Appunti di Teoria dei Segnali
a.a. 2014/2015

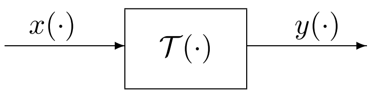
Analisi dei sistemi nel dominio del tempo

L.Verdoliva

In questa sezione studieremo i sistemi tempo continuo e tempo discreto nel dominio del tempo. Li classificheremo in base alle loro proprietà e focalizzeremo l'attenzione sulla classe dei sistemi lineari tempo invarianti (LTI). Vedremo che tali sistemi si possono caratterizzare facilmente una volta nota la loro risposta impulsiva mediante la somma di convoluzione, nel caso discreto, o l'integrale di convoluzione, nel caso continuo.

1 Generalità sui sistemi

In molte applicazioni, soprattutto nell'ambito delle telecomunicazioni, è necessario progettare dispositivi che realizzino determinate operazioni sui segnali, siano essi di natura continua o discreta. Tali dispositivi sono chiamati sistemi, e producono segnali in uscita in corrispondenza di determinati ingressi. In realtà, non sempre le modifiche che subisce un segnale sono intenzionali, spesso i segnali nel percorso dalla sorgente al destinatario possono subire distorsioni a causa delle caratteristiche non ideali del canale o degli apparati di trasmissione e ricezione; anche in questo caso si usa la schematizzazione mediante sistemi. Matematicamente un sistema può essere rappresentato mediante una trasformazione rappresentata graficamente in figura[1].



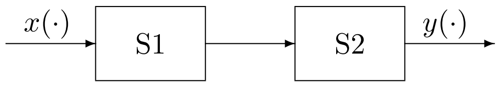
Tale rappresentazione evidenzia che si suppone il sistema come una "scatola nera", la cui struttura interna non è nota o comunque può essere ignorata. In modo alternativo si può usare la seguente notazione:

$$x(\cdot) \longrightarrow y(\cdot)$$

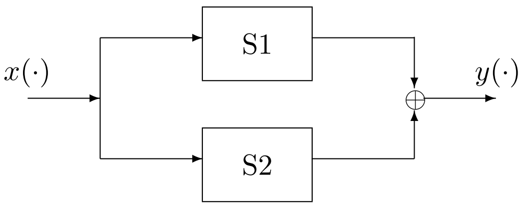
I sistemi si possono classificare in base ai segnali che essi elaborano, per esempio un sistema si dice *continuo* se ingresso e uscita sono segnali analogici: $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$, si dice, invece *numerico* se ingresso e uscita sono segnali tempo discreto: $y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$.

[1]La notazione $x(\cdot)$ è usata per trattare sia il caso continuo, $x(t)$, che quello discreto, $x(n)$.

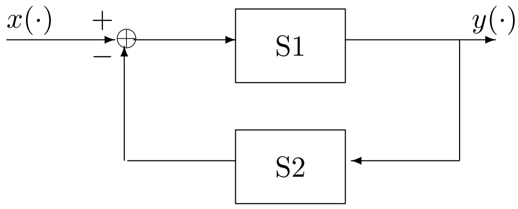
E' possibile costruire sistemi più complessi, che quindi modellano più accuratamente la realtà, mediante diversi tipi di connessione, così come mostrato nella seguente figura (N.B. il simbolo $\oplus$ indica l'operazione di somma tra due segnali).



a) Connessione in cascata



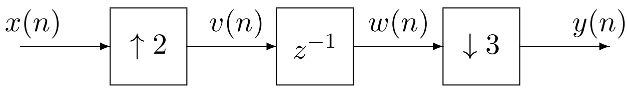
b) Connessione in parallelo



c) Connessione in controreazione

Di seguito consideriamo alcuni esempi di connessioni di sistemi e ne valutiamo il legame ingresso/uscita complessivo.

a) *Cascata di tre sistemi.* Si consideri la cascata dei sistemi mostrata in figura.



Vi ricordo che i simboli $\uparrow$ e $\downarrow$ indicano, rispettivamente, l'espansione e la decimazione, mentre z^{-1} denota il ritardo unitario (più in generale, z^{-n_0} rappresenta il ritardo di n_0 unità[2]). Le relazioni ingresso uscita per ogni sistema sono allora:

$$\text{Sistema} \quad 1: \quad v(n) = x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n \quad \text{pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{Sistema} \quad 2: \quad w(n) = v(n-1)$$

$$\text{Sistema} \quad 3: \quad y(n) = w(3n)$$

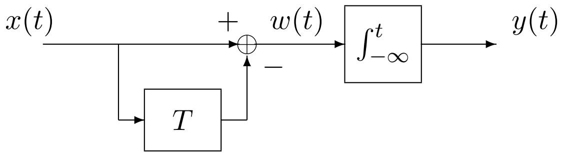
Il sistema complessivo ha relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = w(3n) = v(3n-1) = x\left[\frac{3n-1}{2}\right] = \begin{cases} x\left(\frac{3n-1}{2}\right) & n \quad \text{dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verificate che se $x(n) = \mathcal{R}_4(n)$ allora $y(n) = \delta(n-1)$.

[2] L'uso di questa simbologia è legato alla Z-trasformata, argomento che non verrà trattato in questo corso.

b) *Filtro interpolatore di ordine zero.* Questo sistema sarà analizzato quando studieremo la conversione analogico-numerica ed è ottenuto connettendo in cascata il parallelo di un sistema identico e di una linea di ritardo T con un integratore, come mostrato in figura:



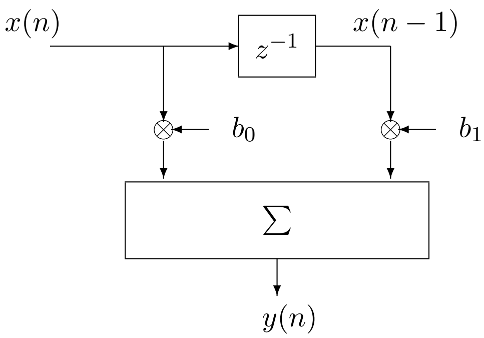
Le relazioni ingresso/uscita sono:

$$w(t) = x(t) - x(t - T)$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(\alpha)\, d\alpha$$

Complessivamente si ha:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [x(\alpha) - x(\alpha - T)]\, d\alpha$$

c) *Filtro a prese trasversali.* Si consideri il sistema mostrato in figura. Esso si può riguardare come il parallelo di un moltilplicatore per una costante e la cascata di un ritardo elementare e di un altro moltiplicatore.



Questo sistema ha una relazione ingresso/uscita complessiva:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n - 1)$$

Notate che per $b_0 = 1$ e $b_1 = -1$ otteniamo il sistema che realizza la differenza prima. Più in generale è possibile considerare un sistema in cui la relazione sia del tipo:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n - k)$$

cioè in cui il segnale in uscita sia la combinazione lineare, pesata secondo opportuni coefficienti, degli ingressi ritardati. Vedremo che questo tipo di sistema assume notevole importanza nell'elaborazione dei segnali.

1.1 Proprietà

Sia per l'analisi che per il progetto di un sistema è molto importante acquisire informazioni sul suo comportamento individuando le proprietà che soddisfa. Di seguito sono descritte le proprietà che saranno considerate per la caratterizzazione di un sistema.

1. *Linearità*: Un sistema è lineare se è omogeneo e additivo, cioè se verifica le condizioni:

   (a) *Omogeneità*. Ad un cambiamento di scala delle ampiezze per l'ingresso si ha lo stesso cambiamento di scala anche per l'uscita:

   $$x(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) \qquad \Longrightarrow \qquad A\,x(\cdot) \longrightarrow A\,y(\cdot) \tag{1}$$

   (b) *Additività*. La risposta alla somma di due segnali è la somma delle singole risposte:

   $$\begin{array}{l} x_1(\cdot) \longrightarrow y_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \longrightarrow y_2(\cdot) \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1(\cdot) + x_2(\cdot) \longrightarrow y_1(\cdot) + y_2(\cdot) \tag{2}$$

   Vale quindi il principio di sovrapposizione: la risposta ad una combinazione lineare di segnali, secondo certi coefficienti, è la combinazione lineare delle risposte, secondo gli stessi coefficienti:

   $$x_k(\cdot) \longrightarrow y_k(\cdot), \qquad i = 1, 2, \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_k a_k x_k(\cdot) \longrightarrow \sum_k a_k y_k(\cdot) \tag{3}$$

   Si noti che un sistema lineare, per la proprietà di omogeneità, produce un'uscita nulla se l'ingresso è nullo. Questo significa che se il sistema non viene forzato da un segnale in ingresso non può fornire un segnale in uscita.

2. *Tempo invarianza*: Un sistema è tempo invariante se una traslazione dell'ingresso causa la stessa traslazione dell'uscita, cioè:

   $$\begin{array}{rcl} x(t) \longrightarrow y(t) & \Longrightarrow & x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0) \\ x(n) \longrightarrow y(n) & \Longrightarrow & x(n-n_0) \longrightarrow y(n-n_0) \end{array} \tag{4}$$

   comunque si scelga l'ingresso e per ogni possibile valore di traslazione. Concettualmente un sistema è tempo invariante se il comportamento e le caratteristiche del sistema non cambiano nel tempo.

3. *Causalità*: Un sistema è causale se il valore dell'uscita all'istante t (o n) dipende solo dai valori assunti dall'ingresso in istanti precedenti o uguali a t (n). Quindi per un sistema causale l'uscita non può dipendere da valori futuri.

   La causalità non è una condizione necessaria affinchè un segnale possa essere elaborato. In effetti, in moltissime applicazioni come l'elaborazione di immagini, di segnali geofisici o sismici, i segnali vengono spesso prima registrati e poi elaborati successivamente. Solo quando si considerano elaborazioni in tempo reale il vincolo di causalità deve essere rispettato.

4. *Dispersività*: Un sistema si dice non dispersivo (o senza memoria) se l'uscita in un determinato istante dipende dall'ingresso applicato nello stesso istante (sistema istantaneo); di contro, un sistema è dispersivo (o con memoria) se l'uscita in un determinato istante dipende dall'ingresso applicato anche in istanti diversi da quello attuale.

   Il concetto di memoria in un sistema corrisponde alla presenza di un meccanismo che conserva informazione sui valori dell'ingresso applicati in istanti diversi da quello corrente, siano essi passati o futuri.

