QUESITI NUMERICI (Analisi Dimensionale).

Utilizzando le informazioni ricavabili dalla grandezza fisica che ci si aspetta come risultato e dai valori numerici forniti, individuare, tra le espressioni riportate, quella/e dimensionalmente corrette, precisando la motivazione per quelle errate. Ove necessario, per l'accelerazione normale di gravità si assuma il valore (espresso con $6\ \text{c.s.}$) $g_n = 9.80665\ \text{m}/\text{s}^2$.

N01] La velocità finale v_f di un punto materiale in caduta libera per un tempo $t_f = 112.5\ \mathrm{ms}$, partendo da fermo, è data da

a) $v_f = g_n t_f^2$ b) $v_f = g_n t_f$

Svolgimento:

Come si può ricavare dalla tabella delle grandezze fisiche utilizzate in meccanica, le dimensioni[1] di una velocità sono $\mathrm{L\ T^{-1}}$ (si legge "lunghezza per tempo alla meno uno") e, nel SI, si esprime in $\mathrm{m/s}$ (si legge "metri al secondo"). Quindi, per essere dimensionalmente corretta, anche il secondo membro dell'uguaglianza deve avere tali dimensioni.
Dai valori numerici riportati, possiamo dedurre[2]

$$[g_n]=\mathrm{m/s^2}\text{ , ovvero } [g_n]=\mathrm{L\ T^{-2}}$$
$$[t_f]=\mathrm{s}\text{ , ovvero } [t_f]=\mathrm{T}$$

Tenendo conto che nelle operazioni di moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza le unità di misura (e quindi le dimensioni) seguono le usuali regole dell'algebra, abbiamo

a) $[g_n\ t_f^2]=[g_n]\,[t_f]^2=(\mathrm{L\ T^{-2}})\ (\mathrm{T})^2=\mathrm{L}$ ovvero $[g_n\ t_f^2]=\mathrm{m}$

b) $[2\ g_n\ t_f]=[g_n]\,[t_f]=(\mathrm{L\ T^{-2}})\ (\mathrm{T})=\mathrm{L\ T^{-1}}$ ovvero $[g_n\ t_f]=\mathrm{m/s}$

Pertanto l'espressione a), che da' come risultato una lunghezza, è dimensionalmente errata mentre l'espressione b), che da' come risultato una lunghezza per un tempo alla meno uno è dimensionalmente corretta.

L'espressione a) è errata perché non è possibile uguagliare una grandezza fisica espressa in metri al secondo (v_f) con una ($g_n t_f^2$) espressa in metri.

L'espressione b) è dimensionalmente corretta, ma non è detto che sia corretta. In effetti le'spressione corretta è $v_f=2\,g_n t_f$.

1 Le "dimensioni" di una grandezza fisica NON sono lunghezza, larrghezza ed altezza, come pdice qualche studente che ha solo sfogliato distrattamente un testo di fisica e si basa sull'uso di tale termine nel linguaggio corrente.

2 Per consuetudine, per indicare le dimensioni di una grandezza fisica si racchiude il simbolo tra parentesi quadre, per cui l'espressione $[g_n]=\mathrm{L\ T^{-2}}$ si legge "le dimensioni di g_n sono una lunghezza per un tempo alla meno 2". Spesso, anche se in maniera impropria, si utilizzano le unità di misura SI al posto delle dimensioni, per cui si scrive $[g_n]=\mathrm{m/s^2}$ che si legge "l'unità di misura SI di g_n è metri al secondo al quadrato".

N02] Il tempo di caduta (il tempo impiegato a raggiungere il suolo) di un punto materiale in caduta libera che parta fermo da una quota $H_0 = 7.25\ \mathrm{in}$ è

a) $t_c = \sqrt{\dfrac{H_0}{2\ g_n}}$ b) $t_c = \sqrt{\dfrac{g_n}{2\ H_0}}$

Svolgimento:

Il risultato deve essre un tempo, ovvero deve essere espresso in secondi:

$$[t_c]=\mathrm{T}\text{ , ovvero }[t_c]=\mathrm{s}$$

A parte l'accelerazione di gravità $g_n=9.80665\ \mathrm{m/s^2}$

$$[g_n]=\mathrm{m/s^2}\text{ , ovvero }[g_n]=\mathrm{L\ T^{-2}}$$

compare $H_0=7.25\ \mathrm{in}$ che è espressa in "inch" (pollici). Anche se è espressa in una unità di misura del sistema anglosassone, si tratta di una lunghezza per cui possiamo scrivere

$$[H_0]=\mathrm{L}\text{ , ovvero }[H_0]=\mathrm{m}$$

ma teniamo presente che se fossimo interessati ai valori numerici (che per il momento non stiamo prendendo i considerazione) dovremmo convertire il valore in pollici nel valore in metri.

Il " 2 " che compare in entrambe le espressioni è un "numero puro" ed è quindi "adimensionale" per cui possiamo ignorarlo nell'eseguire l'analisi dimensionale.

