

**Appunti di Teoria dei Segnali**  
**a.a. 2014/2015**

**Analisi dei segnali nel dominio della frequenza**

L. Verdoliva

Nel capitolo precedente è stata descritta una rappresentazione dei segnali periodici mediante combinazione lineare di sinusoidi (se i segnali sono reali) o più in generale di esponenziali complessi. In questa sezione cercheremo di estendere questi concetti anche ai segnali aperiodici, e definiremo la trasformata di Fourier diretta e inversa. Vedremo, in realtà, come sia possibile studiare anche i segnali periodici mediante la trasformata di Fourier, ottenendo così un unico strumento che permette di ottenere facilmente la rappresentazione nel dominio della frequenza per tutti i segnali di interesse. Nel seguito tratteremo sia i segnali aperiodici tempo continuo che quelli tempo discreto.

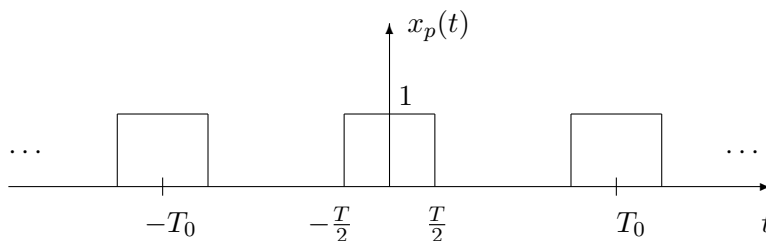
## 1 Trasformata di Fourier per segnali tempo continuo

L'analisi in frequenza dei segnali aperiodici tempo continuo è uno dei contributi più importanti sviluppati da Fourier nel suo lavoro originale. Partendo dalla rappresentazione in frequenza di un segnale periodico, un segnale aperiodico può essere visto come un segnale periodico di periodo infinito. All'aumentare del periodo le componenti armoniche che costituiscono il segnale periodico tendono ad avvicinarsi in frequenza, al limite si ottiene uno spettro continuo, e si passa dallo sviluppo in serie a quello mediante integrale. Nel paragrafo seguente sarà sviluppata questa trattazione da un punto di vista analitico e saranno introdotte le equazioni di analisi e sintesi per un segnale aperiodico.

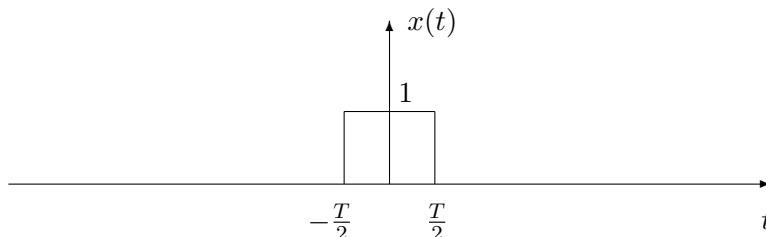
### 1.1 Dalla serie alla trasformata di Fourier

Partiamo dalla rappresentazione in serie del treno di impulsi rettangolari di periodo  $T_0$ :

$$x_p(t) = \text{rep}_{T_0}[\Pi(t/T)]$$



Consideriamo poi il segnale aperiodico:  $x(t) = \Pi(t/T)$ .



Possiamo ottenere  $x(t)$  a partire da  $x_p(t)$  portando il periodo all'infinito:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t) \quad (1)$$

ci aspettiamo allora di poter ricavare il comportamento in frequenza di  $x(t)$  a partire da quello di  $x_p(t)$  attraverso un'operazione al limite. Essendo  $x_p(t)$  periodico, risulta:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi kt/T_0} \quad (2)$$

dove

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt \quad (3)$$

A questo punto osserviamo che  $x_p(t) \equiv x(t)$  per  $|t| \leq T_0/2$ , inoltre  $x(t) = 0$  per  $|t| > T_0/2$ , quindi i coefficienti di Fourier si possono riscrivere come:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \end{aligned}$$

Definiamo adesso:

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Allora

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f)|_{f=k/T_0} = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (2), si ha:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi kt/T_0}$$

Infine sostituiamo quest'ultima espressione nella (1) per ottenere il segnale aperiodico  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi kt/T_0} \\ &= \lim_{f_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0 X(kf_0) e^{j2\pi kf_0 t} \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta f) e^{j2\pi k\Delta f t} \Delta f \quad (6)$$

Nella (6) abbiamo riconosciuto che  $f_0 = 1/T_0$ , d'altra parte  $f_0$  (armonica fondamentale) rappresenta anche la spaziatura tra due armoniche successive:  $\Delta f = kf_0 - (k-1)f_0 = f_0$ , quindi nella (7) abbiamo semplicemente rinominato  $f_0$  con  $\Delta f$ . Si noti adesso che ogni termine nella somma non è altro che l'area di rettangolo di altezza  $X(k\Delta f) e^{j2\pi k\Delta f t}$  e larghezza  $\Delta f$ . Per  $\Delta f \rightarrow 0$  la sommatoria diventa un integrale:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} dt$$