5. *Stabilità*: Un sistema si dice stabile se la risposta ad un ingresso limitata è anch'essa limitata, si parla allora di stabilità BIBO (Bounded Input - Bounded Output). Dal punto di vista matematico, questo significa che esistono due costanti, indichiamole con K_x e K_y tali che

   $$|x(\cdot)| \leq K_x < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad |y(\cdot)| \leq K_y < +\infty \tag{5}$$

   Se esiste anche un solo ingresso limitato, che produce un'uscita illimitata, allora il sistema si definisce non stabile.

E' importante sottolineare che, affinché un sistema abbia una data proprietà, questa deve essere valida per ogni possibile segnale posto in ingresso. Se una proprietà risulta valida per qualche segnale in ingresso, ma non per altri, allora non è possibile caratterizzare il sistema con quella proprietà. Questa considerazione ci permette di affermare che trovare un controesempio è sufficiente a dimostrare che il sistema non soddisfa la proprietà in esame. Di seguito si considerano alcuni esempi di sistemi che saranno caratterizzati in termini delle loro proprietà.

1.1.1 Esempio

Consideriamo il sistema continuo che realizza la traslazione di un segnale:

$$y(t) = x(t-4)$$

1. *Linearità*: Per stabilire se il sistema è lineare consideriamo due ingressi arbitrari $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

   $$\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) = x_1(t-4) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) = x_2(t-4) \end{aligned}$$

   Sia poi $x_3(t)$ una combinazione lineare degli ingressi:

   $$x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

   Adesso bisogna verificare se l'uscita $y_3(t)$ corrispondente all'ingresso $x_3(t)$ coincide con la combinazione lineare secondo gli stessi coefficienti delle singole uscite, cioè con il segnale $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$:

   $$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3(t-4) \\ &= a_1 x_1(t-4) + a_2 x_2(t-4) \\ &\equiv a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \end{aligned}$$

   Il sistema quindi risulta lineare.

2. *Tempo invarianza*: Per controllare se il sistema è tempo invariante, indichiamo con $y_1(t)$ l'uscita corrispondente all'ingresso traslato. Ciò che bisogna valutare è se $y_1(t)$ coincide con l'uscita traslata $y(t-t_0)$. Calcoliamo entrambi i termini e vediamo se sono uguali:

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t-4-t_0) \\ y(t-t_0) = x(t-t_0-4) \end{cases}$$

   I due termini sono uguali per cui il sistema è tempo invariante.

3. *Causalità*: Il sistema è causale perchè l'uscita all'istante t dipende dall'ingresso applicato in un istante di tempo antecedente $(t-4)$.

4. *Dispersività*: Il sistema è dispersivo dato che conserva memoria di un istante temporale diverso da t. In effetti, per affermare che un sistema è dispersivo basta riconoscere che non risulti istantaneo.

5. *Stabilità*: Il sistema è stabile dato che se $x(t)$ è limitata anche una sua versione traslata nel tempo risulterà limitata, cioè

$$|x(t)| \leq K \qquad \Longrightarrow \qquad |x(t-4)| \leq K$$

1.1.2 Esempio

Consideriamo il sistema continuo che realizza la compressione di un segnale:

$$y(t) = x(2t)$$

1. *Linearità*: Ripetiamo lo stesso procedimento visto prima:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) = x_1(2t) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) = x_2(2t) \end{aligned}$$

   Vediamo adesso se $y_3(t)$ coincide con $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3(2t) \\ &= a_1x_1(2t) + a_2x_2(2t) \\ &\equiv a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \end{aligned}$$

   Anche in questo caso il sistema è lineare.

2. *Tempo invarianza*: Procediamo nuovamente come nell'esempio precedente calcolando $y_1(t)$ e $y(t-t_0)$:

$$\begin{cases} y_1(t) = x(2t-t_0) \\ y(t-t_0) = x(2(t-t_0)) = x(2t-2t_0) \end{cases}$$

   Il sistema risulta tempo variante dato che $y_1(t) \neq y(t-t_0)$.

3. *Causalità*: Quando si controlla la causalità di un sistema è molto importante osservare attentamente la relazione ingresso/uscita. In questo caso, infatti, l'uscita calcolata in un istante negativo t_0 dipende dai valori dell'ingresso $x(2t_0)$ applicati quindi in istanti di tempo passati rispetto a t_0. Saremmo così tentati a concludere che il sistema è causale. In realtà bisogna fare attenzione a controllare la relazione ingresso/uscita per tutti gli istanti di tempo. In particolare, per $t > 0$, per esempio $t = 4$ si ha che $y(4) = x(8)$, per cui l'uscita in questo istante dipende dall'ingresso applicato in un istante futuro. Il sistema è quindi non causale.

4. *Dispersività*: E' facile riconoscere che il sistema è dispersivo, dato che l'uscita all'istante t_0 dipende dall'ingresso applicato in un altro istante, $2t_0$.

5. *Stabilità*: Il sistema è stabile dato che se $x(t)$ è limitata anche una sua versione compressa nel tempo risulterà limitata.

$$|x(t)| \leq K \qquad \Longrightarrow \qquad |x(2t)| \leq K$$

1.1.3 Esempio

Consideriamo il seguente sistema continuo:

$$y(t) = x(t)\cos(t+1)$$

1. *Linearità*: In questo caso risulta:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) = x_1(t)\cos(t+1) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) = x_2(t)\cos(t+1) \end{aligned}$$

inoltre si ha:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3(t)\cos(t+1) \\ &= [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]\cos(t+1) \\ &= a_1x_1(t)\cos(t+1) + a_2x_2(t)\cos(t+1) \\ &\equiv a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \end{aligned}$$

Anche questo sistema è lineare.

2. *Tempo invarianza*: Procediamo nuovamente calcolando $y_1(t)$ e $y(t-t_0)$:

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t-t_0)\cos(t) \\ y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos(t-t_0) \end{cases}$$

Il sistema è tempo variante.

3. *Causalità*: Per stabilire se il sistema è causale è molto importante distinguere gli effetti dell'ingresso da quelli di altre funzioni usate nella definizione del sistema. In questo caso l'uscita $y(t)$ dipende dall'ingresso $x(t)$ applicato nello stesso istante di tempo (sistema istantaneo), il fatto che questo valore sia moltiplicato per un numero che varia col tempo non deve farci indurre a ritenere che il sistema sia non causale. L'istantaneità del sistema ne implica la causalità.

4. *Dispersività*: Il sistema è istantaneo, quindi è non dispersivo.

5. *Stabilità*: Il sistema è stabile. Infatti risulta:

$$|x(t)| \leq K \qquad \Longrightarrow \qquad |x(t)\cos(t+1)| = |x(t)||\cos(t+1)| \leq |x(t)| \leq K$$

1.1.4 Esempio

Consideriamo il sistema discreto che realizza la seguente operazione:

$$y(n) = n\, x^2(n)$$

1. *Linearità*: Questo sistema non è lineare, infatti:

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longrightarrow y_1(n) = n\, x_1^2(n) \\ x_2(n) &\longrightarrow y_2(n) = n\, x_2^2(n) \end{aligned}$$

d'altra parte:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= n\, x_3^2(n) \\ &= [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2 \\ &= a_1^2 n\, x_1^2(n) + a_2^2 n\, x_2^2(n) + 2a_1a_2 n\, x_1(n)x_2(n) \\ &\neq a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \end{aligned}$$

2. *Tempo invarianza*: E' facile osservare che il sistema è tempo variante, dato che risulta

$$\begin{cases} y_1(n) = n\, x^2(n-n_0) \\ y(n-n_0) = (n-n_0)\, x^2(n-n_0) \end{cases}$$

3. *Causalità*: Il sistema è istantaneo, quindi causale.

4. *Dispersività*: Il sistema è istantaneo, quindi non dispersivo.

5. *Stabilità*: Quando sospettiamo l'instabilità di un sistema, è sufficiente trovare un solo ingresso limitato che fornisce un'uscita illimitata per stabilire che il sistema non sia stabile (vi ricordo che la condizione di stabilità deve essere rispettata comunque si scelga l'ingresso). In questo caso, per esempio, consideriamo $x(n) = 1$, allora l'uscita risulta essere:

$$y(n) = n$$

che è illimitata.

1.1.5 Esempio

Consideriamo il sistema discreto che realizza la somma corrente (anche detto accumulatore):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

1. *Linearità*: Questo sistema è lineare, infatti:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_3(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] \\ &= a_1 \sum_{k=-\infty}^{n} x_1(n) + a_2 \sum_{k=-\infty}^{n} x_2(n) \\ &\equiv a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \end{aligned}$$

2. *Tempo invarianza*: Procediamo calcolando $y_1(n)$ e $y(n-n_0)$:

$$\begin{cases} y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k-n_0) \\ y(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k) \end{cases}$$

   Il sistema sembrerebbe tempo variante. In realtà non è possibile ancora affermarlo se prima non si procede con un cambio di variabili:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k-n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m)$$

   A questo punto si osserva che il sistema è tempo invariante.

3. *Causalità*: Il sistema è causale dato che l'uscita all'istante n dipende dall'ingresso applicato fino all'istante n (passato e presente).

4. *Dispersività*: Il sistema ha memoria dell'ingresso applicato fino all'istante n, quindi è dispersivo.

5. *Stabilità*: Il sistema somma tutti i valori passati dell'ingresso, e risulta non stabile poiché la somma può crescere aumentando sempre, anche se $x(n)$ è limitato. Per esempio, si supponga di porre in ingresso il segnale gradino $x(n) = \mathrm{u}(n)$, allora l'uscita risulta essere:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathrm{u}(k) = (n+1)\mathrm{u}(n)$$

   cioè $y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = 3, \ldots$, quindi $y(n)$ cresce sempre all'aumentare di n.

2 Sistemi LTI tempo discreto

Uno dei motivi più importanti per lo sviluppo di strumenti generali per l'analisi e il progetto di sistemi è che diversi fenomeni fisici presentano da un punto di vista matematico lo stesso tipo di descrizione. E' necessario allora identificare classi di sistemi che abbiano due importanti caratteristiche:

1. consentire lo sviluppo di strumenti efficaci per la loro analisi;
2. modellare diversi tipi di sistemi fisici.

I sistemi lineari tempo invarianti (LTI) rappresentano la classe di sistemi che soddisfa queste due caratteristiche. E' possibile infatti studiare in dettaglio tali sistemi attraverso potenti strumenti matematici che svilupperemo in questo corso. Inoltre, molti processi che si incontrano nelle telecomunicazioni possono essere descritti abbastanza accuratamente mediante sistemi LTI.

