Appunti di Teoria dei Segnali
a.a. 2014/2015

Analisi dei segnali nel dominio del tempo

L.Verdoliva

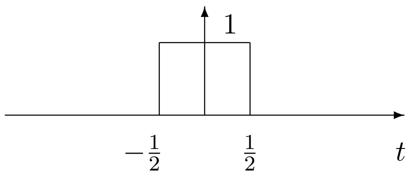
In questa prima parte del corso studieremo come rappresentare i segnali tempo continuo e discreto nel dominio del tempo e definiremo le operazioni fondamentali (cambiamento di scala, traslazione, somma, prodotto) che è possibile eseguire su tali segnali. Inoltre, introdurremo il concetto di media, energia e potenza e quello di funzione di correlazione.

1 Segnali elementari tempo continuo

Di seguito sono elencati alcuni dei principali segnali elementari tempo continuo che incontreremo in questo corso. Questi segnali possono essere combinati per costruire segnali più complessi, ma possono anche essere utili per modellare fenomeni fisici particolarmente semplici.

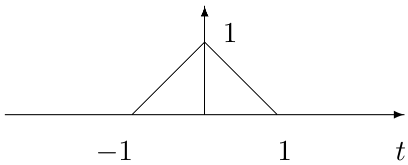
a) *Impulso o finestra rettangolare*:

$$\Pi(t) \triangleq \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



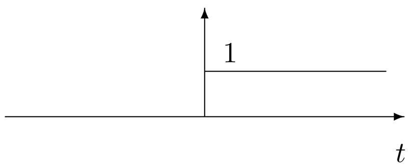
b) *Impulso o finestra triangolare*:

$$\Lambda(t) \triangleq \begin{cases} 1-|t| & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



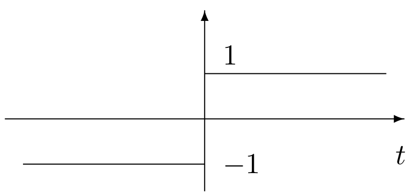
c) *Gradino unitario*:

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



d) *Signum*:

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



e) *Impulso esponenziale monolatero*:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

f) *Impulso esponenziale bilatero*:

$$x(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ e^{t} & t < 0 \end{cases}$$

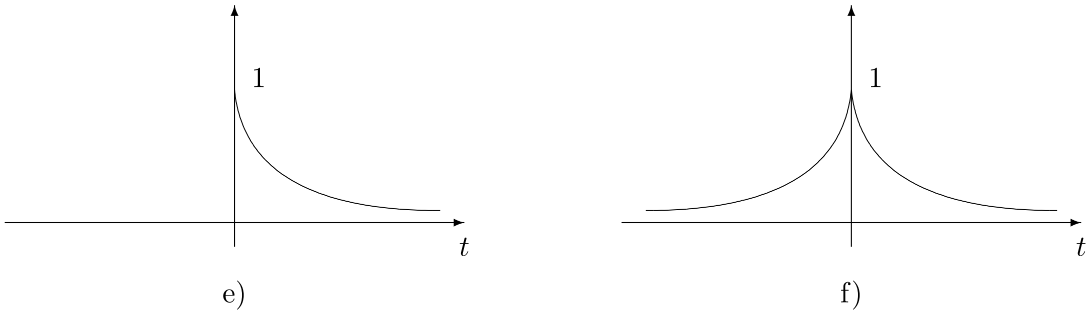


Figura 1: Segnale esponenziale monolatero e segnale esponenziale bilatero

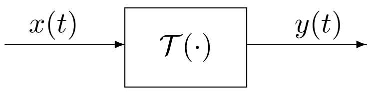
Un primo modo per classificare i segnali è quello di introdurre il concetto di *durata*, che fornisce una misura dell'estensione temporale di un segnale, cioè dell'intervallo di tempo all'interno del quale il segnale assume valori non trascurabili. I segnali possono allora essere classificati in

1. segnali a durata *rigorosamente limitata*; questi segnali si annullano identicamente al di fuori di un certo intervallo temporale come accade negli esempi a) e b);
2. segnali a durata *illimitata*; questi segnali assumono valori non trascurabili su tutto l'asse temporale (esempi c) e d));
3. segnali a durata *praticamente limitata*; questi segnali decadono asintoticamente a zero (esempi e) e f)), per cui si possono ritenere trascurabili al di fuori di un certo intervallo, che indica la misura della durata. La definizione di tale misura è quindi arbitraria e va specificata in base al tipo di applicazione considerato.

I segnali a durata illimitata sono solo un'astrazione matematica, molto utile quando si devono schematizzare certe situazioni pratiche mediante semplici modelli. Di fatto i segnali che si possono trovare nella realtà hanno sempre durata limitata, in quanto osservati su intervalli di tempo finiti. I segnali a durata rigorosamente o praticamente limitata sono anche detti *transitori*.

2 Elaborazioni elementari dei segnali tempo continuo

In questa sezione ci focalizziamo su una classe limitata, ma molto importante, di trasformazioni, che coinvolgono sia la variabile indipendente che dipendente. Queste elaborazioni possono essere descritte matematicamente mediante un sistema $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ e risultano particolarmente interessanti sia perchè modellano diverse situazioni di pratico interesse sia perchè costituiscono i blocchi elementari con cui costituire sistemi più complessi.



2.1 Traslazione

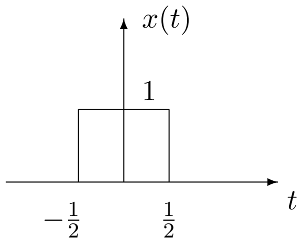
Questa operazione coinvolge la variabile indipendente:

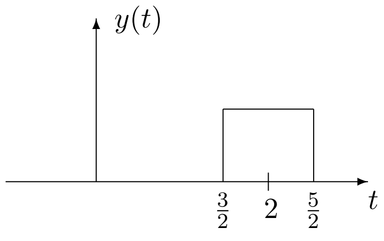
$$y(t) = x(t-b) \tag{1}$$

Per comprendere il tipo di trasformazione che subisce il segnale si può procedere osservando i valori assunti da $y(t)$ in relazione a $x(t)$ in determinati istanti. Nell'ipotesi, per esempio, in cui $b = 2$ si ha:

$$\begin{cases} y(-1) & = & x(-3) \\ y(0) & = & x(-2) \\ y(1) & = & x(-1) \\ y(2) & = & x(0) \\ y(3) & = & x(1) \end{cases}$$

Osserviamo come il valore che $x(t)$ assume nell'istante $t = t_0$ viene assunto da $y(t)$ all'istante $t = t_0 + b$ (nell'esempio $t_0 + 2$), il segnale $y(t)$ risulta quindi una versione *ritardata* del segnale $x(t)$ (traslazione verso destra). Di seguito si mostra un esempio in cui $x(t) = \Pi(t)$.





Si noti come sia anche possibile procedere analiticamente e risulta:

$$y(t) = \Pi(t-2) = \begin{cases} 1 & |t-2| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & 3/2 \leq t \leq 5/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Otteniamo in questo modo direttamente l'espressione di $y(t)$.

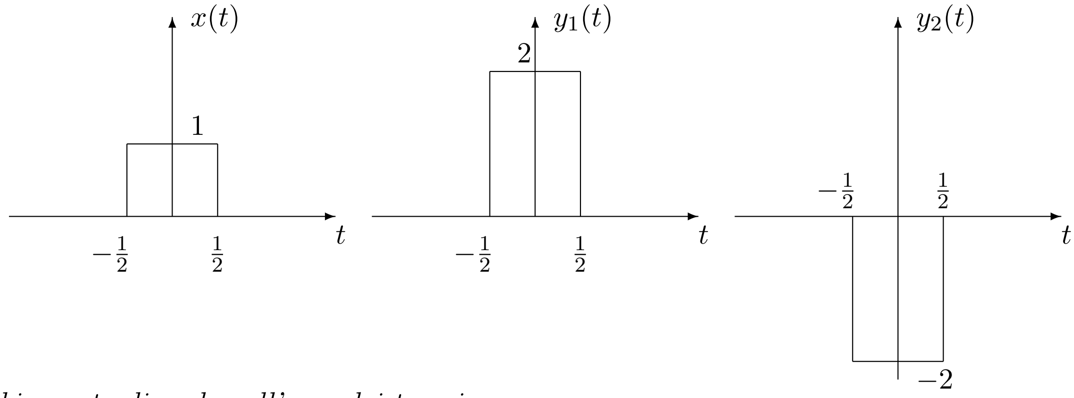
Provate a fare un ragionamento analogo quando $b = -2$, verificando che il segnale risulta una versione *anticipata* di quello originale (traslazione verso sinistra). Ricordate poi che deve sempre accadere $y(b) = x(0)$ (nell'esempio $y(2) \equiv x(0)$), la verifica di questa relazione può risultare un modo utile per controllare che si sta procedendo correttamente.

2.2 Cambiamento di scala

1. *Cambiamento di scala sulle ampiezze.* Questa operazione coinvolge la variabile dipendente:

$$y(t) = A\,x(t) \tag{2}$$

dove A rappresenta il fattore di scala. Se $A > 0$ l'effetto di tale operazione è quello di amplificare ($A > 1$) o attenuare ($A < 1$) i valori assunti dal segnale, per esempio, se $x(t) = \Pi(t)$ il segnale $y_1(t) = 2\,\Pi(t)$ sarà una versione amplificata 2 volte dell'impulso rettangolare. Se, invece, $A < 0$ il segnale, oltre all'amplificazione o attenuazione, viene ribaltato rispetto all'asse delle ascisse (*inversione*). In figura si mostra $y_2(t) = -2\,\Pi(t)$.



2. *Cambiamento di scala sull'asse dei tempi.*

$$y(t) = x(at) \tag{3}$$

A differenza del caso precedente adesso è la variabile indipendente a subire il cambiamento di scala e l'operazione risulta più delicata. Suddividiamo allora l'analisi in base ai valori assunti da a:

(a) $a > 1$.

Per comprendere l'effetto di tale operazione effettuiamo un cambiamento di scala di un fattore $a = 2$ e osserviamo cosa succede in determinati istanti di tempo:

$$\begin{cases} y(-2) &= x(-4) \\ y(-1) &= x(-2) \\ y(0) &= x(0) \\ y(1) &= x(2) \\ y(2) &= x(4) \end{cases}$$

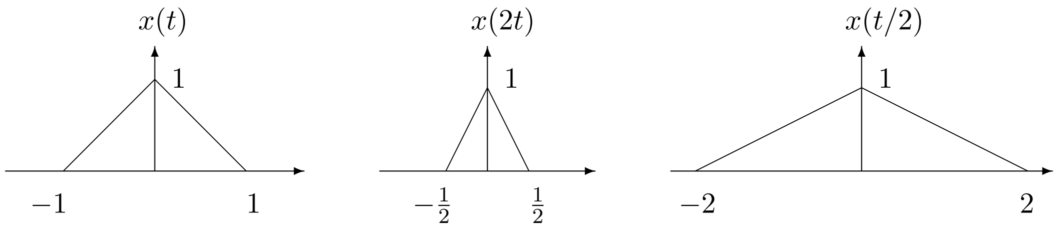
In questo caso il valore che $x(t)$ assume per $t = t_0$ viene assunto da $y(t)$ nell'istante $t = \frac{t_0}{2}$, questo significa che $y(t)$ dimezza la sua durata, il segnale subisce quindi una *compressione* rispetto all'asse delle ordinate (si noti infatti come questa operazione non alteri mai il valore assunto nell'origine $y(0) \equiv x(0)$). E' possibile però anche procedere analiticamente supponendo, per esempio, $x(t) = \Lambda(t)$:

$$y(t) = x(2t) = \Lambda(2t) = \begin{cases} 1 - |2t| & |2t| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 - 2t & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 + 2t & -1/2 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il che conferma che l'operazione effettuata è una compressione del segnale di un fattore 2, come mostrato nella figura in basso.

(b) $0 < a < 1$.
Se si ripete lo stesso discorso per $a = 1/2$ si scopre che il il valore di $x(t)$ per $t = t_0$ si ottiene in $y(t)$ per $t = 2\,t_0$, questo significa che $y(t)$ raddoppia la sua durata, il segnale subisce quindi un'*espansione* rispetto all'asse delle ordinate. Analiticamente:

$$y(t) = \Lambda(t/2) = \begin{cases} 1 - |t/2| & |t/2| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 - t/2 & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 + t/2 & -2 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



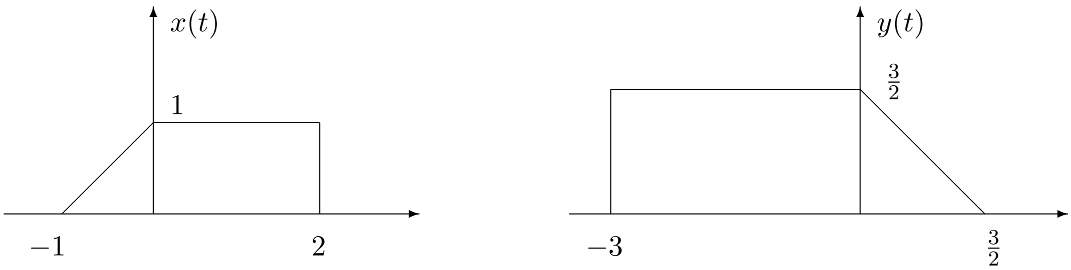
(c) $a = -1$.
Questo è un caso particolare in cui si ha $y(t) = x(-t)$, il segnale viene quindi ribaltato rispetto all'asse delle ordinate (*riflessione*).
A questo proposito ricordiamo la definizione di segnale pari e dispari:

$$\begin{cases} x(t) = x(-t) & \forall t & \text{segnale } \textit{pari} \\ x(t) = -x(-t) & \forall t & \text{segnale } \textit{dispari} \end{cases}$$

E' chiaro quindi che la riflessione non ha alcun effetto per un segnale pari che risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (come l'impulso rettangolare e triangolare), mentre coincide con un'inversione per un segnale dispari.