Quindi, mentre un segnale periodico è la somma di infinite componenti sinusoidali con frequenze relazionate armonicamente tra loro (tutte multiple di una frequenza fondamentale), un segnale aperiodico è dato dalla somma (integrale) di infinite componenti sinusoidali con frequenza variabile con continuità su tutto l'asse reale. Riportiamo nuovamente le due equazioni relative alla rappresentazione di un segnale aperiodico:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (7)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (8)$$

La (7) è l'equazione di sintesi (trasformata di Fourier inversa), mentre la (8) è quella di analisi (trasformata di Fourier diretta), che ci permette di determinare il peso che le varie componenti hanno nella ricostruzione del segnale. Anche in questo caso  $X(f)$  viene chiamato spettro e fornisce le informazioni sull'ampiezza e sulla fase dei fasori costituenti il segnale:

$$X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)} = A(f) e^{j\theta(f)}$$

$A(f)$  rappresenta lo spettro di ampiezza e  $\theta(f)$  quello di fase; evidentemente fasori con frequenze per le quali  $A(f)$  assume valori significativi contribuiscono maggiormente alla sintesi del segnale. Ancora una volta utilizzeremo la notazione:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(f)] \\ X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] \end{aligned}$$

Un'ultima osservazione sulle equazioni di analisi e sintesi. Se poniamo nell'equazione di analisi  $f = 0$ , otteniamo:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \quad (9)$$

cioè il valore della trasformata di Fourier nell'origine è uguale all'area del segnale nel dominio del tempo. Analogamente, se poniamo  $t = 0$  in quella di sintesi, otteniamo:

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df \quad (10)$$

cioè il valore del segnale nell'origine è uguale all'area della trasformata di Fourier. Utilizzeremo spesso nel seguito queste due equazioni.

## 1.2 Trasformata di Fourier per segnali reali

Se il segnale è reale vale la proprietà di simmetria coniugata o hermitiana:

$$X(-f) = X^*(f) \quad (11)$$

*Dimostrazione.* La prova è analoga a quella per la serie di Fourier. Calcoliamo infatti  $X^*(f)$ :

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt$$

ma essendo il segnale reale  $x^*(t) = x(t)$ , per cui:

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt = X(-f)$$

L'uguaglianza (11) non esprime altro che lo spettro di ampiezza  $A(f)$  è pari, mentre quello di fase  $\theta(f)$  è dispari; infatti, riscrivendo la (11) in termini di spettro di ampiezza e di fase, si ha:

$$A(-f) e^{j\theta(-f)} = A(f) e^{-j\theta(f)}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} A(-f) &= A(f) \\ \theta(-f) &= -\theta(f) \end{aligned}$$

Se poi assumiamo che il segnale, oltre che essere reale, è anche pari l'equazione di analisi (8) può essere semplificata nel seguente modo:

$$X(f) = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (12)$$

e risulta reale, mentre per un segnale dispari come:

$$X(f) = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (13)$$

e risulta immaginaria pura.

### 1.3 Esempio

Calcoliamo la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare  $x(t) = A\Pi(t/T)$ . Essendo il segnale pari, si può usare la (12):

$$\begin{aligned} X(f) &= 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2A \int_0^{T/2} \cos(2\pi ft) dt \\ &= \frac{2A}{2\pi f} [\sin(2\pi fT)]_0^{T/2} = AT \operatorname{sinc}(fT) \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier risulta essere una funzione reale, vale  $AT$  nell'origine e si annulla nei punti  $\pm\frac{1}{T}, \pm\frac{2}{T}, \dots$ . L'andamento è mostrato in figura 1 nell'ipotesi in cui  $A = T = 1$ , assieme allo spettro di ampiezza e di fase. Essendo lo spettro concentrato intorno all'origine (basse frequenze), le sinusoidi comprese nell'intervallo  $(-1/T, 1/T)$  sono quelle che contribuiscono maggiormente alla sintesi del segnale.

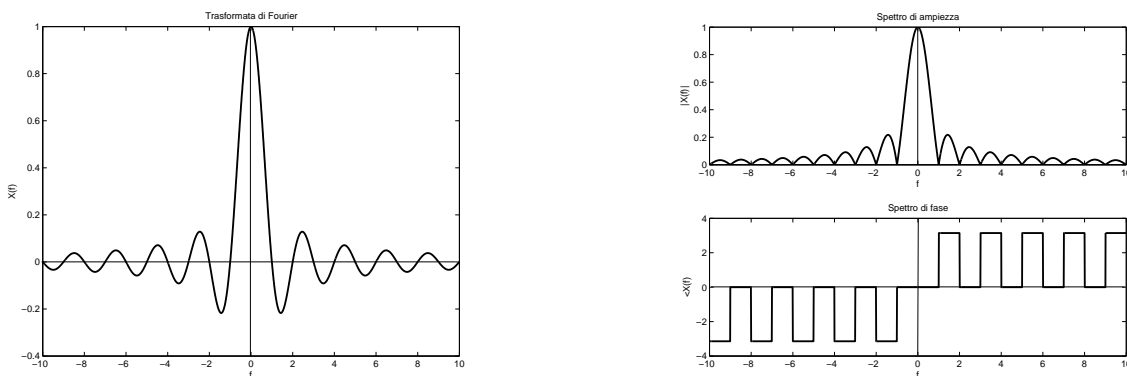


Figura 1: Trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare

Osserviamo poi che un modo per verificare la correttezza del risultato ottenuto è quello di usare l'equazione (9), nel nostro caso risulta:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = AT$$