Abbiamo già visto che per un sistema lineare se l'ingresso si può esprimere come combinazione lineare di segnali elementari:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + a_3 x_3(n) + \ldots = \sum_k a_k x_k(n)$$

e se $x_k(n) \longrightarrow y_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots$, l'uscita è data da:

$$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) + a_3 y_3(n) + \ldots = \sum_k a_k y_k(n)$$

Per questi sistemi quindi è possibile conoscere la risposta di un qualsiasi segnale applicando il principio di sovrapposizione. Abbiamo anche riconosciuto che un segnale tempo discreto si può esprimere come combinazione lineare di impulsi ritardati, opportunamente pesati:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{6}$$

Se allora si pone $a_k = x(k)$ e $x_k(n) = \delta(n-k)$ e si indica con $h_k(n)$ la risposta del sistema quando si applica un impulso traslato in k:

$$\delta(n-k) \longrightarrow h_k(n)$$

l'uscita si può determinare come:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n) \tag{7}$$

Se poi aggiungiamo l'ipotesi di tempo invarianza, le risposte ad impulsi traslati sono versioni traslate l'una dell'altra. In altri termini se

$$\delta(n) \longrightarrow h_0(n)$$

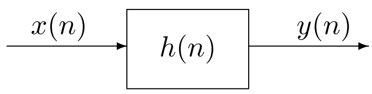
allora

$$\delta(n-k) \longrightarrow h_0(n-k)$$

Posto $h_0(n) \equiv h(n)$ la risposta all'impulso unitario, detta anche *risposta impulsiva*, l'uscita in corrispondenza di un generico ingresso $x(n)$ per sistemi LTI tempo discreti è

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \stackrel{\triangle}{=} x(n) * h(n) \tag{8}$$

La (8) si definisce *somma di convoluzione* tra $x(n)$ e $h(n)$. Questa relazione evidenzia come un sistema LTI sia caratterizzato completamente dalla conoscenza della sua risposta impulsiva, nota infatti $h(n)$ si può determinare l'uscita qualunque sia il segnale in ingresso.



Osserviamo poi che risulta:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) = x(n) * \delta(n) \tag{9}$$

cioè la convoluzione di un segnale con l'impulso unitario fornisce il segnale stesso, per cui l'impulso unitario si può interpretare come la risposta impulsiva del sistema identico.
Consideriamo di seguito alcuni esempi di calcolo della risposta impulsiva per sistemi LTI:

a) *Differenza prima.* Il sistema che realizza la differenza prima $\nabla_1[x(n)]$:

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

è LTI, ha senso quindi determinare la sua risposta impulsiva:

$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)] = \delta(n) - \delta(n-1)$$

Quindi

$$y(n) = x(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)]$$

b) *Somma corrente.* Nell'esempio 1.1.5 abbiamo visto come il sistema che realizza la somma corrente:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

sia LTI, determiniamo adesso la sua risposta impulsiva $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$:

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \mathrm{u}(n)$$

Quindi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) * \mathrm{u}(n)$$

L'uscita si può determinare come la convoluzione tra il segnale $x(n)$ e il gradino unitario.

c) *Media aritmetica.*

$$y(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=n-3}^{n} x(k) = \frac{x(n-3)+x(n-2)+x(n-1)+x(n)}{4}$$

Questa operazione non fa altro che calcolare la media degli ultimi quattro campioni del segnale, cioè la media è determinata su una finestra di osservazione che si sposta nel tempo (Filtro a media mobile o Moving Average (MA)). E' facile riconoscere che il sistema è LTI con risposta impulsiva pari a:

$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)] = \frac{1}{4}\sum_{k=n-3}^{n} \delta(k) = \frac{1}{4}\mathcal{R}_4(n)$$

Quindi

$$y(n) = x(n) * \frac{1}{4}\mathcal{R}_4(n)$$

Per comprendere bene la procedura di calcolo della somma di convoluzione andiamo a vedere cosa accade puntualmente:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \sum_k x(k)h(-k) \\
y(1) &= \sum_k x(k)h(1-k) = \sum_k x(k)h(-(k-1)) \\
y(2) &= \sum_k x(k)h(2-k) = \sum_k x(k)h(-(k-2)) \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Per determinare il valore nell'origine $y(0)$ bisogna prima ribaltare (rispetto all'asse delle ordinate) la risposta impulsiva, $h(-k)$, poi realizzare il prodotto con il segnale in ingresso, $x(k)h(-k)$, e infine sommare tutti i valori $\sum_k x(k)h(-k)$. Analogamente per determinare $y(1)$ la risposta impulsiva va ribaltata, $h(-k)$, ritardata nel punto 1, $h(-(k-1))$, per poi eseguire il prodotto, $x(k)h(-(k-1))$ e la somma, $\sum_k x(k)h(-(k-1))$, e così via. Più in generale,

$$y(n_0) = \sum_k x(k)h(n_0-k) = \sum_k x(k)h(-(k-n_0))$$

Bisogna seguire quattro passi per determinare il valore dell'uscita nell'istante n_0:

1. *Riflessione.* Ribaltare il segnale $h(k)$ e ottenere $h(-k)$;

2. *Traslazione.* Traslare $h(-k)$ verso destra (sinistra) se n_0 è positivo (negativo) e ottenere $h(-(k-n_0)) = h(n_0-k)$;

3. *Prodotto.* Moltiplicare $x(k)$ e $h(n_0-k)$ e ottenere $x(k)h(n_0-k)$.

4. *Somma.* Sommare i valori della sequenza prodotto per ottenere il valore in uscita all'istante $n = n_0$.

Dato che questa procedura fornisce il valore dell'uscita in un singolo istante $n = n_0$, sarà necessario far variare n su tutto l'asse temporale per conoscere l'uscita $y(n)$ in ogni istante di tempo. Di seguito sono riportati alcuni esempi di calcolo della convoluzione.

1. $x(n) = \mathcal{R}_6(n)$, $h(n) = \mathcal{R}_3(n)$. Procediamo graficamente per calcolare i valori di $y(n) = x(n) * h(n)$.

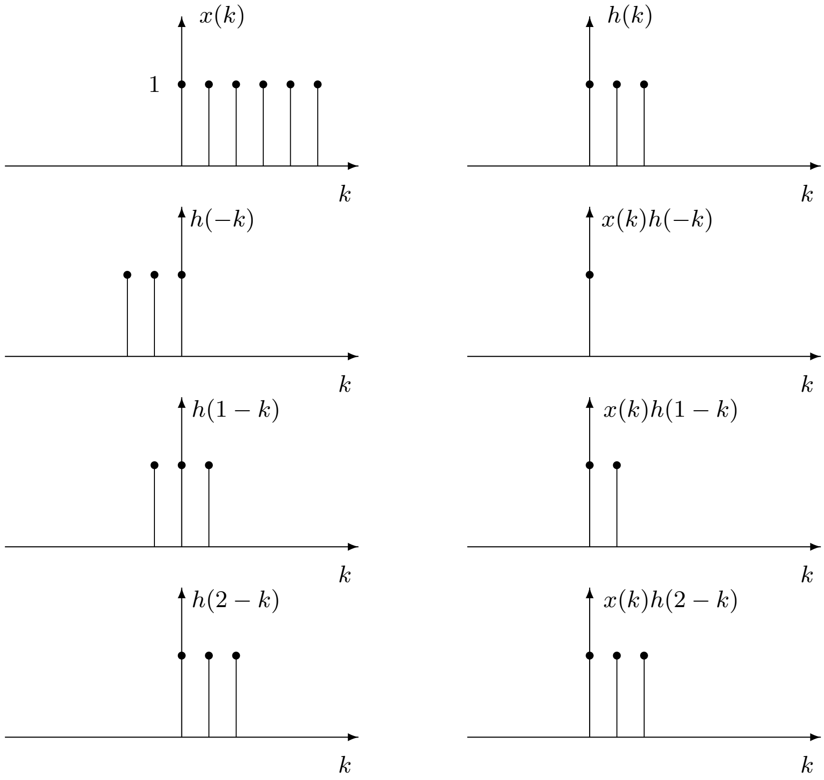


Figura 1: Calcolo grafico della convoluzione.

Notiamo subito che per $n < 0$ i due segnali non si sovrappongono e che risulta:

$$y(0) = \sum_k x(k)h(-k) = 1$$
$$y(1) = \sum_k x(k)h(1-k) = 2$$
$$y(2) = \sum_k x(k)h(1-k) = 3$$
$$\ldots = \ldots$$

Questo tipo di procedimento è corretto, solo che risulta percorribile se le sequenze sono molto corte, dato che il calcolo è fatto punto per punto. Allora ciò che conviene fare è sempre procedere graficamente considerando cinque diverse situazioni.

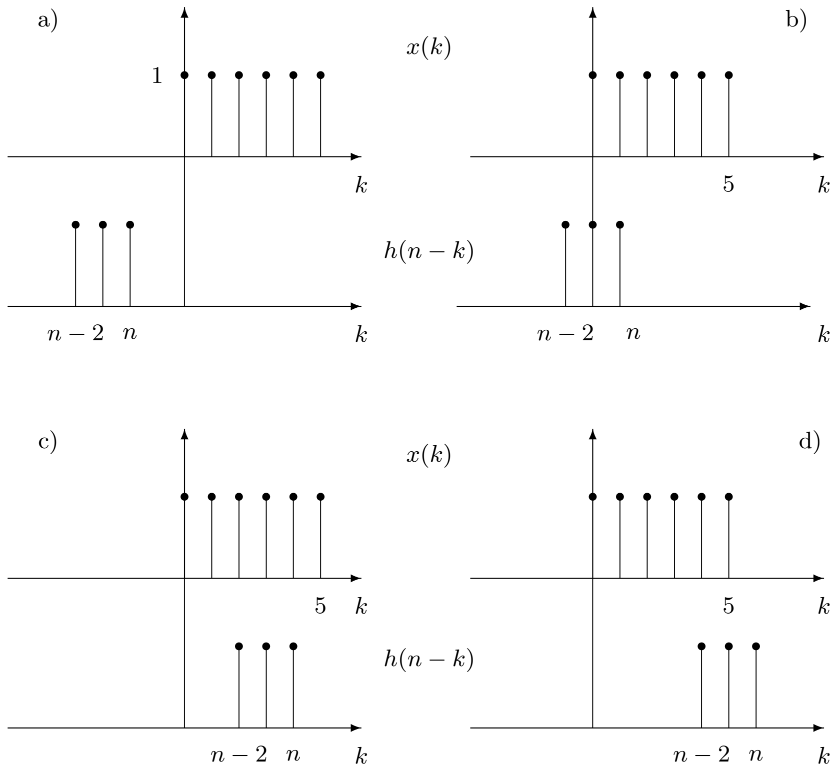


Figura 2: Calcolo grafico della convoluzione.

a) $n < 0$;
i segnali $x(k)$ e $h(n-k)$ non si sovrappongono, quindi $y(n) = 0$.

b) $0 \leq n \leq 1$;

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

c) $2 \leq n \leq 5$;

$$y(n) = \sum_{k=n-2}^{n} 1 = 3$$

d) $6 \leq n \leq 7$;

$$y(n) = \sum_{k=n-2}^{5} 1 = 8 - n$$

e) $n > 7$;
i segnali $x(k)$ e $h(n-k)$ non si sovrappongono, quindi $y(n) = 0$.