2.2.1 Esempio

Consideriamo il segnale $x(t)$ mostrato in figura e supponiamo di voler determinare $y(t) = \frac{3}{2}\,x(-\frac{2}{3}t)$. Vedremo sia il procedimento grafico che analitico. Notiamo che il segnale subisce un cambiamento di scala sulle ampiezze pari a un fattore $\frac{3}{2}$, una riflessione e un'espansione sull'asse temporale di un fattore $\frac{3}{2}$ (essendo $a = \frac{2}{3} < 1$). Possiamo procedere graficamente applicando queste tre operazioni al segnale in un ordine qualsiasi.



Procediamo adesso anche da un punto di vista analitico. Il segnale $x(t)$ si può scrivere come:

$$x(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per cui si ha:

$$y(t) = \frac{3}{2}x\left(-\frac{2}{3}t\right) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-\frac{2}{3}t\right) & -1 \le -\frac{2}{3}t \le 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \le -\frac{2}{3}t \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}-t & 0 \le t \le \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 \le t \le 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il segnale ottenuto analiticamente corrisponde proprio a quello rappresentato graficamente[1].

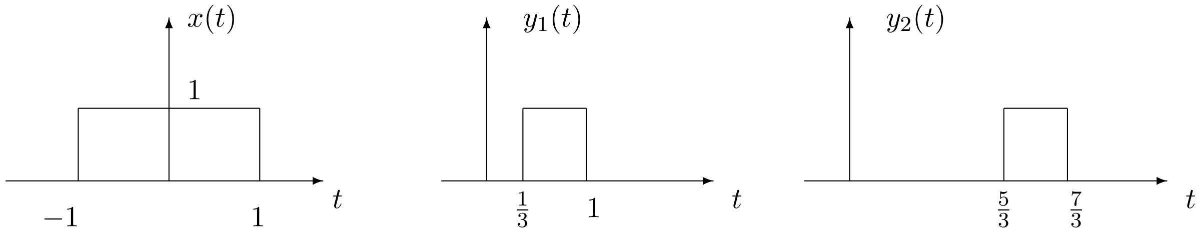
2.3 Cambiamento di scala e traslazione

Adesso mettiamo assieme le operazioni (1) e (3) e consideriamo

$$y(t) = x(at-b) \tag{4}$$

Ci chiediamo: per poter ottenere $y(t)$, quale operazione bisogna fare prima? Innanzitutto, cominciamo col verificare che se si scambia l'ordine con cui si realizzano queste due operazioni non si ottiene lo stesso risultato. Supponiamo di considerare il segnale $x(t) = \Pi(t/2)$ e di voler ottenere il segnale $y(t) = x(3t-2)$; operiamo graficamente: in un caso si trasla di 2 verso destra e poi si effettua la compressione di un fattore 1/3 ($y_1(t)$), nell'altro si opera al contrario ($y_2(t)$). Nella figura di seguito sono mostrati i risultati.

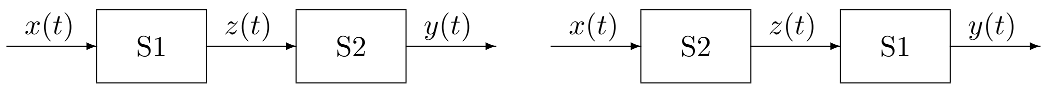
[1]Spesso vedremo che in diverse situazioni è possibile procedere sia da un punto di vista grafico che analitico. I due approcci sono perfettamente equivalenti, si sceglierà di volta in volta quello che risulta più comodo.



E' evidente che le due uscite non sono uguali. Sicuramente possiamo procedere ad un rapido controllo notando che dalla (4) deve risultare:

$$\begin{cases} y(0) & = x(-b) \\ y(b/a) & = x(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) & = x(-2) \\ y(2/3) & = x(0) \end{cases}$$

Questo ci porta a ritenere che il primo risultato sia quello corretto. Per comprenderne il motivo consideriamo la cascata delle due operazioni in ordine inverso così come mostrato nella seguente figura:



dove abbiamo indicato con S1 il sistema che effettua la traslazione e con S2 quello che realizza il cambiamento di scala. A questo punto determiniamo il legame ingresso/uscita complessivo in entrambi i casi:

S1-S2: $\begin{cases} z(t) = x(t-b) \\ y(t) = z(at) = x(at-b) \end{cases}$

S2-S1: $\begin{cases} z(t) = x(at) \\ y(t) = z(t-b) = x[a(t-b)] \end{cases}$

Notate come le due relazioni ingresso/uscita siano diverse, e quella del primo caso coincida con la (4). Riprendiamo allora l'esempio precedente, il risultato corretto è il primo in cui viene prima effettuata la traslazione e poi il cambiamento di scala, dato che la relazione tra i due segnali è proprio $y(t) = x(3t-2)$. In effetti, è possibile realizzare le operazioni in ordine invertito, ma prima bisogna esprimere la relazione ingresso/uscita come: $y(t) = x[3(t-2/3)]$. A questo punto, si può effettuare la compressione un fattore 1/3 e poi la traslazione verso destra di 2/3, ottenendo lo stesso risultato di prima.

Ovviamente si può procedere anche da un punto di vista analitico; dato che:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha:

$$y(t) = x(3t-2) = \begin{cases} 1 & -1 \le 3t-2 \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & 1/3 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

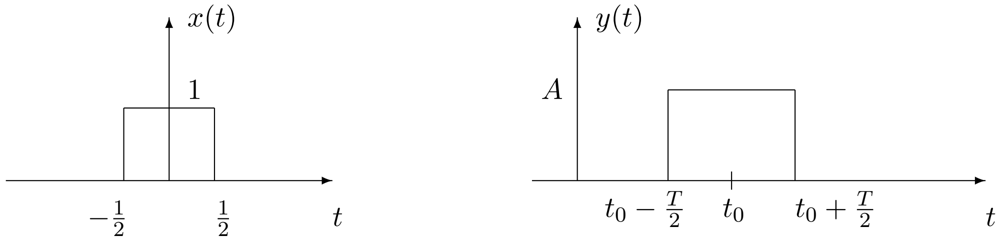
Abbiamo ottenuto ancora una conferma della correttezza del procedimento.

2.3.1 Esempio

Supponiamo di considerare l'impulso rettangolare $x(t) = \Pi(t)$ e di voler rappresentare graficamente il segnale

$$y(t) = A\,\Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

con $t_0 > 0$ e $T > 1$. Per quanto detto prima, l'impulso rettangolare va prima espanso di un fattore T e poi traslato in t_0. Si ottiene così un impulso rettangolare di ampiezza A, centrato in t_0 e di durata T, coì come mostrato in figura.



Provate a traslare prima il segnale in t_0/T e poi espanderlo di un fattore T, verificando che si ottiene lo stesso risultato.
Se per esempio si considera il segnale:

$$y(t) = 2\,\Pi\left(\frac{2t-1}{6}\right)$$

per evitare di confondersi conviene esprimerlo come:

$$y(t) = 2\,\Pi\left(\frac{t-1/2}{3}\right)$$

che rappresenta un impulso rettangolare di ampiezza 2 e durata 3 centrato in 1/2.
Allo stesso modo si può mostrare che il segnale:

$$y(t) = A\,\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

è un impulso triangolare di ampiezza A, centrato in t_0 e di durata $2T$.

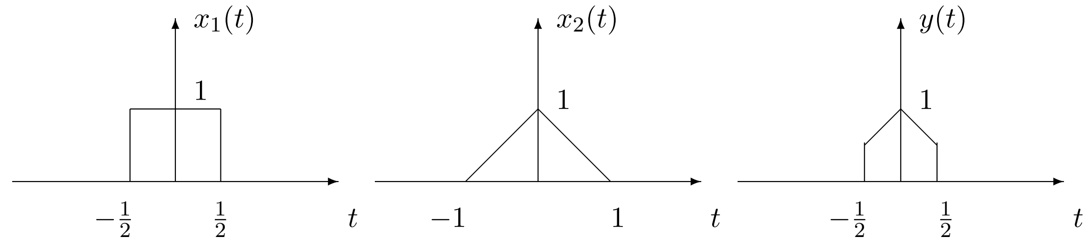
2.4 Operazioni aritmetiche tra segnali

Queste operazioni coinvolgono due o più segnali.

1. *Prodotto*

$$y(t) = x_1(t)\, x_2(t) \tag{5}$$

Il segnale $y(t)$ è dato $\forall t$ dal prodotto dei corrispondenti valori di $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Nel caso in cui i segnali non siano definiti sullo stesso intervallo temporale, il risultato è un segnale nullo, altrimenti bisogna fare attenzione all'insieme in cui si sovrappongono e in cui dovrà essere realizzato il prodotto. In figura si mostra un esempio di prodotto tra un impulso triangolare e un impulso rettangolare.



Il segnale risultante si può esprimere analiticamente come:

$$y(t) = (1 - |t|)\, \Pi(t)$$

ma anche come:

$$y(t) = (1-t)\, \Pi\left(\frac{t - 1/4}{1/2}\right) + (1+t)\, \Pi\left(\frac{t + 1/4}{1/2}\right)$$

Si noti come il prodotto di un segnale per un impulso rettangolare di ampiezza unitaria non faccia altro che delimitare l'intervallo in cui è definito il segnale, infatti risulta:

$$y(t) = x(t)\, \Pi(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modificando opportunamente la durata dell'impulso è possibile delimitare l'intervallo su cui è definito qualsiasi segnale.

Lo stesso vale per il gradino, per cui risulta:

$$y(t) = x(t)\, \mathrm{u}(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che può essere usato per riscrivere la definizione di impulso esponenziale monolatero nel seguente modo:

$$y(t) = e^{-t}\mathrm{u}(t)$$

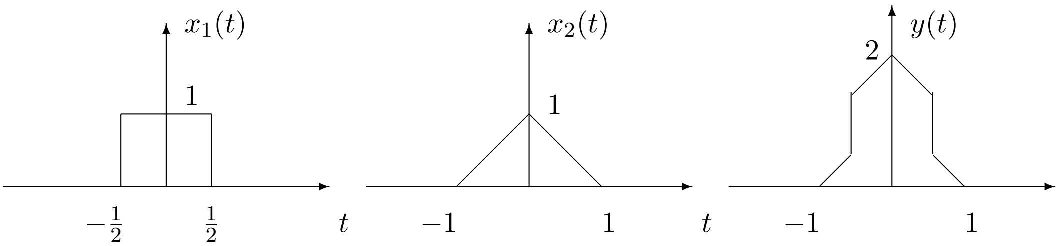
Per quello bilatero risulta invece:

$$y(t) = e^{-|t|} = e^{-t}\mathrm{u}(t) + e^{t}\mathrm{u}(-t)$$

2. *Somma*

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Anche in questo caso l'operazione è realizzata puntualmente, si veda l'esempio mostrato in figura in cui si somma un impulso rettangolare e uno triangolare:

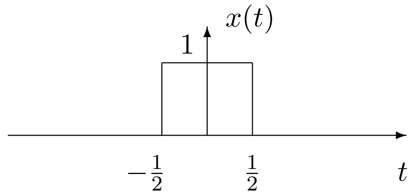


In questo caso proviamo a procedere anche da un punto di vista analitico, facendo attenzione agli intervalli temporali:

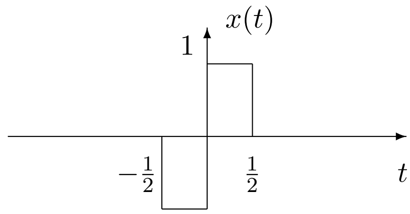
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = \begin{cases} (1-|t|)+0 & 1/2 \leq |t| \leq 1 \\ (1-|t|)+1 & |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1-|t| & 1/2 \leq |t| \leq 1 \\ 2-|t| & |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo come uno stesso segnale si possa esprimere spesso sia come somma che come prodotto di due segnali. Mostriamo alcuni esempi di segnali e la loro descrizione analitica in termini di prodotto, somma o differenza tra due segnali:

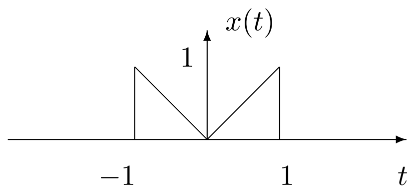
a) $x(t) = \Pi(t) = \mathrm{u}(t + 1/2) - \mathrm{u}(t - 1/2)$



b) $x(t) = \Pi(t)\,\mathrm{sign}(t) = \Pi\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right) - \Pi\left(\frac{t+1/4}{1/2}\right)$



c) $x(t) = |t|\,\Pi(t/2) = \Pi(t/2) - \Lambda(t)$



2.5 Derivazione e Integrazione

I segnali tempo continuo matematicamente non sono altro che funzioni, quindi è possibile applicare tutti i concetti trattati nei corsi di matematica. In particolare, è possibile introdurre le operazioni di derivazione e integrazione per segnali continui:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{6}$$

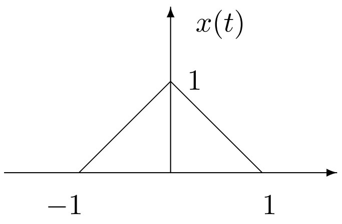
e

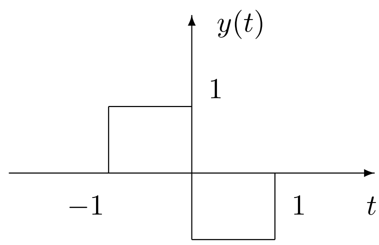
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha \tag{7}$$

Di seguito si mostrano alcuni esempi.