L'equazione (10) ci permette invece di determinare l'area della funzione sinc (non dotata di primitive elementari) in un modo molto semplice:

$$AT \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(fT) df = A$$

da cui per  $A = T = 1$  si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(f) df = 1$$

## 1.4 Convergenza della trasformata di Fourier

Cerchiamo di capire adesso sotto quali condizioni per un segnale aperiodico  $x(t)$  si può calcolare la trasformata di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

cioè sotto quali ipotesi il limite così definito:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

converge proprio a  $x(t)$ . In modo analogo a quanto fatto per la serie di Fourier è possibile enunciare delle condizioni sufficienti per la convergenza stabilite da Dirichlet:

1.  $x(t)$  è sommabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. in qualsiasi intervallo finito il segnale ha un numero finito di punti con discontinuità di prima specie;
3. in qualsiasi intervallo finito il segnale ha un numero finito di massimi e minimi.

Sotto tali ipotesi l'integrale di Fourier converge al valore assunto dalla funzione  $x(t)$  nei punti in cui essa è continua, e alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui presenta discontinuità di prima specie.

Un ulteriore tipo di convergenza, meno restrittiva delle precedenti, è la convergenza in media quadratica, che assicura che l'energia dell'errore sia nulla. In tal caso basta che  $x(t)$  sia a quadrato sommabile, ovvero sia un segnale di energia, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Poiché molti dei segnali aperiodici che consideriamo sono segnali di energia, essi ammettono trasformata di Fourier nel senso appena indicato.

## 1.5 Esempio

Si vuole calcolare la trasformata di Fourier del segnale  $x(t) = A e^{-t/T} u(t)$ . Dall'equazione di analisi:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= A \int_0^{+\infty} e^{-(1/T + j2\pi f)t} dt \\ &= -\frac{A}{1/T + j2\pi f} [e^{-(1/T + j2\pi f)t}]_0^{+\infty} = \frac{AT}{1 + j2\pi fT} \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier è una funzione complessa, calcoliamo quindi spettro di ampiezza e di fase:

$$A(f) = \frac{AT}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}}$$

$$\theta(f) = -\arctan(2\pi fT)$$

Il grafico è mostrato in figura per  $A = 1$  e  $T = 1/10$ . Si noti come anche in questo caso lo spettro sia concentrato alle basse frequenze.

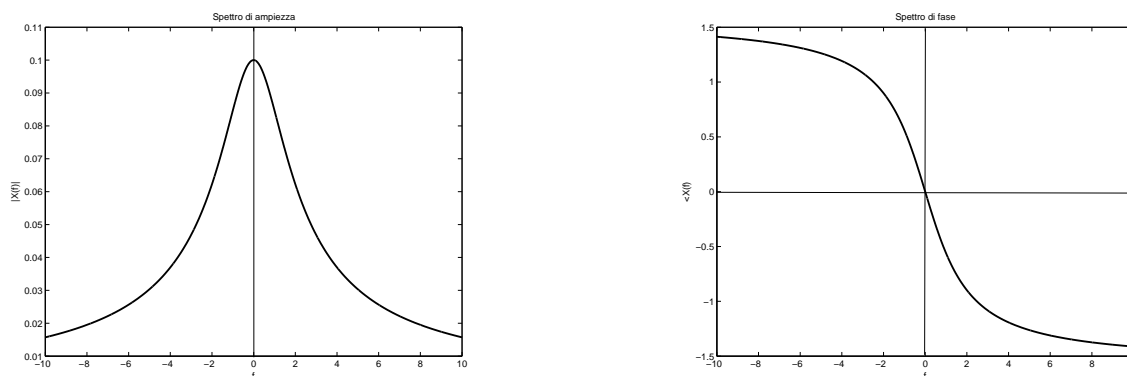


Figura 2: Spettro di ampiezza e spettro di fase

## 1.6 Relazione di Parseval

Anche per i segnali aperiodici il calcolo dell'energia può essere fatto sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. Infatti, ricordando la definizione di energia, si ha:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right] dt \quad (14)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] df \quad (15)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)X(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Nella (14) è stata utilizzata la formula di sintesi per  $x^*(t)$ , mentre nella (15) si è scambiato l'ordine di integrazione (lecito perché i segnali coinvolti sono a quadrato sommabile). Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (16)$$

che rappresenta la relazione di Parseval per segnali aperiodici e afferma che l'energia può essere calcolata sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza.