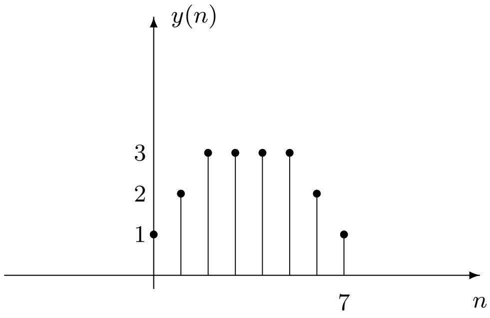


Figura 3: Risultato della convoluzione.

Otteniamo in questo modo il risultato mostrato in figura 3.

Facciamo alcune osservazioni:

- La durata del segnale $y(n)$ è 8, che corrisponde a $3 + 6 - 1$, cioè detta M la durata di $x(n)$ e N quella di $h(n)$, il segnale $y(n) = x(n) * h(n)$ ha durata $M + N - 1$ (evidentemente questa considerazione è valida solo per segnali di durata finita).
- Risulta:

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_6(k)\mathcal{R}_3(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{5} \mathcal{R}_3(n-k) \end{aligned}$$

  Quindi il segnale in uscita si può scrivere come

$$y(n) = \mathcal{R}_3(n) + \mathcal{R}_3(n-1) + \mathcal{R}_3(n-2) + \mathcal{R}_3(n-3) + \mathcal{R}_3(n-4) + \mathcal{R}_3(n-5)$$

  Provate a sommare questi segnali e verificate che si ottiene lo stesso risultato mostrato in figura 3.
- Avrete notato che il procedimento grafico usato per il calcolo della convoluzione è molto simile a quello visto per il calcolo della correlazione. Cerchiamo di capire che differenze ci sono nel calcolare la correlazione e la convoluzione tra due segnali. Determiniamo allora la mutua correlazione tra $x(n)$ e $h(n)$ (in questo esempio entrambi segnali di energia):

$$R_{xh}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(-(m-n)) = x(m) * h(-m)$$

Scopriamo allora che bisogna procedere esattamente allo stesso modo, eccetto il fatto che nella convoluzione il segnale va ribaltato prima di essere traslato.

2. $x(n) = a^n \mathrm{u}(n)$ con $0 < a < 1,\ h(n) = \mathrm{u}(n)$. Per calcolare $y(n) = x(n) * h(n)$ ci sono solo due diverse situazioni da considerare:

   a) $n < 0$;
   i segnali non si sovrappongono quindi $y(n) = 0$

   b) $n \geq 0$;
   $$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

   In conclusione
   $$y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \mathrm{u}(n)$$

   Notiamo che se consideriamo il comportamento per $n \to +\infty$ di $y(n)$, si ha:
   $$\lim_{n\to+\infty} y(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$

   Nell'esempio si è scelto $a = 0.9$, per cui il segnale all'infinito tende al valore 10 così come è mostrato in figura.

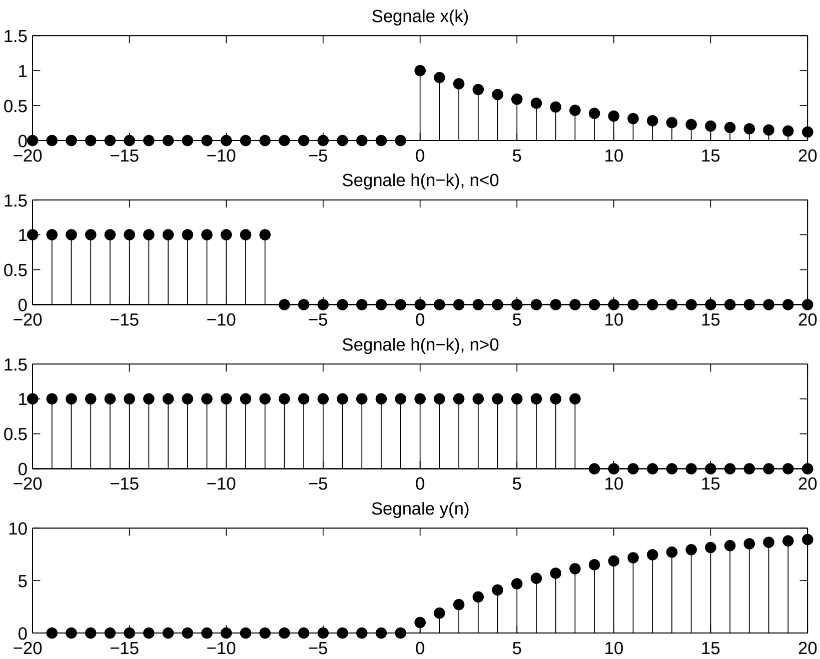


Figura 4: Calcolo della convoluzione tra $x(n) = a^n \mathrm{u}(n)$ e $h(n) = \mathrm{u}(n)$

2.1 Proprietà della convoluzione

La convoluzione gode delle seguenti proprietà:

a) *proprietà commutativa*:

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{10}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \qquad (11) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n-r)h(r) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h(r)x(n-r) = h(n) * x(n) \end{aligned}$$

Nella (11) è stato fatto il cambio di variabile $r = n - k$.

Questa proprietà ci dice che è possibile scambiare il ruolo di $x(n)$ e $h(n)$, quindi si può scegliere nel calcolo della convoluzione il segnale che si vuole ribaltare e traslare.

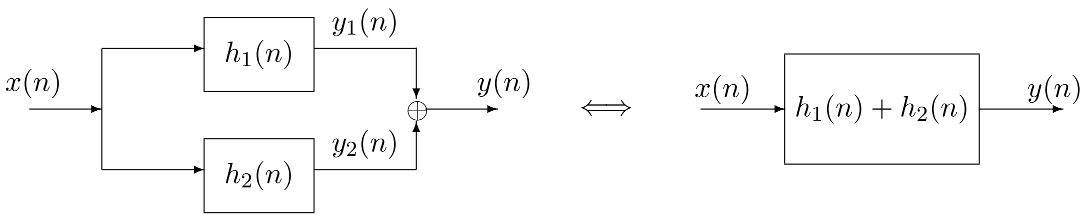
b) *proprietà distributiva.*

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \tag{12}$$

Questa proprietà ha un'utile interpretazione in termini di connessione tra sistemi. Si consideri il parallelo di due sistemi LTI, con risposta impulsiva $h_1(n)$ e $h_2(n)$, rispettivamente. Il segnale in uscita si può esprimere come:

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \end{aligned}$$

Due sistemi LTI in parallelo sono equivalenti ad un unico sistema con risposta impulsiva data dalla somma delle due risposte impulsive, $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$. Questa proprietà si può poi generalizzare al caso di un numero arbitrario di sistemi connessi in parallelo.



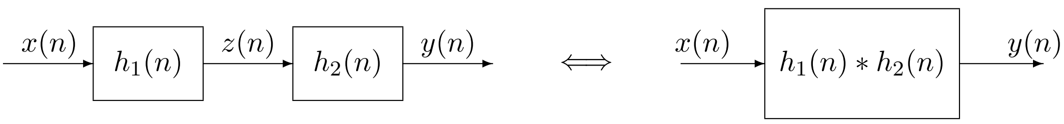
c) *proprietà associativa.*

$$x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \tag{13}$$

Anche in questo caso è possibile fornire un'interpretazione in termini di connessione di due sistemi. Infatti risulta:

$$\begin{aligned} y(n) &= z(n) * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

Due sistemi LTI in cascata sono equivalenti ad un unico sistema con risposta impulsiva data dalla convoluzione delle due risposte impulsive, $h(n) = h_1(n)*h_2(n)$. Poiché sappiamo che la convoluzione è commutativa, è possibile equivalentemente valutare $h_2(n) * h_1(n)$, il che significa che la risposta impulsiva globale è indipendente dall'ordine con cui i sistemi sono connessi in serie. Anche questa proprietà può essere generalizzata.



d) *proprietà associativa mista.*

$$a\,[x(n) * h(n)] = [a\,x(n)] * h(n) = x(n) * [a\,h(n)] \tag{14}$$

Questa proprietà afferma che è possibile indifferentemente scalare l'ampiezza di uno dei due fattori della convoluzione o il risultato stesso della convoluzione.

e) *Invarianza temporale.* Se $x(n) * h(n) = y(n)$, allora

$$x(n - n_0) * h(n) = y(n - n_0) \tag{15}$$

$$x(n) * h(n - n_0) = y(n - n_0) \tag{16}$$

$$x(n - n_1) * h(n - n_2) = y(n - (n_1 + n_2)) \tag{17}$$

Questa proprietà ci dice che se abbiamo già calcolato la convoluzione tra due segnali e se ne trasliamo uno dei due o entrambi, anche il risultato della convoluzione risulterà traslato della stessa quantità o della somma dei due ritardi. Dato che per la (9) risulta $x(n) * \delta(n) = x(n)$, si ha inoltre:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0) \tag{18}$$

$$x(n - n_1) * \delta(n - n_2) = x(n - (n_1 + n_2)) \tag{19}$$

Infine se $x(n) \equiv \delta(n)$ deriviamo ancora una serie di proprietà dell'impulso unitario:

$$\delta(n) * \delta(n) = \delta(n) \tag{20}$$

$$\delta(n) * \delta(n - n_0) = \delta(n - n_0) \tag{21}$$

$$\delta(n - n_1) * \delta(n - n_2) = \delta(n - (n_1 + n_2)) \tag{22}$$

Di seguito sono riportati alcuni esempi di calcolo della convoluzione in cui vengono sfruttate le proprietà.