1. Derivata di un impulso triangolare.

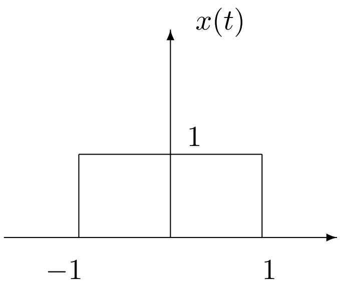
$$y(t) = \tfrac{d}{dt}\begin{cases} 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 0 \\ -1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

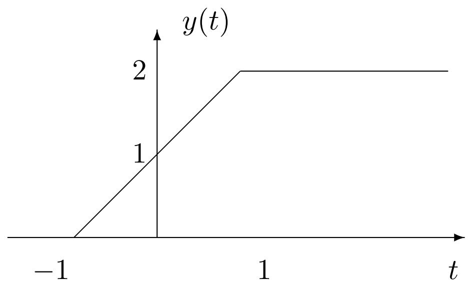




2. Integrale di un impulso rettangolare.

$$y(t) = \textstyle\int_{-\infty}^{t}\begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 1 \\ 2 & t \ge 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





3 Segnali periodici

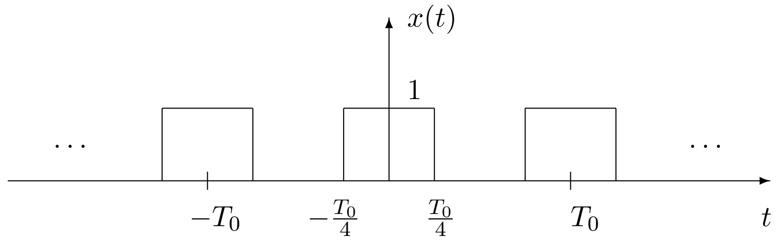
Un segnale $x(t)$ si definisce *periodico* di periodo T_0 se risulta:

$$x(t) = x(t + T_0) \qquad \forall t \tag{8}$$

con T_0 costante positiva. E' chiaro che un segnale periodico di periodo T_0 risulterà anche periodico di periodo $2T_0, 3T_0, 4T_0, \cdots$, ed ha durata illimitata. Il più piccolo valore di T_0 che soddisfa la relazione (39) è detto *periodo fondamentale* di $x(t)$, il suo inverso è invece la *frequenza fondamentale*: $f_0 = 1/T_0$, che descrive quanto velocemente un segnale si ripete e si misura in hertz (Hz) o cicli al secondo.

a) *Treno di impulsi rettangolari.*

Si consideri il segnale periodico mostrato in figura.



Il segnale è costituito da una replica di impulsi rettangolari di durata $T_0/2$ distanziati di T_0, analiticamente il segnale si può quindi esprimere come la somma di infiniti impulsi rettangolari opportunamente traslati:

$$x(t) = \cdots + \Pi\left(\tfrac{t+T_0}{T_0/2}\right) + \Pi\left(\tfrac{t}{T_0/2}\right) + \Pi\left(\tfrac{t-T_0}{T_0/2}\right) + \cdots = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\tfrac{t-nT_0}{T_0/2}\right)$$

Un segnale periodico quindi può, in generale, essere espresso come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_g(t - nT_0) \tag{9}$$

dove $x_g(t)$ è detto generatore del segnale, e nel nostro caso vale

$$x_g(t) = \Pi(2t/T_0)$$

E' chiaro che il generatore non è unico, si può anche scegliere per esempio:

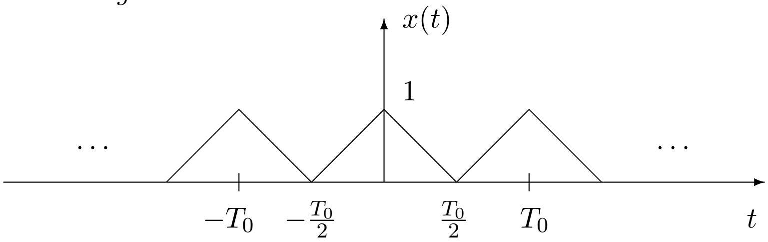
$$x_g(t) = \Pi\left(\frac{t - T_0}{T_0/2}\right)$$

Un'altra notazione spesso utilizzata per i segnali periodici è la seguente:

$$x(t) = \mathrm{rep}_{T_0}[x_g(t)] \tag{10}$$

in cui si evidenzia il periodo T_0 e un suo possibile generatore $x_g(t)$.

b) *Treno di impulsi triangolari.*



In questo caso il segnale si può esprimere come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right) = \text{rep}_{T_0}[\Lambda(2t/T_0)]$$

Notate come un altro possibile generatore sia:

$$x_g(t) = \Pi\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right) - \Lambda\left(\frac{t - T_0/2}{T_0/2}\right)$$

c) *Treno di impulsi rettangolari alternati (onda quadra).*

Si consideri il seguente segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \Pi\left(\frac{2t}{T_0} - n\right)$$

Per rappresentare graficamente il segnale e individuarne il periodo è più conveniente esprimerlo nella seguente forma:

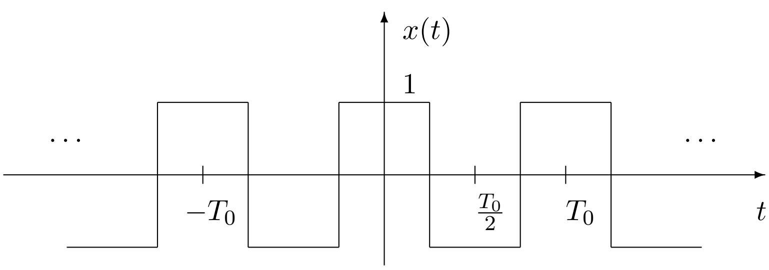
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \Pi\left(\frac{t - nT_0/2}{T_0/2}\right)$$

Ci accorgiamo poi che la presenza di $(-1)^n$ non fa altro, quando n è dispari, che rendere negativi gli impulsi rettangolari. Infatti risulta:

$$x(t) = \cdots + \Pi\left(\frac{t+T_0}{T_0/2}\right) - \Pi\left(\frac{t+T_0/2}{T_0/2}\right) + \Pi\left(\frac{t}{T_0/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-T_0/2}{T_0/2}\right) + \Pi\left(\frac{t-T_0}{T_0/2}\right) + \cdots$$

Il segnale mostrato in figura è un'onda quadra di periodo pari a T_0. Un altro possibile modo in cui esprimerlo è:

$$x(t) = \text{rep}_{T_0}[\Pi(2t/T_0) - \Pi(2t/T_0 - 1)]$$

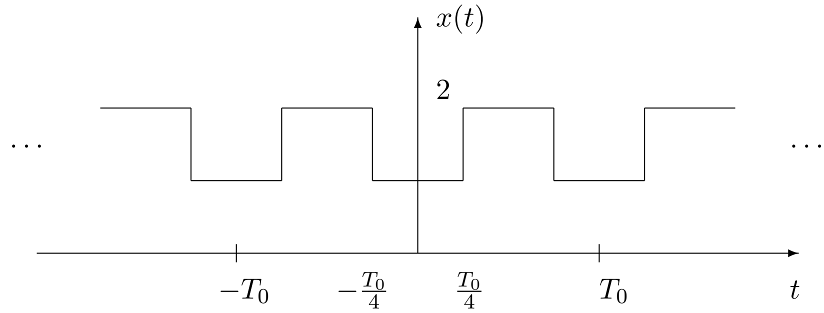


d) *Segnale periodico con generatore che si sovrappone.*

Si consideri il seguente segnale:

$$x(t) = \text{rep}_{T_0}[\Pi(2t/3T_0)]$$

Se si prova a disegnare il segnale, ci si accorge che i generatori si sovrappongono. Per rappresentarlo graficamente in modo corretto nella regione di sovrapposizione i segnali vanno sommati, ottenendo il segnale mostrato in figura.



Questo segnale può anche essere espresso come:

$$x(t) = \text{rep}_{T_0}[2\,\Pi(t/T_0) - \Pi(2t/T_0)]$$

D'altra parte si può anche decomporre come la somma di un segnale costante e di un treno di impulsi rettangolari:

$$x(t) = 1 + \text{rep}_{T_0}[\Pi(2t/T_0 - 1)]$$

Provate, infine, ad esprimerlo come la somma di una costante e di un'onda quadra.

e) *Segnale sinusoidale.*

Tra i segnali periodici di particolare interesse e utilità c'è il segnale sinusoidale:

$$x(t) = A\,\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

E' facile verificare che questo segnale risulta periodico di periodo $T_0 = 1/f_0$, infatti risulta

$$x(t+T_0) = A\cos(2\pi f_0(t+T_0)+\theta) = A\cos(2\pi f_0 t + 2\pi + \theta) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = x(t)$$

Rappresentiamo graficamente il segnale $x(t)$, interpretandolo come traslazione e cambiamento di scala sulle ampiezze e sulla scala dei tempi del segnale $\cos(t)$, periodico di periodo 2π. Bisogna prima traslare $\cos(t)$ verso sinistra di un ritardo θ e poi effettuare un cambiamento di scala pari a $2\pi f_0$. Si ottiene così il segnale mostrato in figura 2.

Equivalentemente si può anche pensare di scrivere il segnale come

$$x(t) = A\cos[2\pi f_0(t + \theta/2\pi f_0)]$$

in cui si effettua prima l'espansione che causa il cambiamento di periodo da 2π a $2\pi/(2\pi f_0) \equiv T_0$ e successivamente si trasla il segnale di $\theta/2\pi f_0$. Supponiamo come esempio di considerare il segnale sinusoidale $x(t) = \cos(4\pi t - \pi/2)$, è facile riconoscere che il segnale è periodico di periodo $T_0 = 1/2$ ed è ritardato di $1/8$.

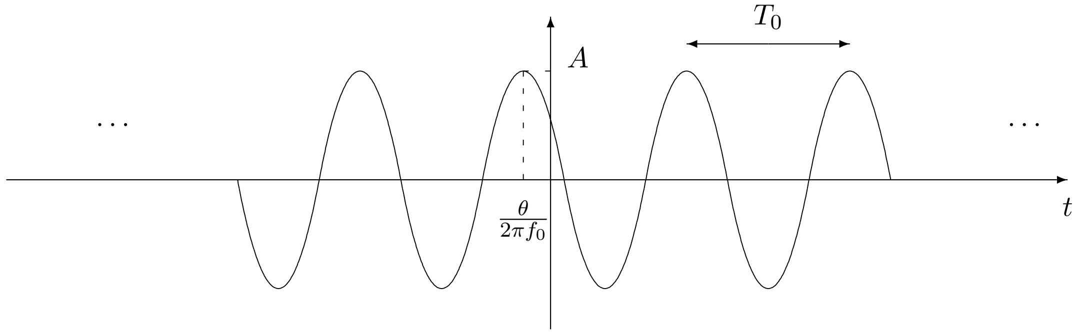


Figura 2: Segnale sinusoidale

f) *Segnale periodico ottenuto attraverso una funzione composta.*

Si consideri il seguente segnale periodico:

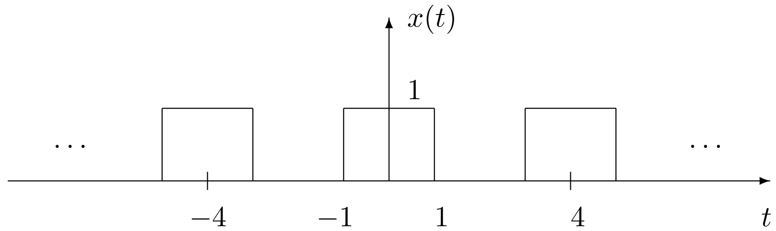
$$x(t) = \mathrm{u}[\cos(\pi t/2)]$$

Cominciamo col notare che tale segnale è stato ottenuto mediante una funzione composta: $x(t) = f[g(t)]$, dove $g(t)$ è l'onda sinusoidale e $f[\cdot]$ è la funzione gradino. Per comprendere come rappresentare il segnale, bisogna prima ricordare come si definisce la funzione gradino:

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha che tale definizione va applicata al segnale $g(t) = \cos(\pi t/2)$ periodico di periodo $T_0 = 4$ ottenendo il segnale mostrato in figura.

$$x(t) = \mathrm{u}[g(t)] = \begin{cases} 1 & g(t) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \cos(\pi t/2) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



4 Caratterizzazione dei segnali tempo continuo

In questa sezione vengono introdotti alcuni parametri (media, energia e potenza) che consentono di descrivere sinteticamente i segnali nel dominio del tempo.