## 1.7 Proprietà

La trasformata di Fourier, come la serie, gode di diverse proprietà che, oltre a farci comprendere meglio il significato della trasformata, possono risultare molto utili per calcolarla. Di seguito sono presentate le principali.

### 1.7.1 Linearità

Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due segnali con trasformata di Fourier  $X(f)$  e  $Y(f)$ , rispettivamente, cioè:

$$\begin{aligned}x(t) &\longleftrightarrow X(f) \\ y(t) &\longleftrightarrow Y(f)\end{aligned}$$

Si consideri poi il segnale  $z(t) = ax(t) + by(t)$ , combinazione lineare dei due segnali. Risulta:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \quad \longleftrightarrow \quad Z(f) = aX(f) + bY(f) \quad (17)$$

La prova è analoga a quella della serie di Fourier.

### 1.7.2 Traslazione temporale

Sia  $y(t) = x(t - t_0)$  e sia  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ , allora:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = X(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (18)$$

Anche in questo caso la dimostrazione è analoga a quella della serie di Fourier. Se esprimiamo  $X(f)$  in termini di spettro di ampiezza e di fase si ha:

$$Y(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)}e^{-j2\pi ft_0}$$

pertanto lo spettro di ampiezza di  $y(t)$  resta inalterato:

$$|Y(f)| = |X(f)|$$

mentre quello di fase viene modificato nel seguente modo:

$$\angle Y(f) = \angle X(f) - 2\pi ft_0$$

**Esempio.** Supponiamo di voler calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$y(t) = x(t - T/2) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Lo spettro di  $x(t) = \Pi(t/T)$  è stato calcolato nell'esempio 1.3 e vale  $X(f) = T\text{sinc}(fT)$ , quindi, per la proprietà di traslazione temporale,  $y(t)$  ha la seguente trasformata:

$$Y(f) = T\text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}$$

e risulta:

$$\begin{aligned}|Y(f)| &= |T\text{sinc}(fT)| \\ \angle Y(f) &= \angle T\text{sinc}(fT) - \pi fT\end{aligned}$$

I due spettri sono rappresentati graficamente in figura 3.

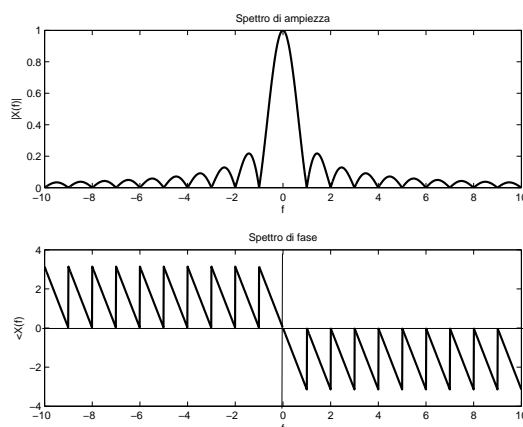


Figura 3: Trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare trasalato

### 1.7.3 Cambiamento di scala

Sia  $y(t) = x(at)$  e sia  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ , allora:

$$y(t) = x(at) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (19)$$

*Dimostrazione.* Dall'equazione di analisi:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j2\pi ft} dt$$

A questo punto effettuiamo il cambio di variabile  $\tau = at$ :

$$\begin{aligned} Y(f) &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau/a} d\tau & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau/a} d\tau & a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) & a > 0 \\ -\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right) & a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Ricordiamo che il cambiamento di scala, in base al valore di  $a$ , causa:

$$\begin{cases} |a| > 1 \rightarrow \text{Compressione} \\ |a| < 1 \rightarrow \text{Espansione} \\ a < 0 \rightarrow \text{Inversione} \end{cases}$$

La (19) ci dice che se comprimiamo il segnale nel tempo, otteniamo un'espansione della trasformata di Fourier, se, invece, il segnale viene espanso nel tempo, lo spettro risulterà compresso.

Questo risultato non ci sorprende dato che la compressione nel tempo equivale ad ottenere un segnale che varia più rapidamente e che quindi avrà bisogno di frequenze più alte per essere ricostruito; di contro, un segnale di durata maggiore presenta un'evoluzione temporale più lenta e il suo spettro risulterà concentrato maggiormente intorno alle basse frequenze. Nella figura 4 è mostrato questo comportamento nell'ipotesi in cui  $x(t) = \Pi(t)$  e  $a = 2$  per la figura a sinistra e  $a = 1/2$  per quella a destra.