1. Consideriamo nuovamente il segnale $x(n) = a^n\mathrm{u}(n)$ e la risposta impulsiva $h(n) = \mathrm{u}(n)$, ma questa volta procediamo a determinare $y(n) = h(n) * x(n)$, ribaltando e traslando l'esponenziale monolatero. Anche in questo caso vanno considerate due diverse situazioni:

   a) $n < 0$;
   i segnali non si sovrappongono quindi $y(n) = 0$.

   b) $n \geq 0$;

   $$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} a^{-k} = a^n \sum_{m=-n}^{0} a^m = a^n \frac{a^{-n} - a}{1-a} = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$$

   è stato fatto il cambio di variabili $m = -k$ per poter sfruttare la relazione: $\sum_{m=M}^{N} \alpha^m = \frac{\alpha^M - \alpha^{N+1}}{1-\alpha}$, valida per $\alpha \neq 1$.

   Otteniamo così lo stesso risultato dell'esempio svolto a pag.16, cioè:

   $$y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}\mathrm{u}(n) \tag{23}$$

   Notate che se si vuole calcolare la convoluzione tra $x(n) = a^n\mathrm{u}(n)$ *e* $h_1(n) = \mathrm{u}(n-3)$, non è necessario ripetere i conti, ma basta sfruttare la proprietà (16), dato che $h_1(n) = h(n-3)$. Si ottiene così:

   $$y(n) = \frac{1 - a^{n-2}}{1-a}\mathrm{u}(n-3)$$

2. Calcoliamo la convoluzione tra due impulsi rettangolari $x(n) = \mathcal{R}_3(n)$ e $h(n) = \mathcal{R}_2(n)$ sfruttando le proprietà (20), (21) e (22). Esprimiamo allora i due segnali come somma di impulsi unitari:

   $$\begin{aligned} x(n) &= \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) \\ h(n) &= \delta(n) + \delta(n-1) \end{aligned}$$

   A questo punto procediamo analiticamente:

   $$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)] * [\delta(n) + \delta(n-1)] \\ &= [\delta(n) * \delta(n)] + [\delta(n) * \delta(n-1)] + [\delta(n-1) * \delta(n)] + [\delta(n-1) * \delta(n-1)] + \\ &\quad + [\delta(n-2) * \delta(n)] + [\delta(n-2) * \delta(n-1)] \\ &= \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-2) + \delta(n-3) \\ &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3) \end{aligned}$$

   Questo procedimento è comodo se i segnali coinvolti hanno breve durata.

3. Supponiamo di voler calcolare la convoluzione tra le due sequenze:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \qquad\qquad h(n) = \mathrm{u}(n)$$

Anziché utilizzare il calcolo diretto sfruttiamo la proprietà distributiva della convoluzione. A tale scopo riscriviamo il segnale $x(n)$ come:

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n) + 2^n \mathrm{u}(-n-1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n) + 2^n \mathrm{u}(-n-1)\right] * \mathrm{u}(n) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n)\right] * \mathrm{u}(n) + [2^n \mathrm{u}(-n-1)] * \mathrm{u}(n) \\ &= y_1(n) + y_2(n) \end{aligned}$$

Il risultato della prima convoluzione si può ottenere dall'esempio precedente ponendo $a = 1/2$, quindi

$$y_1(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \mathrm{u}(n)$$

Per quanto riguarda invece la seconda convoluzione procediamo al calcolo diretto (ribaltando e traslando il gradino), si ha:

a) $n < 0$;

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{n-m} = 2^n \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \frac{1}{1-1/2} = 2^{n+1}$$

è stato fatto il cambio di variabili $m = n - k$ per poter sfruttare la relazione: $\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^m = \frac{1}{1-\alpha}$, valida per $|\alpha| < 1$.

b) $n \geq 0$;

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-1-m} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2(1-1/2)} = 1$$

è stato fatto il cambio di variabili $m = -1 - k$.

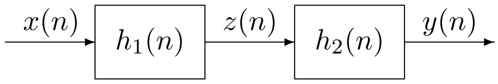
Quindi:

$$y_2(n) = 2^{n+1} \mathrm{u}(-n-1) + \mathrm{u}(n)$$

In conclusione

$$y(n) = \left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \mathrm{u}(n) + 2^{n+1} \mathrm{u}(-n-1)$$

4. Si consideri la cascata di due sistemi discreti con risposta impulsiva $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-4)$ e $h_2(n) = \mathrm{u}(n)$, rispettivamente.



Supponiamo di porre in ingresso il segnale $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n)$ e di voler calcolare il segnale in uscita $y(n)$. Possiamo procedere in diversi modi.

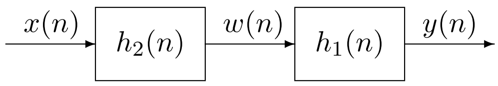
(a) Sfruttando la proprietà associativa riconosciamo che la cascata dei due sistemi è equivalente ad un unico sistema con risposta impulsiva $h(n)$:

$$h(n) = [\delta(n) - \delta(n-4)] * \mathrm{u}(n) = \mathrm{u}(n) - \mathrm{u}(n-4) = \mathcal{R}_4(n)$$

nei passaggi abbiamo utilizzato la relazione (9) e la (18). Quindi:

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n)\right] * \mathcal{R}_4(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \leq n \leq 3 \\ 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] & n > 3 \end{cases}$$

(b) In alternativa è possibile usare la proprietà commutativa e considerare la cascata dei due sistemi:



A questo punto, determiniamo prima $w(n) = x(n) * h_2(n)$ (in modo da sfruttare un calcolo svolto precedentemente) e poi valutiamo $y(n) = w(n) * h_1(n)$. Per la (23) si ha:

$$w(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n)\right] * \mathrm{u}(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \mathrm{u}(n)$$

Infine:

$$\begin{aligned} y(n) &= w(n) * [\delta(n) - \delta(n-4)] = w(n) - w(n-4) \\ &= \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \mathrm{u}(n) - \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\right] \mathrm{u}(n-4) \end{aligned}$$

Non vi fate ingannare dal fatto che i due risultati hanno una differente espressione analitica. Per controllare che i due approcci forniscono lo stesso risultato, calcolate i valori dell'uscita in determinati istanti e verificate che sono uguali.

Notate che se avessimo considerato $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$, avremmo avuto la cascata del sistema che realizza la differenza prima con quello che effettua la somma corrente. La risposta complessiva in tal caso sarebbe stata:

$$h(n) = [\delta(n) - \delta(n-1)] * \mathrm{u}(n) = \mathrm{u}(n) - \mathrm{u}(n-1) = \delta(n)$$

L'uscita allora coincide con l'ingresso ($y(n) = x(n) * \delta(n) \equiv x(n)$), il che conferma che queste due operazioni sono una l'inversa dell'altra.

2.2 Proprietà dei sistemi LTI

All'inizio di questo capitolo abbiamo elencato le proprietà di un sistema. Adesso vogliamo vedere se è possibile legare le proprietà di un sistema LTI alla sua risposta impulsiva.

2.2.1 Dispersività

Ricordiamo che un sistema è non dispersivo o senza memoria se l'uscita in ogni istante dipende solo dal valore dell'ingresso nello stesso istante. Dal momento che la relazione ingresso uscita per un sistema LTI è:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \cdots + x(-1)h(n+1) + x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + \cdots + x(n)h(0) + \ldots \end{aligned}$$

Affinché risulti istantaneo tutti i termini della sommatoria devono essere nulli eccetto quello per $k = n$, ciò risulta vero solo se $h(n) = 0$ per $n \neq 0$. In tal caso il legame ingresso uscita è:

$$y(n) = h(0)x(n) = kx(n)$$

per cui la risposta impulsiva ha la forma

$$h(n) = k\delta(n) \tag{24}$$

con $k = h(0)$ costante. Se invece un sistema LTI ha risposta impulsiva $h(n)$ che non è identicamente nulla per $n \neq 0$, allora risulta dispersivo.

2.2.2 Causalità

L'uscita di un sistema causale dipende solo dal valore presente e dai valori passati del segnale in ingresso; questa proprietà si può legare facilmente alla risposta impulsiva del sistema. Infatti, affinché un sistema LTI sia causale, $y(n)$ non può dipendere dai valori di $x(k)$ per $k > n$, allora deve risultare:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$$

dove si è fatto il cambio di variabile $m = n - k$. Questo significa che la risposta impulsiva di un sistema LTI causale deve soddisfare la condizione:

$$h(n) = 0 \quad \text{per} \quad n < 0 \tag{25}$$

Questa condizione è anche sufficiente, dal momento che se $h(n)$ fosse diversa da zero per qualche valore di $n < 0$, l'uscita all'istante n dipenderebbe da valori futuri dell'ingresso.

Sebbene la causalità sia una proprietà dei sistemi, spesso si parla di segnale causale quando il aegnale risulta essere nullo per $n < 0$. La causalità di un sistema LTI è equivalente quindi al fatto che la sua risposta impulsiva sia causale.

2.2.3 Stabilità

Un sistema è stabile se comunque si sceglie un ingresso limitato anche l'uscita corrispondente risulta limitata. Allo scopo di determinare le condizioni per cui un sistema LTI è stabile, si consideri un ingresso limitato in ampiezza:

$$|x(n)| < K \quad \forall n$$

Supponiamo poi di applicare tale ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(n)$, otteniamo la seguente espressione per l'ampiezza dell'uscita:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

Dal momento che l'ingresso è limitato, anche una sua versione traslata lo sarà: $|x(n-k)| < K$ per tutti i valori di k e n. Ciò implica che:

$$|y(n)| \leq K \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|$$

E' quindi possibile concludere che se la risposta impulsiva è sommabile, cioè se:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \tag{26}$$

anche l'uscita è limitata in ampiezza e il sistema risulta stabile. L'equazione (26) è quindi una condizione sufficiente per garantire la stabilità di un sistema LTI tempo discreto.