4.1 Media temporale

Dato un segnale $x(t)$, si definisce media temporale nell'intervallo (t_1, t_2) la quantità:

$$< x(t) >_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{|t_2 - t_1|} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt \tag{11}$$

Il risultato di tale operazione è un numero che indica intorno a quale valore evolve l'andamento del segnale nell'intervallo (t_1, t_2). Estendendo tale definizione a tutto l'asse dei tempi si ottiene la *media temporale* di $x(t)$:

$$< x(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \tag{12}$$

Se il segnale è periodico di periodo T_0, il calcolo della media si riduce all'osservazione su un singolo periodo:

$$< x(t) > = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt \tag{13}$$

In effetti, da un punto di vista concettuale è ovvio ritenere che se il segnale si ripete con un certo periodo, non ha senso calcolare la sua media su tutto l'intervallo temporale, ma basta valutarla sul singolo periodo. Tuttavia, per completezza riportiamo la dimostrazione di seguito.

Dimostrazione. Facendo riferimento al solo integrale nella relazione (12), possiamo porre $T = nT_0 + \varepsilon$, dove n indica il numero di periodi contenuti nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ ed ε è la frazione di intervallo temporale residua; allora risulta

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt = \int_{(-nT_0-\varepsilon)/2}^{(nT_0+\varepsilon)/2} x(t)\, dt \tag{14}$$

$$= \int_{(-nT_0-\varepsilon)/2}^{-nT_0/2} x(t)\, dt + \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)dt + \int_{nT_0/2}^{(nT_0+\varepsilon)/2} x(t)\, dt \tag{15}$$

Si noti adesso che sia il primo che il terzo integrale nella (15) danno un contributo finito, perché calcolati su un intervallo di durata finita pari a ε, pertanto quando si divide per T e si passa al limite per $T \to \infty$, cioè per $n \to \infty$ il loro contributo è nullo. Il secondo integrale, invece, per la periodicità di $x(t)$ è pari a n volte l'integrale esteso ad un solo periodo. Quindi risulta:

$$< x(t) > = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0 + \varepsilon} \int_{-nT_0/2}^{nT_0/2} x(t)\, dt \tag{16}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nT_0 + \varepsilon} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt \tag{17}$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt \tag{18}$$

Di seguito si mostrano alcuni esempi di calcolo della media temporale.

a) *Impulso rettangolare*: $x(t) = A\,\Pi(t/T)$. Per non confondere la durata dell'impulso rettangolare con il parametro T che compare nella (12), riscriviamo il segnale come $x(t) = A\,\Pi(t/T')$.

$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T'/2}^{T'/2} A\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A\,T'}{T} = 0$

b) *Impulso triangolare*: $x(t) = A\,\Lambda(t/T')$.

$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_{0}^{T'} A(1-t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A\,T'}{T} = 0$

c) *Esponenziale monolatero*: $x(t) = A\,e^{-t/T'}\mathrm{u}(t)$.

$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} A\,e^{-t/T'}\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A\,T'}{T} = 0$

d) *Segnale gradino*: $x(t) = A\,\mathrm{u}(t)$.

$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} A\,dt = \frac{A}{2}$

e) *Segnale periodico*: $x(t) = A\,\mathrm{rep}_{T_0}[\Pi(2t/T_0)]$.

$< x(t) >= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} A\,dt = \frac{A}{2}$

f) *Segnale sinusoidale*: $x(t) = A\,\cos(2\pi t/T_0)$.

$< x(t) >= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\,\cos(2\pi t/T_0)\,dt = 0$

Notiamo come sia l'impulso rettangolare che quello triangolare hanno media nulla. In effetti, tale risultato può essere esteso a tutti segnali a durata finita, che assumono valori finiti nell'intervallo di definizione. Questo risultato non deve sorprenderci dato che il valore che assume mediamente un segnale a durata finita osservato su intervallo temporale infinito è chiaramente pari a zero. Ovviamente questo non significa che i segnali a media nulla hanno durata finita come mostra l'esempio *c*).

La media temporale spesso è anche chiamata componente continua di un segnale e la si indica con x_{dc}:

$$x_{dc} \stackrel{\triangle}{=} < x(t) >$$

Si definisce quindi la componente alternata come:

$$x_{ac} \stackrel{\triangle}{=} x(t) - x_{dc}$$

Ovviamente la componente alternata ha media nulla.

4.1.1 Esempio

Si consideri nuovamente il treno di impulsi rettangolari di periodo T_0:

$$x(t) = A\,\mathrm{rep}_{T_0}[\Pi(2t/T_0)]$$

Abbiamo calcolato la media temporale di questo segnale pari a $x_{dc} =< x(t) >= A/2$. Il segnale $x(t)$ può quindi anche essere espresso come la somma di una costante e una componente alternata, che in questo caso è un'onda quadra:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \mathrm{rep}_{T_0}\left[\frac{A}{2}\,\Pi(2t/T_0) - \frac{A}{2}\,\Pi(2t/T_0 - 1)\right]$$

4.1.2 Esempio

La media temporale del gradino unitario è pari a 1/2, sottraendola al segnale otteniamo la sua componente alternata:

$$x_{ac} = \mathrm{u}(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(t)$$

da cui:

$$\mathrm{u}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(t)$$

4.1.3 Proprietà della media

La media gode delle proprietà elencate di seguito:

1. *Invarianza temporale.*

   Dato un segnale $x(t)$ se ne consideri la sua versione traslata: $y(t) = x(t - t_0)$ con $t_0 > 0$ si ha che

   $$< y(t) >=< x(t - t_0) >=< x(t) > \qquad \forall t_0 \in \mathcal{R} \tag{19}$$

   la media cioè è invariante per traslazione del segnale.

   Dimostrazione.

   $$\begin{aligned} < y(t) > &\stackrel{\triangle}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - t_0)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2-t_0}^{T/2-t_0} x(\tau)d\tau \qquad (20) \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2-t_0}^{-T/2} x(\tau)d\tau + \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)d\tau - \int_{T/2-t_0}^{T/2} x(\tau)d\tau\right] \qquad (21) \end{aligned}$$

La (20) è stata ottenuta mediante il cambio di variabili $\tau = t - t_0$, mentre nella (21) l'integrale è stato semplicemente decomposto nella somma di tre integrali. Si noti adesso che sia il primo che il terzo integrale danno un contributo finito, perché calcolati su un intervallo di durata finita, pertanto quando si divide per T e si passa al limite per $T \to \infty$ il loro contributo è nullo. Da qui l'asserto.

2. *Linearità.*

   Dato un segnale $z(t) = a_1 x(t) + a_2 y(t)$, combinazione lineare di due segnali, risulta:

   $$< z(t) >= a_1 < x(t) > +a_2 < y(t) > \qquad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{C} \tag{22}$$

   la media è anch'essa combinazione lineare, secondo gli stessi coefficienti, delle medie dei due segnali. La dimostrazione segue banalmente dal fatto che sia l'operazione di limite che l'integrazione sono operazioni lineari.

Consideriamo adesso alcuni segnali di cui si vuole calcolare la media.

a) $x(t) = e^{-(t-1)}\mathrm{u}(t-1) + 4\mathrm{u}(t)$. Applicando la proprietà di linearità e di invarianza temporale e ricordando che $< \mathrm{u}(t) >= 1/2$, si ha:

$$< x(t) >=< e^{t-1}\mathrm{u}(t-1) > +4 < \mathrm{u}(t) >= 0 + \frac{4}{2} = 2$$

b) $x(t) = 2 + \cos(2\pi t + \pi/8)$. Anche in questo caso applichiamo entrambe le proprietà:

$$< x(t) >= 2+ < \cos(2\pi t + \pi/8) >= 2 + 0 = 2$$

In effetti, in questo esempio il segnale risulta già espresso come somma della componente continua $x_{dc} = 2$ e della componente alternata, data dall'onda sinusoidale traslata.

4.2 Potenza ed Energia

Si definisce *valore quadratico medio* la quantità:

$$< |x(t)|^2 >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \tag{23}$$

dove $|\cdot|$ denota il modulo del segnale (in modo che la definizione si possa estendere anche ai segnali complessi). Tale parametro è chiamato anche *Potenza media* di $x(t)$:

$$P_x \stackrel{\triangle}{=} < |x(t)|^2 >$$

Infatti, in molte applicazioni i segnali rappresentano quantità fisiche; per esempio, un segnale può rappresentare la tensione, $v(t)$, o la corrente, $i(t)$, lungo un resistore con resistenza R; in tal caso, la potenza istantanea dissipata è:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R\, i^2(t) \tag{24}$$

In effetti sia che il segnale sia una tensione o una corrente la potenza istantanea risulta comunque proporzionale all'ampiezza del quadrato del segnale. Allora la (23) può essere considerata la potenza media dissipata da un segnale su una resistenza di $R = 1\Omega$. Allo stesso modo possiamo definire l'*energia* di un segnale come

$$E_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad (25)$$

E' molto importante ricordare che i termini energia e potenza sono usati indipendentemente dal fatto che il segnale $x(t)$ sia effettivamente legato ad una quantità fisica. (Teniamo comunque presente che anche se $x(t)$ fosse una tensione bisognerebbe dividere il suo valore per la resistenza per ottenere le dimensioni di un'energia fisica).
Come per la media, la potenza di un segnale periodico di periodo T_0 si semplifica in:

$$P_x \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt \qquad (26)$$

Con queste definizioni possiamo identificare tre importanti classi di segnali:

1. I segnali che hanno energia finita: $0 < E_x < \infty$. Tali segnali hanno sicuramente potenza nulla e vengono detti segnali di energia;
2. i segnali che hanno potenza finita: $0 < P_x < \infty$. Tali segnali hanno energia infinita e vengono detti segnali di potenza;
3. i segnali che non hanno né energia né potenza finita. Questi segnali non sono di interesse pratico.

Di seguito vengono mostrati alcuni esempi di segnali di energia e di potenza.

a) *Impulso rettangolare*: $x(t) = A\,\Pi(t/T)$.

   $E_x = \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 dt = A^2\,T$

b) *Impulso triangolare*: $x(t) = A\,\Lambda(t/T)$.

   $E_x = 2\int_0^T A^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{2}{3}A^2\,T$

c) *Esponenziale monolatero*: $x(t) = A\,e^{-t/T}\mathrm{u}(t)$.

   $E_x = \int_0^{+\infty} A^2\,e^{-2t/T} dt = \frac{A^2 T}{2}$.

d) *segnale costante*: $x(t) = A$.

$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2$

e) *gradino unitario*: $x(t) = A\,\mathrm{u}(t)$.

$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$

f) *signum*: $x(t) = A\,\mathrm{sign}(t)$.

$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2$

g) *segnale periodico*: $x(t) = A\,\mathrm{rep}_{T_0}[\Pi(2t/T_0)]$.

$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$

h) *segnale sinusoidale*: $x(t) = A\,\cos(2\pi f_0 t)$.

$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right] dt = \frac{A^2}{2}$

I segnali transitori sono identificabili con l'insieme dei segnali di energia, mentre i segnali periodici sono sempre segnali di potenza.
Verificate che il segnale $x(t) = t\,\mathrm{u}(t)$ (rampa) non è né di energia né di potenza, quindi $E_x = P_x = \infty$.

4.2.1 Proprietà

L'energia e la potenza godono delle proprietà elencate di seguito:

1. *Invarianza temporale*: dato un segnale $x(t)$ se ne consideri la sua versione traslata: $y(t) = x(t - t_0)$ si ha che $P_y = P_x$ e $E_y = E_x$, la potenza cioè è invariante per traslazione del segnale. La dimostrazione è analoga a quella della media pe i segnali di potenza, si riduce ad un semplice cambiamento di variabile per i segnali di energia.

2. *Non linearità*: Dato un segnale $z(t) = x(t) + y(t)$, calcoliamo la potenza di $z(t)$:

$$\begin{aligned}
P_z &= <|z(t)|^2>=<|x(t)+y(t)|^2>=<(x(t)+y(t))(x(t)+y(t))^*> \\
&= <|x(t)|^2>+<|y(t)|^2>+<x(t)y^*(t)>+<y(t)x^*(t)> \\
&= P_x + P_y + P_{xy} + P_{yx} \\
&= P_x + P_y + 2\,\mathrm{Re}[P_{xy}]
\end{aligned}$$

dove si definisce

$$P_{xy} \stackrel{\triangle}{=} < x(t)y^*(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t)\,dt \qquad (27)$$

potenza mutua di $x(t)$ e $y(t)$, che tiene conto delle relazioni energetiche mutue tra i due segnali. Analogamente $P_{yx} \stackrel{\triangle}{=} < y(t)x^*(t) >$ è la potenza mutua di $y(t)$ e $x(t)$. Se i segnali sono reali si ha che $P_{xy} \equiv P_{yx}$ per cui:

$$P_z = P_x + P_y + 2\,P_{xy} \qquad (28)$$

Se $P_{xy} = P_{yx} = 0$ i segnali si dicono *ortogonali* e vale la proprietà di additività della potenza. Stesso discorso vale per l'energia, per cui risulta in generale

$$E_z = E_x + E_y + 2\,\mathrm{Re}[E_{xy}]$$

dove

$$E_{xy} \stackrel{\triangle}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt \qquad (29)$$

rappresenta l'energia mutua. Anche in questo caso se i segnali sono reali si ha:

$$E_z = E_x + E_y + 2\,E_{xy} \qquad (30)$$

e se $E_{xy} = E_{yx} = 0$ i segnali si dicono *ortogonali*.

