5,08	5,16	5,23	5,30	5,38
150	5,45	5,54	5,62	5,71	5,79	5,88	5,97	6,05	6,14	6,22
160	6,31	6,40	6,49	6,57	6,66	6,75	6,84	6,93	7,01	7,10
170	7,19	7,28	7,37	7,46	7,55	7,63	7,72	7,81	7,90	7,99
180	8,08	8,17	8,26	8,35	8,44	8,53	8,63	8,72	8,81	8,90
190	8,99	9,08	9,18	9,27	9,36	9,45	9,55	9,64	9,73	9,83
200	9,92	10,01	10,11	10,20	10,30	10,39	10,48	10,58	10,67	10,77
210	10,86	10,96	11,05	11,15	11,24	11,34	11,43	11,53	11,63	11,72
220	11,82	10,92	12,02	12,12	12,22	12,32	12,43	12,53	12,63	12,73
230	12,83	12,96	13,09	13,22	13,35	13,47	13,60	13,73	13,86	13,99
240	14,12	14,26	14,39	14,53	14,66	14,80	14,91	15,07	15,21	15,34
250	15,48	—	—	—	—	—	—	—	—	—