Mostriamo adesso che tale condizione risulta essere anche necessaria. Procediamo per assurdo, negando la tesi e facendo vedere che è possibile trovare un ingresso limitato che fornisce un'uscita illimitata. Supponiamo che la risposta impulsiva non sia sommabile, cioè:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \infty$$

Consideriamo poi il seguente segnale in ingresso:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{|h(-n)|}{h(-n)} & h(-n) \neq 0 \\ 0 & h(-n) = 0 \end{cases}$$

Questo segnale è sicuramente limitato dato che può assumere solo i valori $0, 1$ e -1.

A questo punto basta mostrare che esiste anche un solo valore di n per cui l'uscita risulta essere illimitata per concludere che il sistema è instabile. Poniamo $n = 0$, si ha:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\frac{|h(k)|}{h(k)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|$$

Avendo supposto per ipotesi che la risposta impulsiva non sia sommabile l'uscita all'istante $y(0)$ non è limitata, pertanto il sistema non risulta stabile.

2.3 Sistemi FIR e IIR

Spesso risulta molto conveniente suddividere i sistemi LTI discreti in quelli che hanno risposta impulsiva di durata finita, detti anche FIR (Finite Impulse Response), e quelli invece con risposta impulsiva di durata infinita, chiamati IIR (Infinite Impulse Response).

Senza perdita di generalità focalizziamo l'attenzione sui sistemi FIR causali, per cui la risposta impulsiva, supposta di durata M, risulterà compresa tra 0 e $M-1$. Il legame ingresso/uscita ha quindi l'espressione:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{27}$$

Un sistema di questo tipo fornisce un'uscita che per ogni istante n è una combinazione lineare dei campioni del segnale in ingresso $x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M+1)$:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \ldots + h(M-1)x(n-M+1)$$

In altri termini il sistema realizza una media pesata, secondo i valori della risposta impulsiva $h(k)$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$, dei più recenti M campioni del segnale. Opera cioè come una *finestra* scorrevole che osserva solo i più recenti M campioni dell'ingresso per produrre l'uscita, dimenticando i campioni precedenti $(x(n-M), x(n-M-1), \ldots)$. Per questo motivo i sistemi FIR sono anche detti filtri a media mobile (MA - Moving Average) ed hanno chiaramente memoria finita (pari proprio a M). Per mettere in luce che i coefficienti del filtro sono i pesi usati nella media, spesso si pone $h(k) = b_k$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

Al contrario, un sistema IIR ha risposta impulsiva infinita. Se si suppone causale[3], il legame ingresso/uscita risulta essere:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)x(n-k) \tag{28}$$

Adesso l'uscita è una combinazione lineare pesata, secondo i coefficienti della risposta impulsiva, del campione attuale e di tutti quelli passati del segnale in ingresso, $x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots$:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \ldots$$

In questo caso il sistema ha memoria infinita.

[3]Ricordate che tale ipotesi non è assolutamente necessaria per definire un sistema FIR o IIR.

Di seguito si mostrano alcuni esempi di sistemi FIR e IIR:

1. Sistema FIR. Consideriamo il seguente legame ingresso/uscita:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

E' facile riconoscere che tale sistema calcola la media aritmetica del campione attuale $x(n)$ e di quello precedente $x(n-1)$. Più in generale un sistema causale che fornisce in uscita la media aritmetica degli ultimi M campioni dell'ingresso ha la forma:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=n-M+1}^{n} x(k) \\ &= \frac{1}{M}[x(n) + x(n-1) + \ldots + x(n-M+1)] \end{aligned} \tag{29}$$

Determiniamo la risposta impulsiva di un sistema di questo tipo:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=n-M+1}^{n} \delta(k) \\ &= \frac{1}{M}[\delta(n) + \delta(n-1) + \ldots + \delta(n-M+1)] \\ &= \frac{1}{M}\mathcal{R}_M(n) \end{aligned}$$

La risposta impulsiva del sistema è un impulso rettangolare di durata M e ampiezza $1/M$.

2. Sistema IIR. Consideriamo la somma corrente:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \\ &= x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \ldots \end{aligned}$$

In questo caso il sistema realizza la somma del campione attuale e di tutti quelli passati, ha quindi memoria infinita. Notate come i pesi siano tutti uguali a 1:

$$h(0) = h(1) = h(2) = \ldots = h(k) = \ldots = 1$$

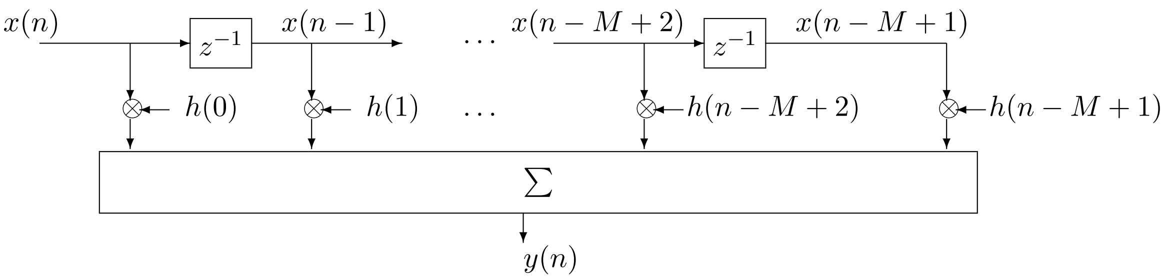
coerentemente col fatto che la risposta impulsiva di un sistema di questo tipo è il gradino unitario.

2.4 Sistemi ARMA

Lo studio dei sistemi LTI ci ha permesso di legare ingresso e uscita mediante la somma di convoluzione:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Questa relazione suggerisce anche un modo per la realizzazione del sistema. Infatti, se la risposta impulsiva ha durata finita (FIR), sarà necessario implementare addizionatori, moltiplicatori e avere a disposizione un numero finito di locazioni di memoria. Nell'ipotesi in cui la memoria sia pari a M e il sistema sia causale (27), si ottiene lo schema implementativo mostrato nella figura seguente.



Questo stesso discorso non si può ripetere per un sistema IIR, dal momento che la risposta impulsiva ha durata infinita. Ci chiediamo allora se non sia possibile comunque implementare un sistema di questo tipo in un modo diverso da quello suggerito dalla somma di convoluzione. Vediamo alcuni esempi per comprendere come procedere.

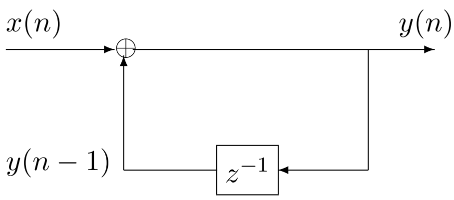
1. Si consideri nuovamente il sistema IIR che realizza la somma corrente:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Tale relazione esprime l'uscita in funzione dell'ingresso in forma esplicita. Tuttavia è possibile ottenere il legame che realizza il sistema anche in forma implicita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \\ &= y(n-1) + x(n) \end{aligned}$$

L'uscita $y(n)$ può essere ricavata sommando l'uscita calcolata all'istante precedente $y(n-1)$ all'ingresso presente $x(n)$. Questo è un esempio di sistema ricorsivo (o auto-regressivo AR), che può essere realizzato semplicemente mediante connessione in retroazione:



Vedremo però che la forma implicita non permette di definire in modo univoco un sistema: è necessario specificare le condizioni iniziali del sistema stesso. Allora, Supponiamo di applicare al sistema un ingresso causale $x(n)$, definito quindi per $n \geq 0$ e osserviamo i valori dell'uscita istante per istante:

$$\begin{aligned}
y(0) &= y(-1) + x(0) \\
y(1) &= y(0) + x(1) = y(-1) + x(0) + x(1) \\
y(2) &= y(1) + x(2) = y(-1) + x(0) + x(1) + x(2) \\
\ldots &= \ldots \\
y(n) &= y(n-1) + x(n) = y(-1) + x(0) + x(1) + \ldots + x(n)
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$y(n) = y(-1) + \sum_{k=0}^{n} x(k) \tag{30}$$

Questa relazione mette in evidenza che se vogliamo calcolare l'uscita in un determinato istante n è necessario conoscere, oltre all'ingresso, anche il valore $y(-1)$, cioè l'uscita del sistema all'istante $n = -1$. Il termine $y(-1)$ definisce la condizione iniziale del sistema e contiene tutta l'informazione necessaria a valutare l'uscita $y(n)$ per $n \geq 0$.

Notate che il sistema può fornire un'uscita anche in assenza di segnale in ingresso (risposta naturale). Poiché siamo interessati solo all'uscita del sistema qualora venga sollecitato (risposta forzata), assumeremo sempre che il sistema si trovi a riposo (condizioni iniziali nulle).

2. Consideriamo adesso un altro sistema AR:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n)$$

che rappresenta un'*equazione alle differenze al primo ordine a coefficienti costanti*. Ripetiamo lo stesso discorso fatto precedentemente, supponendo di applicare un segnale causale in ingresso:

$$\begin{aligned}
y(0) &= ay(-1) + bx(0) \\
y(1) &= ay(0) + bx(1) = a^2 y(-1) + abx(0) + bx(1) \\
y(2) &= ay(1) + bx(2) = a^3 y(-1) + a^2 bx(0) + abx(1) + bx(2) \\
\ldots &= \ldots \\
y(n) &= ay(n-1) + bx(n) = a^{n+1} y(-1) + a^n bx(0) + a^{n-1} bx(1) + \ldots + bx(n)
\end{aligned}$$

In forma più compatta:

$$y(n) = a^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k bx(n-k)$$

Supponendo condizione iniziale nulla:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k bx(n-k) \qquad n \geq 0$$

Tale relazione esprime il legame ingresso/uscita di un sistema con risposta impulsiva $h(n) = a^n b\mathrm{u}(n)$. Infatti se l'ingressso è causale la sommatoria nella convoluzione parte da $k = 0$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)a^{n-k}b\,\mathrm{u}(n-k) \end{aligned}$$

Inoltre, dato che $\mathrm{u}(n-k)$ limita l'indice della sommatori a valori di k minori o uguali a n si ha:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b\,x(k) \\ &= \sum_{m=0}^{n} a^{m}b\,x(n-m) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è fatto il cambio di variabile $m = n - k$. Questo ci porta a concludere che un sistema LTI con risposta impulsiva infinita $h(n) = ba^n\mathrm{u}(n)$ può essere realizzato attraverso il sistema ricorsivo $y(n) = ay(n-1) + bx(n)$.