Di seguito si riportano alcuni esercizi sul calcolo dell'energia e della potenza per segnali del tipo $z(t) = x(t) + y(t)$.

a) $z(t) = 3\,\Pi(t+3) + e^{-t/2}\,\mathrm{u}(t)$.

I segnali considerati sono entrambi di energia e non si sovrappongono nel tempo, quindi sicuramente il loro prodotto è nullo ($E_{xy} = 0$). L'energia è data dalla somma dell'energia dei due segnali, quindi $E_z = 9+1 = 10$. Nel calcolo si è sfruttato il fatto che l'energia di un impulso rettangolare è $A^2\,T$ ed è invariante per traslazione ($A = 3$, $T = 1$), mentre quella del segnale esponenziale monolatero è $A^2\,T/2$ ($A = 1$, $T = 2$). Si noti come la somma di due segnali di energia è ancora un segnale di energia.

b) $z(t) = \Pi(t/2) + \Lambda(t)\mathrm{sign}(t)$.

Anche in questo caso i segnali risultano ortogonali, dato che il prodotto di un segnale pari ($\Pi(t/2)$) e di un segnale dispari ($\Lambda(t)\mathrm{sign}(t)$) è un segnale dispari ed ha area nulla per cui $E_{xy} = 0$. L'energia di $x(t)$, impulso rettangolare di ampiezza unitaria e durata 2 è pari proprio a 2, mentre quella di $y(t)$ coincide con l'energia di un impulso triangolare di ampiezza e semidurata unitaria pari a 2/3. Pertanto $E_z = 8/3$.

c) $z(t) = \Pi(t/2) + \Lambda(t)$.

Abbiamo a che fare ancora con due segnali di energia, che questa volta si sovrappongono, per cui bisogna valutare E_{xy}. Il segnale prodotto è:

$$x(t)y(t) = \Pi(t/2)\Lambda(t) \equiv \Lambda(t)$$

la cui area è pari a 1. Quindi $E_z = 2 + 2/3 + 2 = 14/3$.

d) $x(t) = \mathrm{u}(t-2) + \mathrm{sign}(t+1)$.

Questa volta abbiamo a che fare con due segnali di potenza. Sfruttiamo il fatto che la potenza è invariante per traslazione e che abbiamo già calcolato la potenza per $\mathrm{u}(t)$ e $\mathrm{sign}(t)$, pari a 1/2 e a 1, rispettivamente. Per quanto riguarda, invece, la potenza mutua, risulta:

$$x(t)y(t) = \mathrm{u}(t-2)\mathrm{sign}(t+1) = \mathrm{u}(t-2)$$

per cui bisogna calcolare P_{xy} che coincide con la media temporale del gradino traslato, già calcolata in precedenza, e pari a 1/2. In totale, $P_z = 1/2 + 1 + 1/2 = 2$.

e) $z(t) = 2 + \mathrm{rep}_2[2\,\Pi(t) - 2\,\Pi(t-1)]$.

Notiamo come in questo esempio il segnale sia espresso mediante la somma della componente continua ed alternata: $z(t) = z_{dc} + z_{ac}(t)$, per cui la potenza mutua risulta:

$$< z_{dc} z_{ac}(t) >= z_{dc} < z_{ac}(t) >= 0$$

troviamo in questo modo che componente continua ed alternata sono sempre ortogonali. La potenza di z_{dc} è z_{dc}^2, in questo caso 4, mentre la potenza del segnale periodico è:

$$P_z = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 4\,dt = 4$$

Complessivamente $P_z = 8$.

f) $z(t) = \Pi(t) + \cos(2\pi t)$.

In questo caso il segnale è dato dalla somma di un segnale di energia e di un segnale di potenza. Notiamo come $z(t)$ risulti un segnale di potenza, dal momento che l'energia è infinita (a causa della sinusoide), quindi

$$P_z = P_x + P_y + 2\,P_{xy} = 0 + 1/2 + 0 = 1/2$$

In questo conto si è sfruttato il fatto che l'impulso rettangolare ha potenza nulla, il segnale sinusoidale ha potenza pari a $A^2/2$ ($A = 1$) e il segnale prodotto $x(t)y(t)$ risulta essere un segnale a durata finita (a causa della finestra rettangolare) e quindi è un segnale di energia che ha media nulla.

e) $z(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin(2\pi f_0 t)$.

In questo esempio notiamo come i segnali risultino ortogonali, infatti:

$$< \cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) >= \frac{1}{2} < \sin(4\pi f_0 t) >= 0$$

allora:

$$P_z = P_x + P_y = 1/2 + 1/2 = 1$$

Anche in questo caso la somma di due segnali di potenza è un segnale di potenza.

5 Analisi dei segnali tempo discreto

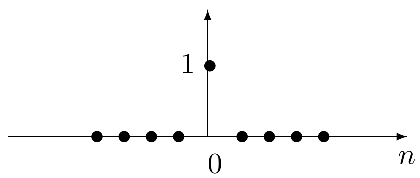
In questa sezione estenderemo l'analisi nel dominio del tempo ai segnali tempo discreto (o *sequenze*), in cui la variabile indipendente appartiene ad un insieme discreto (finito o infinito, ma numerabile).

Questi segnali possono rappresentare fenomeni per loro natura discreti, come per esempio la successione delle temperature minime o massime giornaliere in una data località. Essendo però i segnali di interesse di natura analogica (audio, voce, immagini, video), per poterli elaborare al calcolatore essi devono essere rappresentati mediante una successione di valori presi in determinati istanti temporali (*campionamento*). Per questo motivo nella maggior parte dei casi i segnali tempo discreto derivano dal campionamento di segnali tempo continuo. Useremo la notazione $x(n)$, dove n è una quantità intera.

5.1 Definizione dei segnali elementari

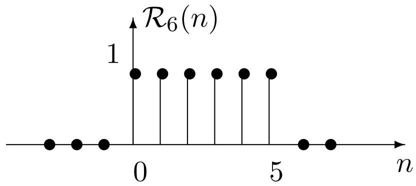
a) *Impulso unitario o delta di Kronecker*:

$$\delta(n) \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



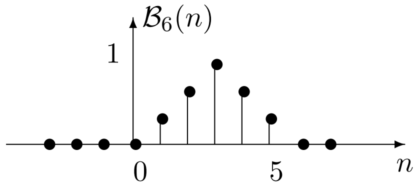
a) *Finestra rettangolare*:

$$\mathcal{R}_N(n) \triangleq \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



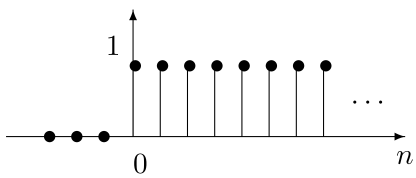
b) *Finestra triangolare o di Bartlett*:

$$\mathcal{B}_{2N}(n) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{|n-N|}{N} & 0 \le n \le 2N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



c) *Gradino unitario*:

$$\mathrm{u}(n) \triangleq \begin{cases} 1 & n \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



c) *Segnale esponenziale monolatero*:

$$x(n) \triangleq \begin{cases} a^n & n \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

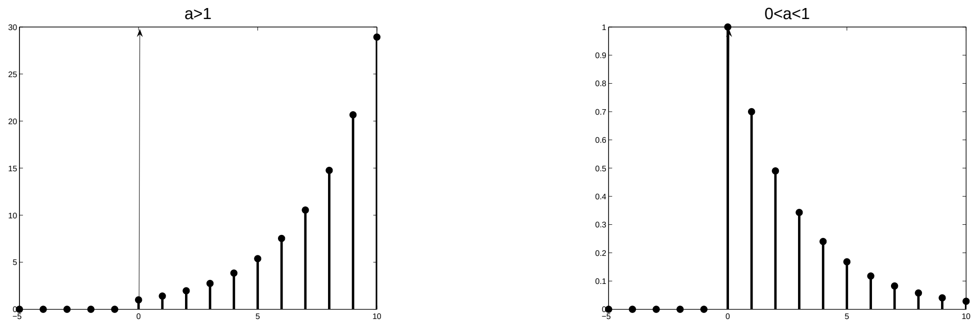


Figura 3: Segnale esponenziale monolatero ($a = 1.4$ e $a = 0.7$)

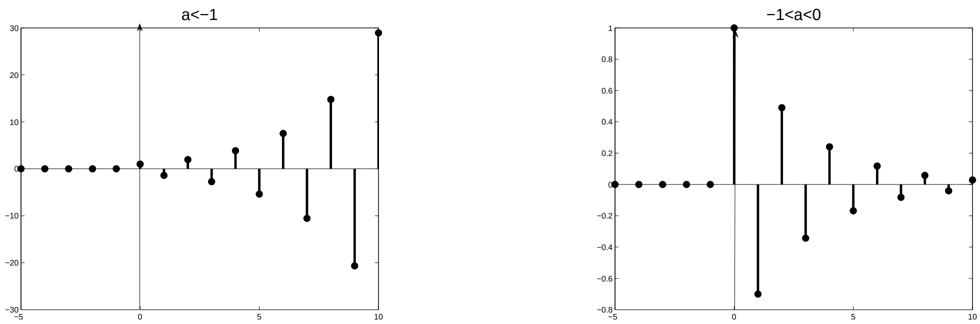


Figura 4: Segnale esponenziale monolatero ($a = -1.4$ e $a = -0.7$)

5.2 Elaborazioni elementari

Le operazioni definite per i segnali tempo continuo sono sostanzialmente identiche a quelle per segnali tempo discreto, eccetto alcune importanti differenze che metteremo in luce di seguito.

1) **Traslazione**

$$y(n) = x(n - n_0) \tag{31}$$

Questa operazione è uguale al caso continuo con il vincolo che il valore utilizzato nella traslazione deve necessariamente essere un intero.

2) **Cambiamento di scala**

Il cambiamento di scala sulle ampiezze segue le stesse considerazioni del continuo, per quanto riguarda, invece, l'asse dei tempi ci sono alcune importanti differenze.

$$y(n) = x(an) \tag{32}$$

Analizziamo anche questa volta diversi casi.

(a) $a > 1$.
Cominciamo col notare che necessariamente a deve essere un valore intero, affinché $an \in \mathcal{N}$, poniamo allora $a \equiv N$:

$$y(n) = x(Nn) \tag{33}$$

Otteniamo in questo modo la sequenza:

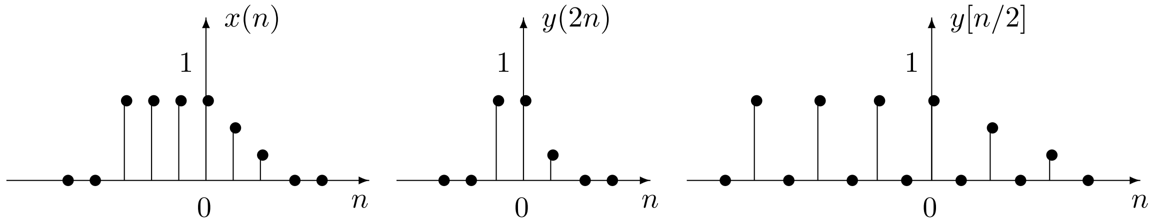
$$\ldots,\ x(-2N),\ x(-N),\ x(0),\ x(N),\ x(2N),\ \ldots$$

cioè $y(n)$ è ottenuto da $x(n)$ prendendo un campione ogni N. L'operazione è ancora una compressione, ma comporta la perdita di un determinato numero di campioni ed è spesso nota come *decimazione*.
In figura si mostra un esempio in cui $N = 2$. Ricordate sempre che la compressione avviene rispetto all'asse delle ordinate e che il valore nell'origine non viene mai modificato ($y(0) \equiv x(0)$).

(b) $0 < a < 1$.
Questa volta poniamo $a \equiv \frac{1}{N}$, in tal caso l'operazione $y(n) = x(n/N)$ è definita solo se n è multiplo di N. Allora si pone $y(n)$ pari a zero quando n non è multiplo di N e convenzionalmente si utilizza la seguente notazione:

$$y(n) = x\left[\frac{n}{N}\right] \triangleq \begin{cases} x\left(\frac{n}{N}\right) & n \text{ multiplo } N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{34}$$

Si noti come anche l'espansione è diversa dal caso continuo a causa della natura discreta del segnale. In figura è mostrato un esempio con $N = 2$.



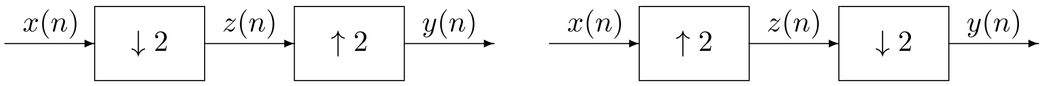
(c) $a = -1$.
In tal caso si ha la riflessione:

$$y(n) = x(-n) \tag{35}$$

e il segnale è una versione ribaltata rispetto all'asse delle ordinate di quello originale.

E' importante notare come per segnali tempo continuo il cambiamento di scala risulti perfettamente reversibile: se effettuiamo l'operazione di compressione di un fattore 2 ($z(t) = x(2t)$) seguita dall'espansione per 2 ($y(t) = z(t/2) \equiv x(t)$) riotteniamo il segnale originale, lo stesso accade se la compressione segue l'espansione.