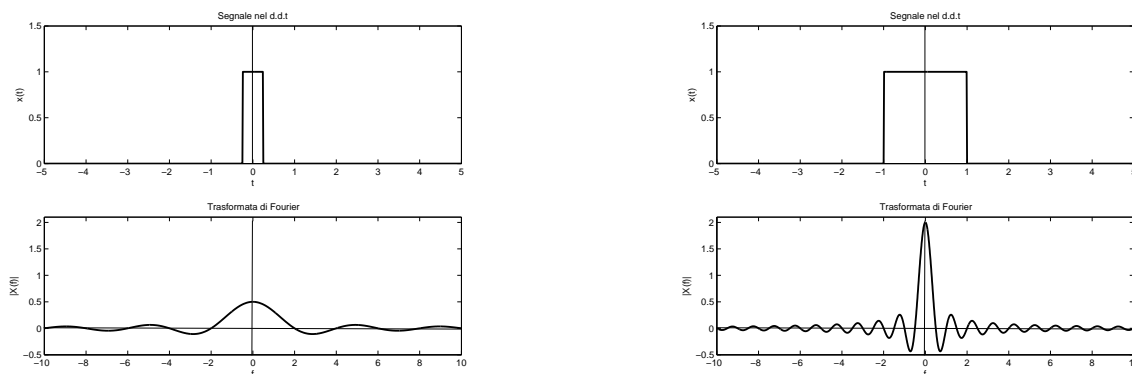


Figura 4: Trasformata di Fourier di  $y_1(t) = x(2t)$  e  $y_2(t) = x(t/2)$

Notate che l'area delle due sinc è la stessa dato che il valore nell'origine, per entrambi i segnali, è uguale a 1.

**Esempio.** Calcoliamo la trasformata di Fourier dell'esponenziale bilatero:

$$x(t) = A e^{-|t|/T}$$

Il segnale può essere anche espresso come:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-t/T} u(t) + A e^{t/T} u(-t) \\ &= x_1(t) + x_1(-t) \end{aligned}$$

In questo modo si può sfruttare il risultato ottenuto nell'esempio 1.5 in cui è già stato valutato lo spettro del segnale  $x_1(t)$ . Applicando la proprietà di linearità e di cambiamento di scala per  $a = -1$ , si ha:

$$X(f) = X_1(f) + X_1(-f)$$

per cui:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{T}{1 + j2\pi fT} + \frac{T}{1 - j2\pi fT} \\ &= \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2} \end{aligned}$$

Essendo il segnale pari, la trasformata è reale, e nel caso specifico assume solo valori positivi, per cui basta un solo grafico per rappresentarla (figura 5).

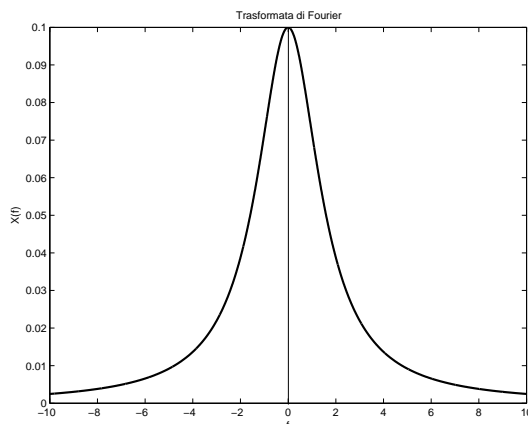


Figura 5: Trasformata di Fourier dell'esponenziale bilatero con  $A = 1$  e  $T = 0.1$

#### 1.7.4 Dualità

La proprietà di dualità risulta molto utile tutte le volte in cui si conosce la trasformata di un segnale  $x(t)$ :

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad (20)$$

e si vuole determinare la trasformata del segnale, indichiamolo con  $X(t)$ , che ha lo stesso andamento temporale di  $X(f)$ . Per esempio abbiamo calcolato la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare ( $x(t)$ ) e abbiamo ottenuto la funzione sinc ( $X(f)$ ), ci chiediamo allora se questo risultato ci può essere utile per valutare la trasformata di Fourier della sinc ( $X(t)$ ). In effetti risulta:

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f) \quad (21)$$

*Dimostrazione.* Scriviamo l'equazione di sintesi per il segnale  $x(t)$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Scambiamo formalmente le variabili  $t$  e  $f$ :

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{j2\pi tf} dt$$

quindi facciamo un cambio di variabile  $f \rightarrow -f$ :

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

e otteniamo che la trasformata di Fourier di  $X(t)$  risulta essere  $x(-f)$ .

**Esempio.** Nell'esempio 1.3 abbiamo trovate che:

$$x(t) = \Pi(t/T) \longleftrightarrow X(f) = T \operatorname{sinc}(fT)$$

Da questo risultato vogliamo determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$y(t) = \text{sinc}(Bt)$$

Applicando la (21) si ha:

$$X(t) = T \text{sinc}(tT) \quad \longleftrightarrow \quad x(-f) = \Pi(-f/T) = \Pi(f/T)$$

Quindi per la proprietà di linearità si trova che:

$$y(t) = \text{sinc}(Bt) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{f}{B}\right)$$

### 1.7.5 Derivazione e integrazione

Le operazioni di derivazione e integrazione diventano semplici operazioni algebriche nel dominio della frequenza, per questo motivo la trasformata di Fourier è spesso utilizzata per quei sistemi il cui comportamento è descritto da equazioni differenziali.

a) Per quanto riguarda l'operazione di derivazione, risulta:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = j2\pi f X(f) \quad (22)$$