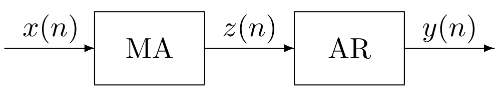
Gli esempi analizzati mostrano che due sistemi IIR possono essere implementati medianti schemi di tipo ricorsivo. In realtà, questa affermazione non è valida qualunque sia il sistema IIR, o meglio non è possibile sempre associare ad un sistema IIR un corrispondente sistema AR che lo realizzi. Più in generale, un sistema AR può dipendere da N uscite precedenti:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \ldots + a_N y(n-N) = x(n)$$

ovvero:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = x(n) \qquad a_0 \neq 0$$

In tal caso si parla di sistemi auto-regressivi di ordine N descritti mediante equazioni alle differenze a coefficienti costanti (in cui bisogna imporre N condizioni iniziali). I sistemi che si possono esprimere mediante tale relazione sono una sottoclasse dei sistemi IIR.
Consideriamo adesso la cascata di un sistema MA e di un sistema AR:



$$\begin{cases} z(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x(n-m) \\ \sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = z(n) \end{cases}$$

La relazione ingresso/uscita complessiva risulta essere:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, x(n-m), \qquad a_0 \neq 0 \tag{31}$$

La (31) definisce un sistema ARMA (Auto-Regressivo a Media Mobile) di ordine N [4]. Assumendo $a_0 = 1$, l'equazione può anche essere riscritta come:

$$y(n) = \underbrace{-\sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k)}_{\text{AR}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{M} b_m \, x(n-m)}_{\text{MA}}, \tag{32}$$

2.5 Esempio

Si consideri il seguente sistema ARMA:

$$y(n) = \frac{2}{3} y(n-1) + x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

Tale sistema rappresenta la forma implicita (realizzabile semplicemente) di un sistema IIR avente risposta impulsiva infinita. Per determinare la risposta impulsiva del sistema, interpretiamolo mediante la cascata di un sistema MA e un sistema AR:

$$\begin{cases} z(n) = x(n) + \frac{1}{2} x(n-1) \\ y(n) = \frac{2}{3} y(n-1) + z(n) \end{cases}$$

Il primo sistema ha risposta impulsiva $h_1(n)$:

$$h_1(n) = \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1)$$

mentre il secondo sistema rappresenta l'equazione alle differenze al primo ordine con $a = \frac{2}{3}$ e $b = 1$, pertanto la sua risposta impulsiva sarà:

$$h_2(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{u}(n)$$

Complessivamente il sistema ha risposta impulsiva:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = [\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)] * \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{u}(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{u}(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \mathrm{u}(n-1)$$

[4] La versione tempo continuo di tale relazione è un'equazione differenziale a coefficienti costanti:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

3 Sistemi LTI tempo continuo

In analogia con i risultati discussi nella sezione precedente, l'obiettivo è quello di ottenere una caratterizzazione completa per sistemi LTI continui mediante la risposta impulsiva. Il problema allora è quello di trovare l'equivalente continuo, $\delta(t)$, dell'impulso unitario, $\delta(n)$. Dal momento che non è possibile definire una funzione nulla ovunque eccetto che in un punto, è necessario ricorrere alle funzioni generalizzate. Coloro che sono interessati ad una rigorosa trattazione matematica possono far riferimento ai testi in cui è esposta la teoria delle distribuzioni.

3.1 Delta di Dirac

L'impulso tempo continuo $\delta(t)$, detto anche *delta di Dirac* si definisce mediante una proprietà integrale. In particolare, è definito dalla condizione che per ogni funzione $x(t)$ continua in $t = 0$, risulti:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)\,dt \triangleq \begin{cases} x(0) & 0 \in (t_1, t_2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{33}$$

Da questa relazione si possono ricavare tutte le proprietà della $\delta(t)$:

1. ponendo nella (33) $x(t) = 1$, $t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$ si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \tag{34}$$

   che esprime il fatto che $\delta(t)$ ha area unitaria.

2. ponendo nella (33) $t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$ si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0) \tag{35}$$

   che rappresenta la proprietà campionatrice della delta, cioè la sua capacità di estrarre il valore del segnale nel punto in cui la delta è centrata. Più in generale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0) \tag{36}$$

3. Applicando la (35) al prodotto $y(t)x(t)$, si ha che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(t)\delta(t)\,dt = y(0)x(0)$$

   d'altra parte risulta anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(0)\delta(t)\,dt = y(0)x(0)$$

   per cui:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{37}$$

Generalizzando, si ha:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \tag{38}$$

Anche questa proprietà esprime la capacità di campionamento della delta di Dirac.

4. Proprietà di cambiamento di scala:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{39}$$

per $a = -1$ risulta $\delta(t) = \delta(-t)$, per cui la delta è pari.

5. La (36) ci dice che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

d'altra parte, essendo la delta pari, risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0-t)\, dt = x(t_0)$$

Rinominiamo: $t \to \alpha$ e $t_0 \to t$ e otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\, d\alpha = x(t) \tag{40}$$

Questa non è altro che la proprietà di riproducibilità della delta, per cui un qualsiasi segnale si può esprimere come la somma (più precisamente l'integrale) di impulsi traslati pesati opportunamente.

6. ponendo nella (33) $x(t) = 1$, $t_1 = -\infty$, $t_2 = t$ si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \triangleq \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathrm{u}(t) \tag{41}$$

Di conseguenza risulta:

$$\delta(t) = \frac{d\mathrm{u}(t)}{dt}$$

in analogia con il caso discreto.

Ovviamente nessuna funzione ordinaria soddisfa queste proprietà, tuttavia è possibile individuare famiglie di funzioni ordinarie che approssimano $\delta(t)$. Si consideri per esempio l'insieme di impulsi rettangolari:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

e calcoliamo l'integrale del prodotto di $x(t)$ con $\delta_T(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t)x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)dt$$

Per il teorema della media possiamo dire che esiste un punto $\bar{t} \in [-T/2, T/2]$ per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t)x(t)dt = x(\bar{t})$$

Passando al limite per $T \to 0$ e ricordando che $x(t)$ è continua nell'origine si ha:

$$\lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t)x(t)dt = \lim_{T\to 0} x(\bar{t}) = x(0)$$

infine per la (35):

$$\lim_{T\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t)dt \tag{42}$$

A questo punto possiamo pensare l'impulso di Dirac come il limite di impulsi rettangolari di durata T e ampiezza $1/T$ (sebbene il passaggio sotto il segno di integrale a rigore non sia lecito); per $T \to 0$ l'impulso tende a concentrarsi nell'origine, la sua ampiezza diverge, ma l'area si mantiene costante e pari a 1. Per semplicità scriveremo:

$$\lim_{T\to 0} \delta_T(t) = \delta(t) \tag{43}$$

si ricordi però che la convergenza intesa nella (43) non è di tipo puntuale, bensì è valida in senso generalizzato, come esprime la (42). Questa considerazione è molto importante dal momento che la $\delta(t)$ è definita mediante una proprietà integrale, e non ha senso altrimenti.

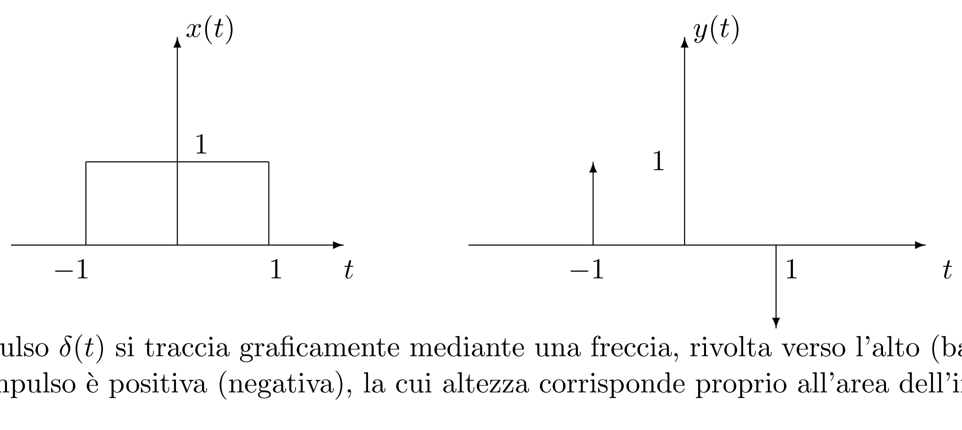
La proprietà 6) ci dice che $\delta(t)$ è la derivata di $\mathrm{u}(t)$, derivata in senso generalizzato, dato che per $t = 0$ la funzione gradino ha un punto di discontinuità e quindi non è possibile definire la derivata in senso ordinario. Questo ci porta a generalizzare il concetto di derivata a tutti i segnali che presentano un numero finito di punti di discontinuità. Supponiamo per esempio di considerare il segnale $x(t) = \mathrm{rect}(t/2)$ e calcoliamone la derivata in senso generalizzato, risulta:

$$x(t) = \mathrm{rect}(t/2) = \mathrm{u}(t+1) - \mathrm{u}(t-1)$$

quindi:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

Graficamente i segnale $x(t)$ e la sua derivata sono rappresentati nella seguente figura:



L'impulso $\delta(t)$ si traccia graficamente mediante una freccia, rivolta verso l'alto (basso) se l'area dell'impulso è positiva (negativa), la cui altezza corrisponde proprio all'area dell'impulso.