Questa proprietà non risulta più valida nel caso discreto. Analizziamo allora in dettaglio cosa succede mettendo in cascata decimazione ($\downarrow N$) ed espansione ($\uparrow N$) e poi cambiando l'ordine, nell'ipotesi in cui $N = 2$.



Nel primo caso risulta:

$$\begin{cases} z(n) = x(2n) \\ y(n) = z\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} z\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ multiplo } 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} x(n) & n \text{ multiplo } 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

mentre nel secondo caso:

$$\begin{cases} z(n) = x\left[\frac{n}{2}\right] \\ y(n) = z(2n) = x\left[\frac{2n}{2}\right] = x(n) \end{cases}$$

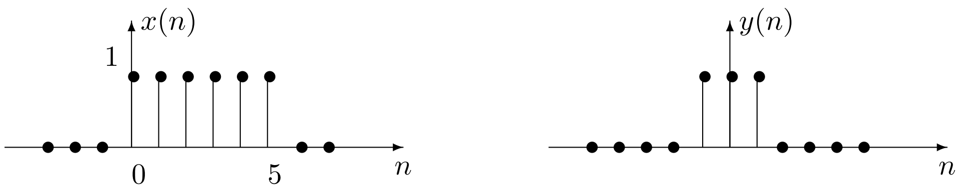
Il cambiamento di scala risulta invertibile solo se la decimazione segue l'espansione, infatti realizzare prima la decimazione causa una perdita di informazione che non è più recuperabile.

3) **Cambiamento di scala e traslazione**

Nel caso discreto bisogna fare molta attenzione alla combinazione di queste due operazioni, sia perché i segnali sono definiti solo su valori interi di n sia perché decimazione e espansione non possono essere eseguite in un ordine qualsiasi come accade nel caso continuo. Consideriamo allora il seguente esempio, in cui sono coinvolte le operazioni di decimazione, riflessione e traslazione:

$$y(n) = x(-2n + 3)$$

con $x(n) = \mathcal{R}_6(n)$. Procediamo da un punto di vista grafico, effettuando prima la traslazione verso sinistra di 3, quindi la riflessione e la decimazione per 2 (queste ultime due operazioni possono essere condotte in un ordine qualunque). Otteniamo in questo modo il segnale mostrato in figura.



In questo caso non è possibile pensare di realizzare prima la decimazione e poi la traslazione, dato che quest'ultima operazione non ha senso se il ritardo è un numero frazionario (3/2). Non ci sarebbero stati problemi, invece, se per esempio $y(n) = x(-2n + 4)$. Per verificare che il procedimento è corretto possiamo notare che deve risultare $y(0) = x(3)$.

4) **Somma e prodotto**

Il significato di queste operazioni è analogo al caso tempo continuo. Approfittiamo allora di questa sezione per elencare alcune importanti proprietà dell'impulso unitario. Cominciamo con l'osservare che sia l'impulso rettangolare che il gradino possono esprimersi come somma di impulsi unitari opportunamente traslati; risulta, infatti:

- $\mathcal{R}_N(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \cdots \delta(n-N+1) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k)$
- $\mathrm{u}(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \cdots \delta(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)$

In realtà, un qualsiasi segnale $x(n)$ si può esprimere come combinazione lineare di impulsi pesati mediante i valori assunti dal segnale stesso. Infatti, così come mostrato in figura (per $k=7$) risulta:

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k)$$

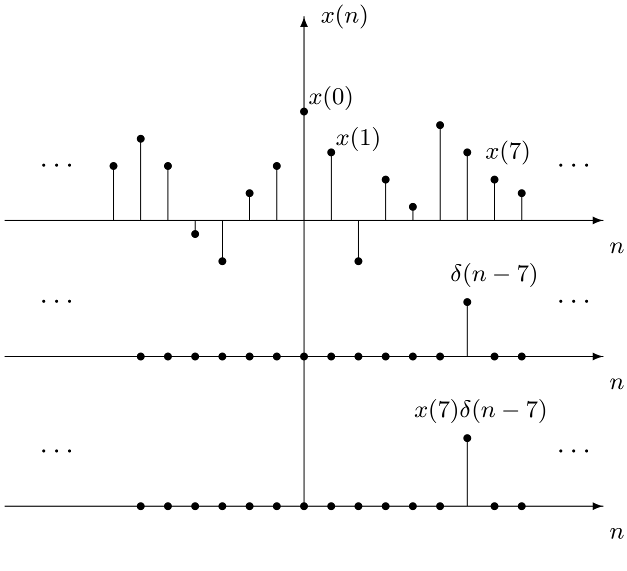


Figura 5: Prodotto tra $x(n)$ e $\delta(n-7)$

La sequenza ottenuta è nulla ovunque eccetto per $n = k$, dove assume proprio il valore $x(k)$. Ripetendo questa stessa operazione al variare dell'indice k è possibile estrarre i singoli valori del segnale $x(n)$ mediante impulsi unitari ritardati opportunamente. Quindi un qualsiasi segnale tempo discreto può essere espresso come combinazione lineare di impulsi:

$$\begin{aligned} x(n) &= \ldots + x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \ldots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \end{aligned} \tag{36}$$

I pesi sono dati proprio dai coefficienti $x(k)$ del segnale; al variare di n la (36) fornisce la *proprietà di riproducibilità*.

E' facile verificare che per esempio l'impulso triangolare di durata 6 si può esprimere come:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_6(n) &= \mathcal{B}_6(1)\delta(n-1) + \mathcal{B}_6(2)\delta(n-2) + \mathcal{B}_6(3)\delta(n-3) + \mathcal{B}_6(4)\delta(n-4) + \mathcal{B}_6(5)\delta(n-5) \\
&= \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{2}{3}\delta(n-2) + \delta(n-3) + \frac{2}{3}\delta(n-4) + \frac{1}{3}\delta(n-5)
\end{aligned}$$

5) **Derivazione e integrazione**

Una possibile definizione della derivata è la differenza prima:

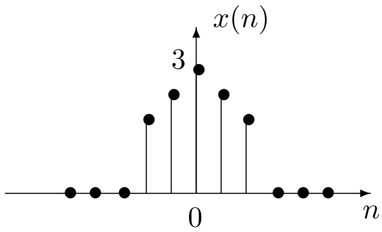
$$y(n) = \nabla_1[x(n)] = x(n) - x(n-1) \tag{37}$$

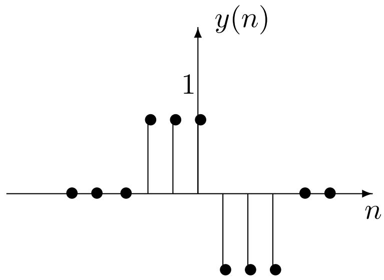
e per l'integrale la somma corrente

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \tag{38}$$

(a) Differenza prima di un impulso triangolare $x(n) = 3\,\mathcal{B}_6(n+3)$.

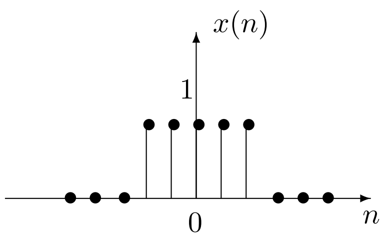
$$y(n) = \nabla_1[x(n)] = 3\,\mathcal{B}_6(n+3) - 3\,\mathcal{B}_6(n+2) = \mathcal{R}_3(n+2) - \mathcal{R}_3(n-1)$$

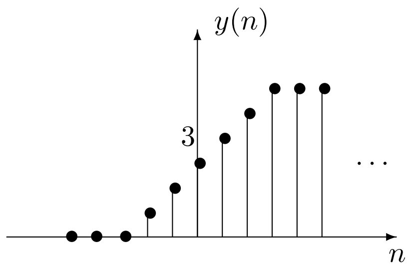




(b) Somma corrente di un impulso rettangolare $x(n) = \mathcal{R}_5(n+2)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathcal{R}_5(k+2) = \begin{cases} n+3 & -2 \le n \le 2 \\ 5 & n > 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





Notate la forte analogia che esiste tra il caso continuo e quello discreto. E' facile poi constatare che il gradino e l'impulso unitario sono legati da queste due operazioni, dato che l'impulso unitario è la differenza prima del gradino, che a sua volta è la somma corrente dei valori dell'impulso unitario:

- $\nabla_1[\mathrm{u}(n)] = \mathrm{u}(n) - \mathrm{u}(n-1) = \delta(n)$
- $\mathrm{u}(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$

Nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambio di variabili $m = n - k$.

5.3 Segnali periodici

Un segnale $x(n)$ si definisce *periodico* di periodo N_0 se risulta:

$$x(n) = x(n + N_0) \qquad \forall n \tag{39}$$

con N_0 intero positivo. Ricordiamo che il più piccolo valore di N_0 per cui tale relazione è verificata si chiama *periodo fondamentale*.

a) *Treno di impulsi rettangolari.* Il segnale mostrato in figura si può esprimere come:

$$x(n) = \mathrm{rep}_{N_0}[x_g(n)] = \mathrm{rep}_9[\mathcal{R}_5(n+2)]$$

in alternativa:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_g(n - kN_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_g(n - 9k)$$

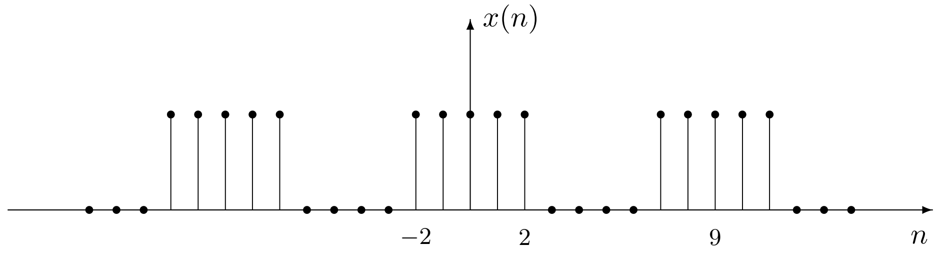


Figura 6: Treno di impulsi rettangolari

b) *Segnale sinusoidale.*

Un segnale sinusoidale tempo discreto si definisce come:

$$x(n) = A\cos(2\pi\nu_0 n + \theta)$$

dove la frequenza ν_0 si misura in cicli per campione.

Ci sono diverse importanti differenze tra un segnale sinusoidale tempo continuo e la sua versione discreta. Per enfatizzare queste differenze osserviamo che una sinusoide analogica, $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, gode delle seguenti proprietà:

A1. $x(t)$ è periodica per ogni valore della frequenza f_0;

A2. due sinusoidi a frequenza diversa sono distinte;

A3. all'aumentare della frequenza, cresce la velocità di oscillazione del segnale, nel senso che più periodi sono inclusi in un certo intervallo temporale.

Al contrario, una sinusoide tempo discreta $x(n) = \cos(2\pi\nu_0 n)$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

B1. *$x(n)$ è periodica se e solo se ν_0 è un numero razionale.*
Infatti, affinché una sinusoide sia periodica di periodo N_0 deve accadere:

$$\cos(2\pi\nu_0(N_0 + n)) = \cos(2\pi\nu_0 n)$$

quindi deve risultare

$$2\pi\nu_0 N_0 = 2k\pi$$

o equivalentemente $\nu_0 = \frac{k}{N_0}$.
Per determinare il periodo è necessario ridurre la frazione ai minimi termini e poi prenderne il denominatore. Per esempio, si considerino due sinusoidi aventi frequenze:

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} & \Longrightarrow \quad N_1 = 2 \\ \nu_2 = \frac{31}{60} & \Longrightarrow \quad N_2 = 60 \end{cases}$$

Si noti come basta una piccola variazione della frequenza perchè il periodo delle due sinusoidi sia molto diverso; in figura 7 si mostra il grafico dei due segnali.

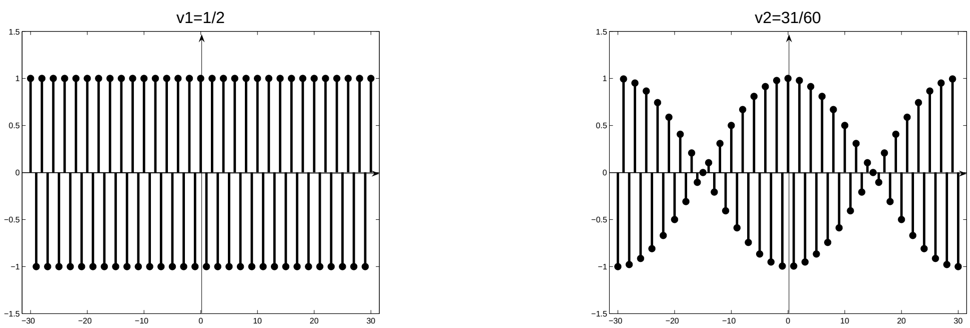


Figura 7: Segnale sinusoidale ($\nu_1 = 1/2$ e $\nu_2 = 31/60$)

In figura 8 si mostrano invece due esempi di segnali non periodici: $x_1(n) = \cos(n)$ e $x_2(n) = \cos(n/6)$.