La radice quadrata equivale ad elevare alla potenza $1/2=0.5$

$$\mathrm{a)}\quad \left[\sqrt{\frac{H_0}{2\ g_n}}\right]=\left[\sqrt{\frac{H_0}{g_n}}\right]=\left[\frac{H_0}{g_n}\right]^{1/2}=\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s^2}}\right)^{1/2}=\left(\frac{\mathrm{m\,s^2}}{\mathrm{m}}\right)^{1/2}=\left(\mathrm{s^2}\right)^{1/2}=\mathrm{s}$$ dimensionalmente corretta

$$\mathrm{b)}\quad \left[\sqrt{\frac{g_n}{2\ H_0}}\right]=\left[\sqrt{\frac{g_n}{H_0}}\right]=\left[\frac{g_n}{H_0}\right]^{1/2}=\left(\frac{\mathrm{m/s^2}}{\mathrm{m}}\right)^{1/2}=\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m\,s^2}}\right)^{1/2}=\left(1/\mathrm{s^2}\right)^{1/2}=1/\mathrm{s}$$ dimensionalmente errata

L'espressione $\mathrm{a)}$ è dimensionalmente corretta mentre l'espressione $\mathrm{b)}$ è dimensiomalmente errata poiché fornisce come risultato un tempo alla meno uno invece di un tempo.

Si noti che, anche in questo caso l'espressioene dimensionalmente corretta è comunque errata, poiché dalla studio della cinematica si vedrà che $t_c=\sqrt{2\ H_0/g_n}$.

N03] Al termine dello svolgimento di un esercizio, due studenti trovano che l'altezza da cui è stato lanciato un pallone è

$$\text{a)}\quad H_0=\left(\frac{1}{2}g_n-v_{0z}t_f\right)t_f \qquad \text{b)}\quad H_0=\left(\frac{v_{0z}}{t_f}-\frac{g_n}{2}\right)t_f$$

dove v_{0z}, è la componente verticale della velocità iniziale, espressa in $\mathrm{m/s}$, t_f è la durata della caduta, espressa in s e g_n è l'accelerazione di gravità che è, ovviamente, espressa in $\mathrm{m/s^2}$. Determinare se le espressioni riportate sono dimensionalmente corrette.

Test in aula: a) **matricole pari –** b) **matricole dispari**

Note:

$$\text{a)}\quad H_0=\left(\frac{1}{2}g_n-v_{0z}t_f\right)t_f \qquad \text{b)}\quad H_0=\left(\frac{v_{0z}}{t_f}-\frac{g_n}{2}\right)t_f$$

I valori numerici non sono forniti ma ciò non ha alcuna importanza ai fini dell'analisi dimensionale

Il risultato deve essre una lunghezza che, nel SI, deve essere espresso in metri. Si dovrà quindi verificare che il risultato sia espresso in metri.

Tuttavia, in queste espressioni, compaiono moltiplicazioni / divisioni ed una sottrazione per cui si dovrà verificare anche che gli addendi (una sottrazione può essere vista come un'addizione in cui uno degli addendi è stato cambiato di segno) abbiano le stesse dimensioni: non è, infatti, possibile sommare o sottrarre quantità espresse in unità di misura differenti!

Procediamo quindi così:

1. verifichiamo se gli addendi hanno le stesse dimensioni
2. in caso di risposta affermativa, verifichiamo se l'espressione complessiva ha le dimensioni di una lunghezza

Svolgimento:

$$\text{a)}\quad H_0=\left(\frac{1}{2}g_n-v_{0z}t_f\right)t_f$$

Passo 1: poiché $\left[\frac{1}{2}g_n\right]=\left[g_n\right]=\mathrm{L\,T^{-2}}$ mentre $\left[v_{0z}t_f\right]=\left[v_{0z}\right]\left[t_f\right]=\mathrm{L\,T^{-1}\,T}=\mathrm{L}$ hanno dimensioni differenti (il primo si esprime in metri al secondo al quadrato mentre il secondo in metri) l'espressione a) è dimensionalmente errata ed è inutile procedere con il passo 2.

$$\text{b)}\quad H_0=\left(\frac{v_{0z}}{t_f}-\frac{g_n}{2}\right)t_f$$

Passo 1: $\left[\frac{v_{0z}}{t_f}\right]=\frac{\left[v_{0z}\right]}{\left[t_f\right]}=\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}=\mathrm{m/s^2}$ e $\left[\frac{g_n}{2}\right]=\left[g_n\right]=\mathrm{m/s^2}$ è possibile eseguire la differenza ed il risultato ha le dimensioni di entrambi gli addendi $\left[\frac{v_{0z}}{t_f}-\frac{g_n}{2}\right]=\mathrm{m/s^2}$

Passo 2: $\left[\left(\frac{v_{0z}}{t_f}-\frac{g_n}{2}\right)t_f\right]=\left[\left(\frac{v_{0z}}{t_f}-\frac{g_n}{2}\right)\right]\left[t_f\right]=\left(\mathrm{m/s^2}\right)\mathrm{s}=\mathrm{m/s}$ per cui l'espressione è dimensionalmente errata (il risultato non è espresso in metri)

In conclusione:

Sia l'espressione a) che l'espressione b) sono dimensionalmente errate: la prima perché non è possibile eseguire la sottrazione, la seconda perché il risultato è in metri al secondo invece che in metri.

Eseguire la verifica dimensionale delle seguenti espressioni:

N04] *) $D_f = \frac{v_0^2}{2g_n} \sin(\vartheta_0)$

N05] *) $W = p_v (V_2 - V_1) f$

N06] *) $D_f = \frac{v_0^2}{g_n} \sin(2\vartheta_0)$

N07] *) $\Delta h = \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) g_n$

N08] *) $H_f = t_f \left(v_0 \sin(\vartheta_0) - \frac{1}{2} g_n t_f^2 \right)$

N09] *) $W = p_v (V_2 - V_1) / f$

N10] *) $\Delta h = \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) \frac{1}{g_n}$

dove
D: lunghezza, f: frequenza, g: accelerazione, h: lunghezza, H: lunghezza, p: pressione, t: tempo, v: velocità, V: volume, ϑ: angolo piano, ρ: densità