Facciamo un altro esempio di calcolo della derivata generalizzata e consideriamo il segnale:

$$x(t) = |t| \operatorname{rect}(t/4) = -t \operatorname{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + t \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Esprimiamo poi $x(t)$ come:

$$x(t) = -t\,[\mathrm{u}(t+2) - \mathrm{u}(t)] + t\,[\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-2)]$$

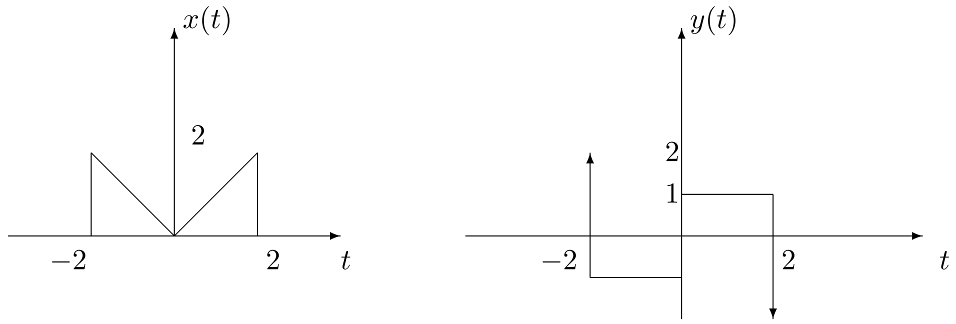
la derivata è:

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{dx(t)}{dt} &= -[\mathrm{u}(t+2) - \mathrm{u}(t)] - t[\delta(t+2) - \delta(t)] + [\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-2)] + t[\delta(t) - \delta(t-2)] \\ &= -\operatorname{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) - t\delta(t+2) + t\delta(t) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + t\delta(t) - t\delta(t-2) \\ &= -\operatorname{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) - (-2)\delta(t+2) + (0)\delta(t) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + (0)\delta(t) - (2)\delta(t-2) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la (37) e la (38). In conclusione:

$$y(t) = -\operatorname{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + 2\delta(t+2) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) - 2\delta(t-2)$$

Il risultato è mostrato graficamente nella seguente figura:



Notate come le ampiezze degli impulsi corrispondano proprio ai salti di discontinuità che presenta il segnale. In effetti, possiamo derivare una regola pratica per il calcolo della derivata generalizzata: derivare il segnale secondo le regole convenzionali laddove e continuo e nei punti di discontinuità aggiungere impulsi di ampiezza pari proprio al salto di discontinuità, rivolti verso l'alto (basso) se il salto è positivo (negativo).

3.2 Convoluzione e sue proprietà

Per la proprietà di riproducibilità della delta (40), un qualsiasi segnale $x(t)$ si può esprimere come:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha$$

Poniamo $x(t)$ in ingresso ad un sistema LTI e determiniamo l'uscita:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\mathcal{T}[\delta(t-\alpha)]\,d\alpha \qquad (44) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)\,d\alpha \stackrel{\triangle}{=} x(t)*h(t) \qquad (45)
\end{aligned}
$$

la (44) tiene conto dell'ipotesi di linearità, mentre la (45) della tempo invarianza, e si è posto $h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$, risposta impulsiva del sistema. Anche in questo caso si può osservare che risulta:

$$
x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha = x(t)*\delta(t) \qquad (46)
$$

cioè $\delta(t)$ rappresenta l'unità per l'operazione di convoluzione.
Mostriamo di seguito alcuni esempi di sistemi LTI.

1. Consideriamo il filtro interpolatore di ordine zero (pag.3), la cui relazione ingresso/uscita è:

$$
y(t) = \int_{-\infty}^{t} [x(\alpha) - x(\alpha - T)]\,d\alpha
$$

Si può facilmente verificare che tale sistema è LTI, e la sua risposta impulsiva è:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{t} [\delta(\alpha) - \delta(\alpha - T)]\,d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\,d\alpha - \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha - T)]\,d\alpha \\
&= u(t) - u(t-T) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi l'uscita è data dalla convoluzione tra l'ingresso e un impulso rettangolare:

$$
y(t) = x(t) * \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)
$$

2. Sia $p(t)$ un segnale di energia e si definisca un sistema con risposta impulsiva:

$$
h(t) = p(-t)
$$

Calcoliamo l'uscita del sistema $y(t)$, quando in ingresso si pone $x(t)$:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)\,d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)p(\alpha - t)\,d\alpha = R_{xp}(t)
\end{aligned}
$$

L'uscita non è altro che la mutua correlazione tra il segnale di ingresso e $p(t)$. Tale sistema viene anche chiamato *filtro adattato* a $p(t)$ e valuta la correlazione tra il segnale di ingresso e il segnale a cui il filtro è adattato. Chiaramente se in ingresso si pone $x(t) = p(t)$, il sistema fornisce l'autocorrelazione di $p(t)$. Questo esempio mette in luce come per segnali di energia il calcolo della convoluzione è analogo a quello della correlazione, eccetto per un'operazione di ribaltamento.

Vediamo adesso come il calcolo della convoluzione segua esattamente gli stessi passi che nel caso discreto. Supponiamo allora di voler determinare il valore dell'uscita in un istante t_0:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t_0 - \alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(-(\alpha - t_0))\, d\alpha$$

E' necessario realizzare le seguenti operazioni:

1. *ribaltare* il segnale $h(\alpha)$ e ottenere $h(-\alpha)$;
2. *traslare* $h(-\alpha)$ verso destra (sinistra) se t_0 è positivo (negativo)intorno a t_0 e ottenere $h(-(\alpha - t_0)) = h(t_0 - \alpha)$;
3. *moltiplicare* $x(\alpha)$ e $h(t_0 - \alpha)$ e ottenere $x(\alpha)h(t_0 - \alpha)$;
4. *calcolare l'area* del prodotto per ottenere il segnale in uscita all'istante t_0.

Ovviamente bisognerà far variare t su tutto l'asse temporale per determinare l'uscita in ogni istante di tempo. Prima di fare qualche esempio di calcolo della convoluzione, enunciamo (senza dimostrarle) le proprietà nel caso continuo, che di fatto sono uguali a quelle nel caso discreto.

a) *proprietà commutativa*:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \tag{47}$$

b) *proprietà distributiva.*

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \tag{48}$$

c) *proprietà associativa.*

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \tag{49}$$

d) *proprietà associativa mista.*

$$a\,[x(t) * h(t)] = [a\,x(t)] * h(t) = x(t) * [a\,h(t)] \tag{50}$$

e) *Invarianza temporale.* Se $x(t) * h(t) = y(t)$, allora

$$x(t - t_0) * h(t) = y(t - t_0) \tag{51}$$

$$x(t) * h(t - t_0) = y(t - t_0) \tag{52}$$

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - (t_1 + t_2)) \tag{53}$$

Dato che per la (46) risulta $x(t) * \delta(t) = x(t)$, si ha inoltre:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{54}$$
$$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - (t_1 + t_2)) \tag{55}$$

Infine se $x(t) \equiv \delta(t)$:

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t) \tag{56}$$
$$\delta(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) \tag{57}$$
$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - (t_1 + t_2)) \tag{58}$$

f) *Dispersività.* Un sistema LTI è non dispersivo se e solo se:

$$h(t) = k\delta(t) \tag{59}$$

g) *Causalità.* Un sistema LTI è causale se e solo se:

$$h(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0 \tag{60}$$

h) *Stabilità.* Un sistema LTI è stabile se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty \tag{61}$$

Di seguito si mostrano alcuni esempi per il calcolo della convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$.

1. $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, $h(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$. Bisogna valutare:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\,\mathrm{rect}(\alpha/T)\,\mathrm{rect}[(\alpha - t)/T)]\,d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\,\mathrm{rect}(\alpha/T)\,\mathrm{rect}[(t - \alpha)/T)]\,d\alpha \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è lecito dato che l'impulso rettangolare è pari, ma allora il procediamento è identico a quello già svolto per valutare la funzione di autocorrelazione di $x(t)$ (cap.1, esempio 6.1.1). Quindi, senza ripetere i calcoli possiamo dire che:

$$y(t) = A^2\,\Lambda(t/T)$$

Supponiamo, adesso, di voler determinare la convoluzione tra $x_1(t) = x(t - T/2) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ e $h_1(t) = h(t - T/2) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, i due segnali sono traslati di $T/2$ rispetto a quelli originali. Anziché rifare i conti, è possibile sfruttare la proprietà (53), e affermare che:

$$y_1(t) = A^2\,\Lambda\left(\frac{t - T}{T}\right)$$

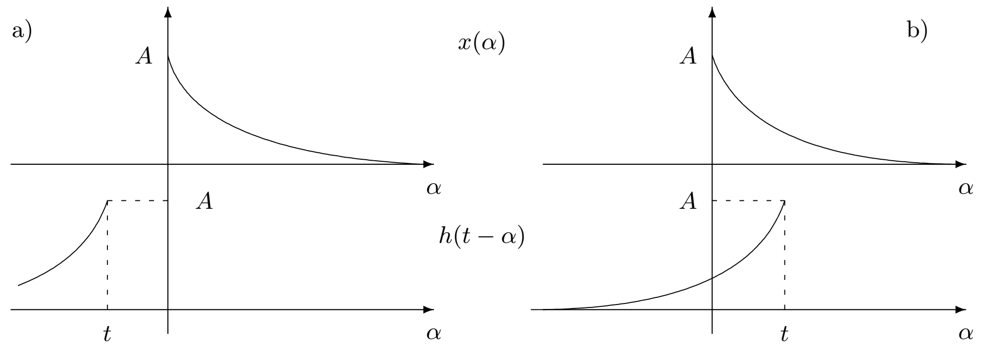


Figura 5: Calcolo di $R_x(\tau)$ per un esponenziale monolatero

2. $x(t) = A\,e^{-t}\mathrm{u}(t)$, $h(t) = A\,e^{-t}\mathrm{u}(t)$. In questo caso il segnale non è pari, quindi non possiamo sfruttare i conti già fatti per il calcolo della funzione di autocorrelazione dell'esponenziale monolatero. Distinguiamo due casi:

   a) $t < 0$, i segnali non si sovrappongono $y(t) = 0$;

   b) $t \geq 0$;

$$y(t) = \int_0^t A^2 e^{-\alpha}\, e^{-(t-\alpha)}\, d\alpha = A^2 e^{-t} \int_0^t dt = A^2 t e^{-t}$$

   In conclusione:

$$y(t) = A^2 t e^{-t}\mathrm{u}(t)$$

3. $x(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$, $h(t) = t\,\mathrm{rect}[(t-1)/2]$. Sfruttiamo la proprietà commutativa e ribaltiamo e trasliamo il segnale $x(t)$. Vanno considerati cinque intervalli temporali:

   a) $t < 0$, i segnali non si sovrappongono $y(t) = 0$;

   b) $0 \leq t < 1$;

$$y(t) = \int_0^t \alpha\, d\alpha = \frac{t^2}{2}$$

   c) $1 \leq t < 2$;

$$y(t) = \int_{t-1}^t \alpha\, d\alpha = t - \frac{1}{2}$$

   d) $2 \leq t < 3$;

$$y(t) = \int_{t-1}^2 \alpha\, d\alpha = \frac{3}{2} - \frac{t^2}{2} + t$$

   e) $t \geq 3$, i segnali non si sovrappongono $y(t) = 0$.

   Provate a ribaltare e traslare il segnale $h(t)$ e verificate che si ottiene lo stesso risultato.