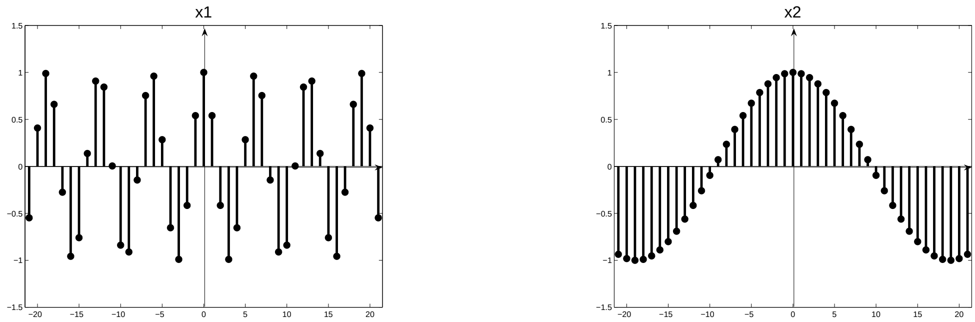


Figura 8: $x_1(n) = \cos(n)$ e $x_2(n) = \cos(n/6)$

B2. *Sinusoidi le cui frequenze differiscono di un numero intero sono identiche.*
Supponiamo, infatti, di avere due sinusoidi, una a frequenza ν_0 e l'altra a frequenza $\nu_1 = \nu_0 + 1$ Risulta:

$$\cos(2\pi v_1 n) = \cos(2\pi(v_0 + 1)n) = \cos(2\pi v_0 n + 2\pi n) \equiv \cos(2\pi v_0 n)$$

più in generale, tutte le sinusoidi $x_k(n) = \cos(2\pi\nu_k n)$ con $\nu_k = \nu_0 + k$ sono identiche. In figura si mostrano i grafici di due sinusoidi alle frequenze $\nu_1 = 0.3$ e $\nu_2 = 1.3$.

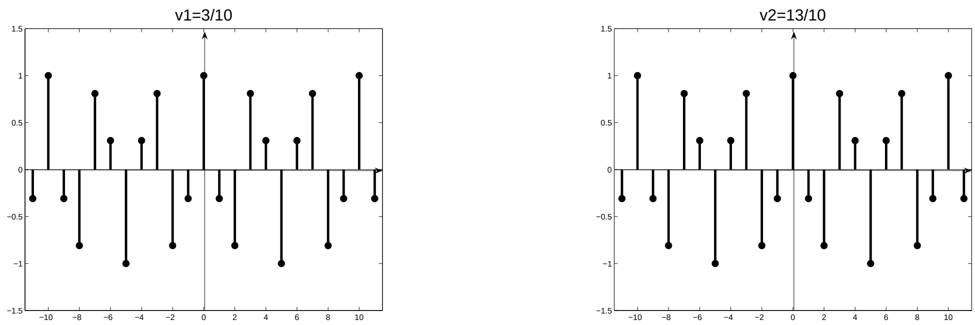


Figura 9: Segnale sinusoidale ($\nu_1 = 3/10$ e $\nu_2 = 13/10$)

A causa di questa periodicità le sinusoidi con frequenza $\nu > 1$ rappresentano un *alias* delle sinusoidi con frequenza compresa nell'intervallo $0 \leq \nu \leq 1$ (range fondamentale).

B3. *La massima velocità di oscillazione si ha per $\nu = \frac{1}{2}$.*
Questo significa che la rapidità di variazione delle sinusoidi tempo discreto non cresce costantemente all'aumentare di ν. Per comprendere questa proprietà basta osservare in figura 9 il grafico di un segnale sinusoidale al crescere della frequenza per $\nu_0 = 0, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Si noti come il periodo della sinusoide decresca all'aumentare della frequenza e che la massima oscillazione si verifichi per $\nu_0 = \frac{1}{2}$.
Per renderci conto di cosa accade se, invece, la frequenza è compresa nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq \nu \leq 1$, consideriamo due sinusoidi, $x_0(n)$ a frequenza ν_0 e $x_1(n)$ frequenza

$\nu_1 = 1 - \nu_0$. Risulta

$$x_1(n) = \cos(2\pi\nu_1 n) = \cos(2\pi n - 2\pi\nu_0 n) = x_0(n)$$

per esempio, la sinusoide a frequenza 3/4 coincide con quella a frequenza 1/4, mentre quella a frequenza 7/8 coincide con quella a 1/8, quindi all'aumentare della frequenza da 1/2 a 1 la velocità di oscillazione decresce fino a $\nu_0 = 1$, quando si ottiene un segnale costante come per $\nu_0 = 0$.

Per segnali discreti allora le basse frequenze sono intorno a zero (ma anche nell'intorno di un qualsiasi numero intero), mentre le alte frequenze sono quelle intorno a $\pm\frac{1}{2}$ (ma anche nell'intorno di un qualsiasi numero relativo semi-intero).

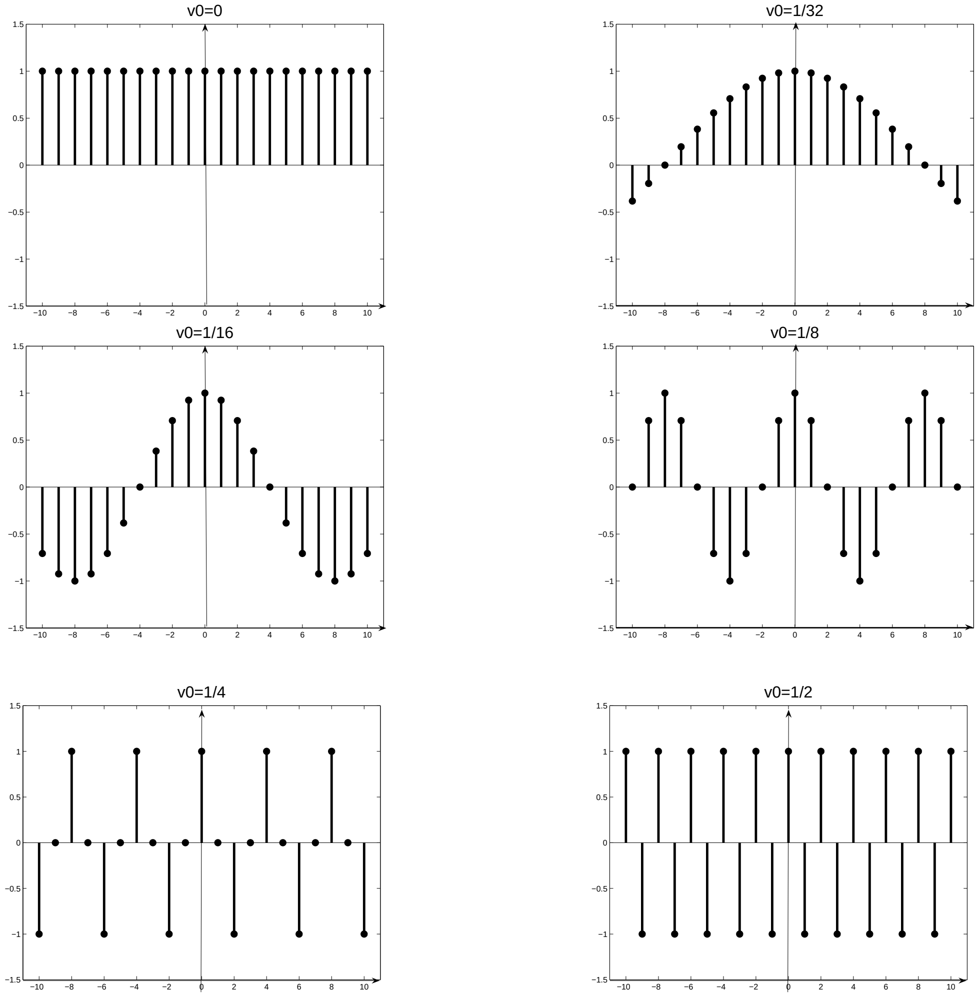


Figura 10: Segnale sinusoidale per $\nu_0 = 0, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

5.4 Caratterizzazione sintetica

E' possibile estendere la definizione di media, energia e potenza ai segnali discreti semplicemente sostituendo all'integrale una sommatoria. Si definisce, infatti, media temporale nell'intervallo (N_1, N_2) la quantità:

$$< x(n) >_{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n) \tag{40}$$

e coincide con la media aritmetica dei campioni. Estendendo tale definizione a tutto l'asse dei tempi si ottiene la media temporale di $x(n)$:

$$< x(n) >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) \tag{41}$$

Se il segnale è periodico di periodo N_0, il calcolo della media si riduce all'osservazione su un singolo periodo:

$$< x(n) >= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) \tag{42}$$

Spesso per indicare che la media può essere calcolata su un periodo qualsiasi del segnale si usa la seguente notazione:

$$< x(n) >= \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x(n) \tag{43}$$

Si definisce quindi la potenza di un segnale come:

$$P_x =< |x(n)|^2 >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{44}$$

che per un segnale periodico di periodo N_0 diventa:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2 \tag{45}$$

Infine l'energia è:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \tag{46}$$

Di seguito trovate esempi di calcolo della media, dell'energia e della potenza per segnali discreti.

a) *Impulso rettangolare*: $x(n) = A\,\mathcal{R}_N(n)$.

$E_x = \sum_0^{N-1} A^2 = A^2\,N$

b) *Esponenziale monolatero*: $x(n) = A\,a^n \mathrm{u}(n)$ con $|a| < 1$.

$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A^2 a^{2n} \mathrm{u}(n) = A^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (a^2)^n = A^2 \frac{1}{1-a^2}$

N.B. Nei conti che faremo useremo spesso le seguenti relazioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1 \qquad\qquad \sum_{n=M}^{N} \alpha^n = \begin{cases} \frac{\alpha^M - \alpha^{N+1}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N - M + 1 & \alpha = 1 \end{cases}$$

c) *segnale costante*: $x(n) = A$.

$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} A^2 = A^2$

d) *gradino unitario*: $x(n) = A\,\mathrm{u}(n)$.

$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} A^2 = \frac{A^2}{2}$

e) *segnale alternato*: $x(n) = A\,(-1)^n$.

$P_x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{1} A^2 = A^2$

f) *segnale periodico*: $x(n) = A\,\mathrm{rep}_9[\mathcal{R}_5(n+2)]$.

$P_x = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^{2} A^2 = \frac{5A^2}{9}$

g) *segnale sinusoidale*: $x(n) = A\,\cos(2\pi\nu_0 n)$.

$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} A^2 \cos^2(2\pi\nu_0 n) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} A^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi\nu_0 n)\right] = \frac{A^2}{2}$

Per quanto riguarda le proprietà di media, potenza ed energia valgono esattamente le stesse considerazioni del caso continuo, a patto di sostituire delle sommatorie agli integrali. Quindi per esempio l'energia e la potenza mutua si ridefiniscono nel seguente modo:

$$E_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) \tag{47}$$

e

$$P_{xy} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n) y^*(n) \tag{48}$$

6 Funzioni di correlazione dei segnali

Molto spesso, sia nell'elaborazione che nella trasmissione dei segnali, è necessario confrontare due segnali e stabilire quanto essi risultino simili. Un modo per fare ciò è determinare la funzione di correlazione, che può essere calcolata tra un segnale e una sua versione ritardata (*autocorrelazione*) o tra due segnali distinti (*mutua correlazione*).

6.1 Funzione di autocorrelazione

Per *segnali di energia* si definisce funzione di autocorrelazione la quantità:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \tag{49}$$

Il calcolo di $R_x(\tau)$ richiede di determinare il prodotto tra il segnale $x(t)$ e la sua versione ritardata $x(t-\tau)$ e poi valutarne l'integrale, che evidentemente risulterà funzione del ritardo τ.

6.1.1 Esempio

Consideriamo il segnale $x(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ e calcoliamone la funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\,dt$$

Per svolgere correttamente è conveniente procedere graficamente e notare che bisogna considerare quattro diverse situazioni (fig.11):

a) $\tau + T/2 \leq -T/2 \quad \Longrightarrow \quad \tau \leq -T;$

In tal caso $x(t)$ e $x(t-\tau)$ non si sovrappongono, quindi il loro prodotto è nullo, per cui $R_x(\tau) = 0$.

b) $-T/2 \leq \tau + T/2 \leq T/2 \quad \Longrightarrow \quad -T \leq \tau \leq 0;$

Il prodotto dei due segnali è diverso da zero nell'intervallo $-T/2 \leq t \leq \tau + T/2$, quindi:

$$R_x(\tau) = \int_{-T/2}^{\tau+T/2} A^2\,dt = A^2(T+\tau)$$

c) $-T/2 \leq \tau - T/2 \leq T/2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \tau \leq T;$

Il prodotto dei due segnali è diverso da zero nell'intervallo $\tau - T/2 \leq t \leq T/2$, quindi:

$$R_x(\tau) = \int_{\tau-T/2}^{T/2} A^2\,dt = A^2(T-\tau)$$

a) $\tau - T/2 \geq T/2 \quad \Longrightarrow \quad \tau \geq T;$

In tal caso $x(t)$ e $x(t-\tau)$ non si sovrappongono, quindi il loro prodotto è nullo, per cui $R_x(\tau) = 0$.