La dimostrazione è analoga a quella della serie e giunge ad un risultato simile. La derivata causa l'alterazione di tutte le componenti frequenziali secondo un fattore pari a  $j2\pi f$ , esalta quindi le componenti del segnale alle alte frequenze, oltre a uno sfasamento di  $\pm\pi/2$  a seconda del segno di  $f$ . Infatti, spettro di ampiezza e di fase sono:

$$\begin{aligned} |Y(f)| &= 2\pi|f||X(f)| \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) + \frac{\pi}{2} \text{sign}(f) \end{aligned}$$

La (22) può essere generalizzata:

$$y(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = (j2\pi f)^k X(f) \quad (23)$$

b) La proprietà di integrazione dice che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (24)$$

Per la dimostrazione è sufficiente utilizzare la proprietà di derivazione. In questo caso vengono esaltate le componenti a bassa frequenza del segnale. Si faccia attenzione al fatto che l'uguaglianza seguente

$$X(f) = j2\pi f Y(f)$$

risulta valida solo se  $X(0) = 0$ . Tale condizione sta a significare, per la (9) che:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$$

cioè  $x(t)$  sottende area nulla; d'altra parte, essendo  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$ , deve accadere  $y(+\infty) = 0$ , vale a dire  $y(t)$  deve tendere a zero all'infinito. Questa è una condizione necessaria affinché  $y(t)$  sia un segnale di energia. Pertanto la (24) è valida solo se  $y(t)$  è un segnale di energia.

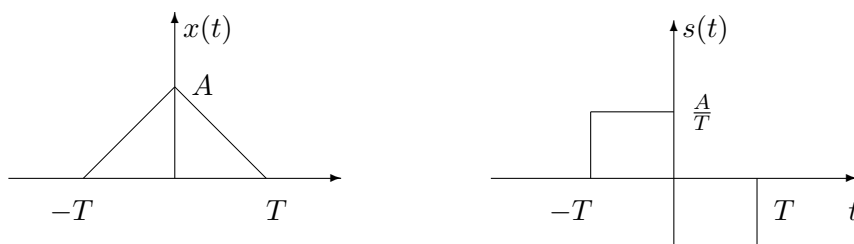
**Esempio.** Usiamo la proprietà di integrazione per calcolare la trasformata di Fourier dell'impulso triangolare

$$x(t) = A\Lambda(t/T)$$

Procederemo nel seguente modo:

- 1) calcoliamo  $s(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ;
- 2) valutiamo la trasformata di Fourier di  $s(t) \leftrightarrow S(f)$ ;
- 3) infine, determiniamo  $X(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f}$

La derivata dell'impulso triangolare si può calcolare graficamente, e si ottiene:



Analiticamente:

$$s(t) = \frac{A}{T} \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{A}{T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

La trasformata di Fourier di  $s(t)$  è:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{A}{T} T \operatorname{sinc}(fT) e^{j\pi fT} - \frac{A}{T} T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \\ &= A \operatorname{sinc}(fT) [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] \\ &= 2jA \operatorname{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

L'ultima operazione da fare è quella di applicare la (24):

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{S(f)}{j2\pi f} = \frac{A \operatorname{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{\pi f} \\ &= AT \operatorname{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

Per controllo, verifichiamo che risulta valida la relazione:  $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$ . In effetti, l'area del segnale è proprio  $AT$  che coincide con il valore nell'origine della trasformata

### 1.7.6 Prodotto e convoluzione

Le proprietà descritte in questo paragrafo sono molto importanti per l'analisi in frequenza dei sistemi LTI e più in generale nell'elaborazione dei segnali. Faremo l'ipotesi che i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  abbiano trasformate di Fourier  $X(f)$  e  $Y(f)$ , rispettivamente.

a) La proprietà della convoluzione afferma che:

$$z(t) = x(t) * y(t) \quad \longleftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f) \quad (25)$$

*Dimostrazione.* Applicando la formula di analisi si ha:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * y(t)]e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)y(t-\alpha) d\alpha \right] e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Scambiando l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f(t-\alpha)} dt \right] e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

Nella (26) abbiamo moltiplicato e diviso per la quantità  $e^{j2\pi f\alpha}$ . Adesso effettuiamo il cambio di variabile  $t - \alpha = \tau$  nell'integrale interno:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) Y(f) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha \right] Y(f) = X(f)Y(f) \end{aligned}$$

b) La proprietà duale della (25) è:

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \longleftrightarrow \quad Z(f) = X(f) * Y(f) \quad (27)$$

*Dimostrazione.* Applicando la formula di analisi si ha:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu \right] y(t)e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (28)$$

Nella (28) si è utilizzata la formula di sintesi per  $x(t)$ , usando la variabile  $\nu$  per non creare ambiguità con la variabile  $f$ . Invertendo quindi l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-\nu)t} dt \right] d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y(f-\nu)d\nu = X(f) * Y(f) \end{aligned}$$

**Esempio.** Calcoliamo, nel dominio della frequenza, la convoluzione tra due impulsi rettangolari della stessa durata, cioè:

$$z(t) = x(t) * x(t)$$

dove  $x(t) = A\Pi(t/T)$ . Per la proprietà (25) risulta:

$$Z(f) = X^2(f)$$

dove  $X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT)$ . Quindi:

$$Z(f) = (AT)^2 \operatorname{sinc}^2(fT) \quad \longleftrightarrow \quad z(t) = A^2T \Lambda(t/T)$$

Per determinare  $z(t)$  è stato applicato il risultato ottenuto nell'esempio di pag.13.

Si noti come il calcolo della convoluzione tra due impulsi rettangolari risulti molto più semplice nel dominio della frequenza che nel dominio del tempo. E' chiaro, però, che una volta calcolata la trasformata di Fourier dei due segnali e realizzato il prodotto è necessario anche tornare nel dominio del tempo e calcolare  $z(t)$ . Se il segnale ottenuto  $Z(f)$  è troppo complesso da antitrasformare, la convoluzione andrà effettuata nel dominio del tempo.

Questo procedimento, oltre che per il calcolo della convoluzione, può risultare estremamente utile per il calcolo dell'autocorrelazione di un segnale di energia, dato che risulta:

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x(-\tau) \quad \longleftrightarrow \quad X(f)X(-f)$$

Per il calcolo della trasformata di Fourier di  $x(-\tau)$  abbiamo applicato la (19) con  $a = -1$ . D'altra parte, se  $x(t)$  è reale  $X(-f) = X^*(f)$ , quindi:

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x(-\tau) \quad \longleftrightarrow \quad X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$$

Quindi bisogna calcolare la quantità  $|X(f)|^2$  e poi antitrasformare. Ovviamente con ragionamenti analoghi si può determinare la mutua correlazione tra due segnali operando nel dominio della frequenza e non in quello del tempo.

### 1.7.7 Modulazione

La proprietà di modulazione risulta estremamente utile quando si vuole traslare lo spettro di un segnale intorno a una fissata frequenza ed è un'operazione fondamentale tutte le volte in cui si vuole trasmettere un segnale su un determinato mezzo di comunicazione. Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

utilizzando la definizione (si osservi che  $y(t)$  è ancora un segnale di energia se  $x(t)$  è di energia):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0) \end{aligned}$$

In conclusione:

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) \quad (29)$$

Aver moltiplicato il segnale  $x(t)$  per una sinusoidale alla frequenza  $f_0$  ha permesso di traslare lo spettro di  $x(t)$  proprio intorno alle frequenze  $\pm f_0$ . Si parla in questo caso di *modulazione d'ampiezza* perché l'ampiezza della sinusoidale viene modulata dall'andamento del segnale.

Come conseguenza della dimostrazione si trova anche che se si moltiplica un segnale per un fasore si trasla lo spettro in frequenza intorno alla portante  $f_0$  (proprietà duale della traslazione nel tempo):

$$y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = X(f - f_0) \quad (30)$$

## 1.8 Trasformata di Fourier generalizzata

La trasformata di Fourier può anche essere applicata a segnali che non soddisfano le condizioni di Dirichlet o che non sono segnali di energia, pur di introdurre la funzione generalizzata impulso di Dirac,  $\delta(t)$ .

### 1.8.1 Delta di Dirac e Segnale costante

Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $x(t) = \delta(t)$ :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft}|_{t=0} = 1$$

Quindi:

$$x(t) = \delta(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = 1 \quad (31)$$

Lo spettro dell'impulso di Dirac contiene componenti a qualsiasi frequenza arbitrariamente grande e tutte le componenti hanno la stessa ampiezza. Se scriviamo anche l'equazione di sintesi, si ha che:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df$$

Ovviamente questa uguaglianza va intesa nel senso delle distribuzioni, dato che l'integrale non è definito in senso ordinario. Calcoliamo adesso la trasformata di Fourier di  $\delta(t - t_0)$ :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft}|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0}$$

Quindi:

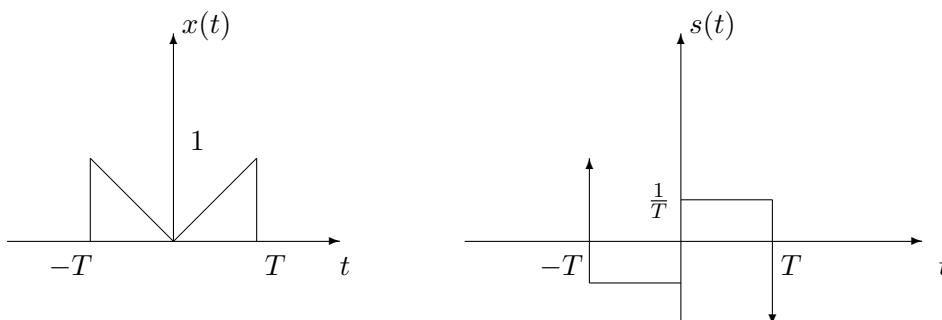
$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = e^{-j2\pi ft_0} \quad (32)$$

L'introduzione della  $\delta(t)$  ci permette di calcolare la trasformata di Fourier di un segnale a energia infinita come il segnale costante, infatti per dualità, risulta:

$$x(t) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad X(f) = \delta(-f) = \delta(f) \quad (33)$$

dove è stata sfruttata la proprietà di parità dell'impulso di Dirac.