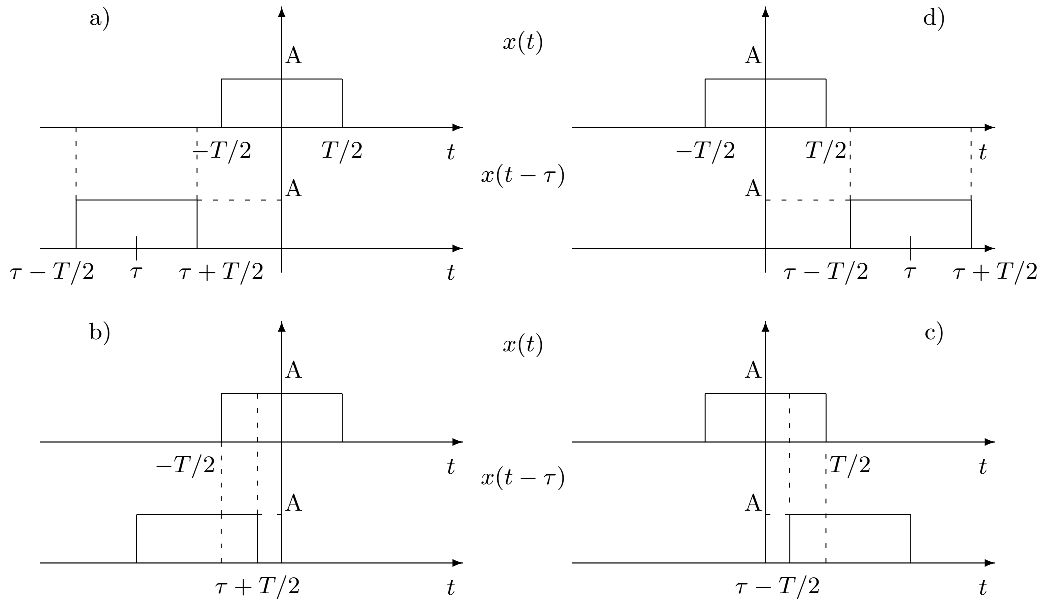


Figura 11: Calcolo di $R_x(\tau)$ per un impulso rettangolare

In conclusione, si ha:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|) & |\tau| \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} A^2T(1 - |\tau|/T) & |\tau| \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = A^2T\,\Lambda(t/T)$$

La funzione di autocorrelazione di un impulso rettangolare è quindi un impulso triangolare. Notiamo che $R_x(0)$ coincide proprio con l'energia del segnale (A^2T) e che $R_x(\tau)$ è pari.

6.1.2 Esempio

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione del segnale $x(t) = A\,e^{-t}\mathrm{u}(t)$. In tal caso riconosciamo che ci sono due situazioni da considerare (fig.12)

a) $\tau < 0$;

$$R_x(\tau) = \int_0^{+\infty} A^2e^{-t}\,e^{-(t-\tau)}\,dt = A^2e^{\tau}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = A^2e^{\tau}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2}e^{\tau}$$

b) $\tau > 0$;

$$R_x(\tau) = \int_0^{+\infty} A^2e^{-t}\,e^{-(t-\tau)}\,dt = A^2e^{\tau}\int_{\tau}^{+\infty} e^{-2t}\,dt = A^2e^{\tau}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{\tau}^{+\infty} = \frac{A^2}{2}e^{-\tau}$$

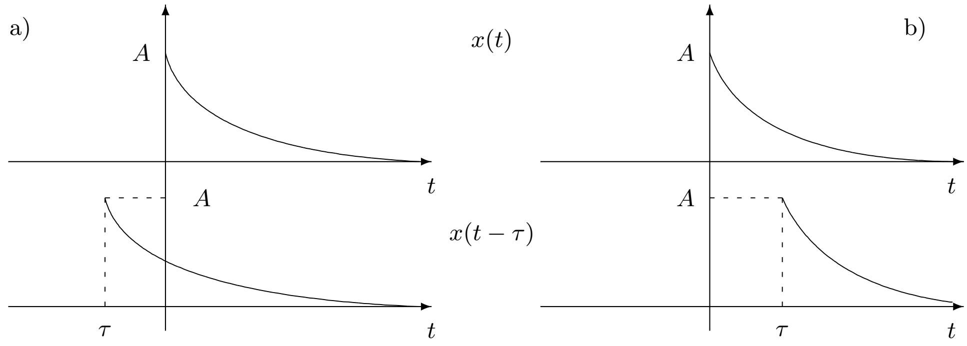


Figura 12: Calcolo di $R_x(\tau)$ per un esponenziale monolatero

In conclusione

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} e^{-|\tau|}$$

Anche in questo caso notiamo che $R_x(\tau)$ è pari e che $R_x(0) = A^2/2$ pari proprio all'energia del segnale.

La funzione di autocorrelazione per segnali di energia gode delle seguenti proprietà:

1. il valore nell'origine coincide con l'energia:
$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x \tag{50}$$

2. Simmetria coniugata:
$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau) \tag{51}$$
Dimostrazione. Si ha:
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)\, dt = R_x^*(-\tau)$$
Per segnali reali tale condizione esprime il fatto che $R_x(\tau)$ è pari.

3. La funzione di autocorrelazione è limitata ed ha un massimo nell'origine:
$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \tag{52}$$

4. La funzione di autocorrelazione è continua se è continua nell'origine.

Le ultime due proprietà ci limitiamo solamente ad enunciarle. Queste stesse proprietà valgono anche per i *segnali di potenza* a patto di definire la funzione di autocorrelazione nel seguente modo:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)\, dt \tag{53}$$

ovviamente adesso risulta $R_x(0) \equiv P_x$. Notate poi che

$$R_x(\tau) =< x(t)x^*(t-\tau) > \tag{54}$$

cioè la funzione di autocorrelazione per segnali di potenza non è altro che la media del prodotto del segnale con la sua versione traslata. Inoltre per segnali periodici la funzione di autocorrelazione si definisce come:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)\,dt \tag{55}$$

coerentemente col fatto che $R_x(0)$ deve coincidere con la potenza di un segnale periodico.

6.1.3 Esempio

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione del segnale $x(t) = \mathrm{u}(t)$. Limitiamoci al caso $\tau \leq 0$, visto che $R_x(\tau)$ è pari. Si ha:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t-\tau)\,dt$$

Si noti poi dalla figura 13 che il prodotto tra i due segnali non cambia nell'intervallo $[-T/2, T/2]$, sia per $\tau < -T/2$ che per $\tau > -T/2$, quindi si ha:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} dt = \frac{1}{2}$$

La funzione di autocorrelazione del gradino unitario è allora una funzione costante pari a 1/2. (N.B. E' pari e in 0 coincide con la potenza di u(t)).

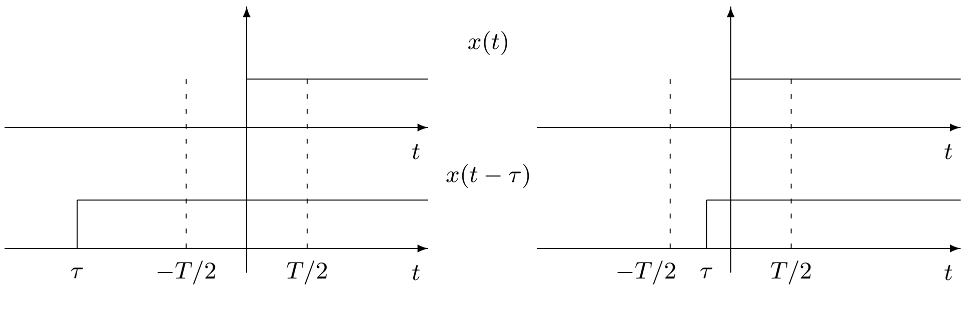


Figura 13: Calcolo di $R_x(\tau)$ per il gradino unitario

E' possibile estendere il concetto di correlazione anche ai segnali tempo discreto, definendo per i segnali di energia la quantità:

$$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n-m) \tag{56}$$

mentre per i segnali di potenza:

$$R_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x^*(n-m) \tag{57}$$

che diventa per segnali periodici:

$$R_x(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)x^*(n-m) \tag{58}$$

6.1.4 Esempio

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione per un impulso rettangolare: $x(n) = \mathcal{R}_6(n)$ e limitiamoci al caso $m > 0$ (fig.14). Per $m \leq 5$;

$$R_x(m) = \sum_{n=m}^{5} 1 = 6 - m$$

altrimenti $R_x(m) = 0$. Quindi:

$$R_x(m) = \begin{cases} 6 - |m| & |m| \leq 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 6\left(1 - \frac{|m|}{6}\right) & |m| \leq 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathcal{B}_{12}(n+6)$$

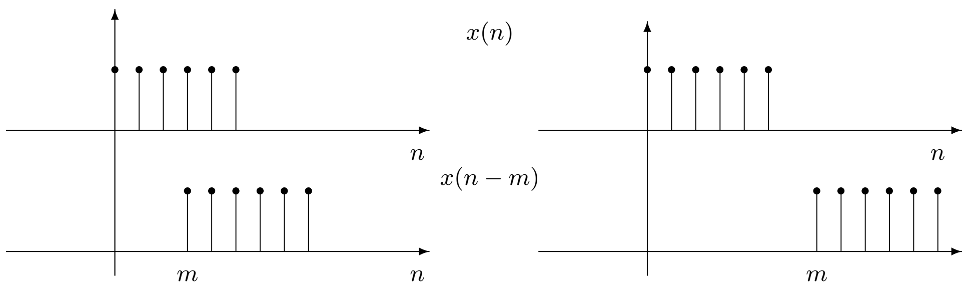


Figura 14: Calcolo di $R_x(\tau)$ di un impulso rettangolare discreto

Anche nel caso discreto otteniamo un impulso triangolare centrato nell'origine (fig.15), per cui $R_x(0) = 6 = E_x$ (Ricordate sempre di controllare che $R_x(\tau)$ è pari e che nell'origine coincide con l'energia o la potenza).

Supponiamo adesso di voler ripetere il calcolo di $R_x(m)$ per l'impulso rettangolare traslato: $x(n) = \mathcal{R}_6(n+3)$. Più in generale, supponiamo di conoscere la funzione di autocorrelazione di $x(n)$ e di voler calcolare quella di $y(n) = x(n - n_0)$.

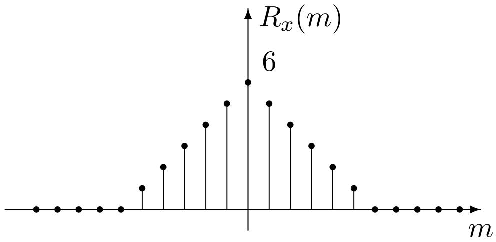


Figura 15: $R_x(\tau)$ per un impulso rettangolare discreto

Risulta:

$$\begin{aligned} R_y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)y(n-m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-n_0)x(n-n_0-m) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k-m) = R_x(m) \end{aligned} \tag{59}$$

Nell'ultimo passaggio si è fatto il seguente cambio di variabili: $k = n - n_0$. La funzione di autocorrelazione non cambia se il segnale viene traslato, coerentemente col fatto che è una misura relativa (confronto il segnale con una sua traslazione).

6.1.5 Esempio

Calcoliamo $R_x(m)$ per il segnale esponenziale $x(n) = a^n \mathrm{u}(n)$ con $|a| < 1$. Procediamo solo per $m > 0$:

$$R_x(m) = \sum_{n=m}^{+\infty} a^n\, a^{(n-m)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k\, a^{(k+m)} = a^m \sum_{k=0}^{+\infty} (a^2)^k = \frac{a^m}{1-a^2}$$

In conclusione:

$$R_x(m) = \frac{a^{-|m|}}{1-a^2}$$

6.2 Funzione di mutua correlazione

La funzione di mutua correlazione è calcolata per valutare il livello di similitudine tra due segnali diversi, o meglio tra un segnale $x(t)$ ($x(n)$), e la versione ritardata $y(t-\tau)$ ($y(n-m)$), al variare di τ (m). Per segnali di energia si definisce come:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)\, dt \tag{60}$$

e

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m) \tag{61}$$

mentre per segnali di potenza:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)\,dt \tag{62}$$

e

$$R_{xy}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)y^*(n-m) \tag{63}$$

Dal punto di vista del calcolo bisogna procedere esattamente nello stesso modo visto prima. Tali funzioni godono delle seguenti proprietà:

1. Il valore nell'origine coincide con l'energia o la potenza mutua:

$$R_{xy}(0) = \begin{cases} E_{xy} \\ P_{xy} \end{cases} \tag{64}$$

2. Simmetria coniugata:

$$R_{xy}(\cdot) = R^*_{yx}(-(\cdot)) \tag{65}$$

   Questa proprietà evidenzia che la mutua correlazione dipende dall'ordine in cui i due segnali sono considerati.

3. La funzione di mutua correlazione è limitata:

$$|R_{xy}(\cdot)| \leq \begin{cases} \sqrt{E_x E_y} \\ \sqrt{P_x P_y} \end{cases} \tag{66}$$

Supponiamo adesso di considerare il segnale $z(t) = x(t) + y(t)$ e di voler determinare $R_z(\tau)$.

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &=< [x(t)+y(t)][x(t-\tau)+y(t-\tau)]^* > \\ &=< x(t)x^*(t-\tau) > + < y(t)y^*(t-\tau) > + < x(t)y^*(t-\tau) > + < y(t)x^*(t-\tau) > \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) \end{aligned}$$

Se i segnali sono reali si ha che:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{xy}(-\tau) \tag{67}$$

Se poi $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0\ \forall\tau$ i segnali si dicono *incoerenti*. Si è visto che una condizione sufficiente per l'additività dell'energia o della potenza è che $R_{xy}(0) = 0$ (condizione di ortogonalità). Evidentemente questo significa che se due segnali sono incoerenti sono anche ortogonali, ma non vale il viceversa.