**Esempio.** Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale  $x(t) = \frac{|t|}{T} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$  applicando la proprietà di integrazione:



La derivata  $s(t)$  può essere espressa analiticamente come:

$$s(t) = \delta(t+T) - \delta(t-T) - \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right) + \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Calcoliamo la sua trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} S(f) &= e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \text{sinc}(fT)e^{j\pi fT} + \text{sinc}(fT)e^{-j\pi fT} \\ &= 2j \sin(2\pi fT) - 2j \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

Infine:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{S(f)}{j2\pi f} = 2j \frac{\sin(2\pi fT)}{j2\pi f} - 2j \frac{\text{sinc}(fT) \sin(\pi fT)}{j2\pi f} \\ &= 2T \text{sinc}(2fT) - T \text{sinc}^2(fT) \end{aligned} \quad (34)$$

In realtà, il segnale  $x(t)$  si può anche esprimere come  $x(t) = \Pi(t/2T) - \Lambda(t/T)$ , quindi, anziché usare la proprietà di integrazione, bastava applicare la proprietà di linearità e sfruttare il fatto che le trasformate di Fourier dell'impulso rettangolare e triangolare sono note, ottenendo così lo stesso risultato mostrato nella (34).

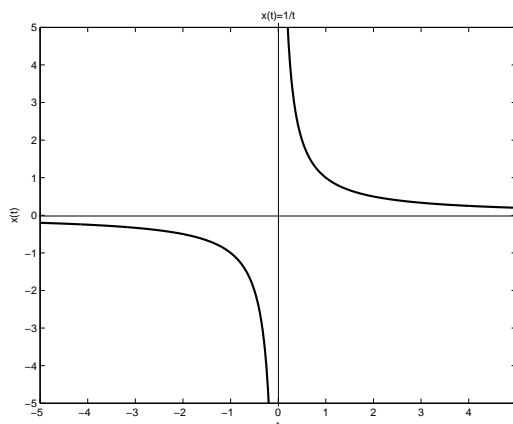
### 1.8.2 Gradino e Signum

In questa sezione vogliamo calcolare le trasformate di Fourier del segnale gradino e del segnale signum, entrambi segnali di potenza. In realtà dato che risulta

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t)$$

basta calcolare la trasformata di Fourier del segnale signum, quella di  $u(t)$  si ottiene poi applicando la linearità e ricordando che la trasformata di Fourier di una costante è un impulso di Dirac:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\text{sign}(t)]$$

Figura 6: Rappresentazione grafica del segnale  $x(t) = 1/t$ 

Per calcolare la trasformata di Fourier di  $\text{sign}(t)$ , bisogna, a sua volta, determinare la trasformata di Fourier del segnale  $x(t) = 1/t$ , il cui grafico è mostrato in figura 6. Tale segnale non è sommabile, in quanto è infinito del primo ordine per  $t \rightarrow 0$  e infinitesimo del primo ordine per  $|t| \rightarrow +\infty$ , nonostante ciò è possibile calcolarne la trasformata di Fourier nel senso del valor principale secondo Cauchy. Vediamo come. Applicando l'equazione di analisi:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi ft}}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{t} dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt$$

Dal momento che la funzione  $\cos(2\pi ft)/t$  è dispari, il primo integrale fornisce contributo nullo, se si considera il valor principale secondo Cauchy (VPC), cioè la quantità:

$$VPC \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{t} dt \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, T \rightarrow \infty} \left[ \int_{-T}^{-\varepsilon} \frac{\cos(2\pi ft)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^T \frac{\cos(2\pi ft)}{t} dt \right]$$

Quindi:

$$X(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt = -j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2ft) dt$$

Il calcolo dell'integrale diventa semplice se si applica la (9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = Y(0)$$

e se si ricorda che  $\text{sinc}(t) \leftrightarrow \Pi(t)$ , per cui applicando la proprietà del cambiamento di scala:

$$y(t) = \text{sinc}(\alpha t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2ft) dt = \frac{1}{2|f|} \Pi(0) = \frac{1}{2|f|}$$

In conclusione:

$$X(f) = -\frac{j2\pi f}{2|f|} = -j\pi \operatorname{sign}(f)$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{t} \longleftrightarrow -j\pi \operatorname{sign}(f) \quad (35)$$

A questo punto basta applicare la proprietà di dualità per ottenere la trasformata di Fourier del segnale  $\operatorname{sign}(t)$ :

$$-j\pi \operatorname{sign}(t) \longleftrightarrow -\frac{1}{f}$$

ovvero

$$\operatorname{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

Di conseguenza la trasforma di Fourier del gradino è:

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (36)$$

### 1.8.3 Teorema di integrazione completo

Utilizzando i risultati ottenuti nel paragrafo precedente è possibile estendere il teorema di integrazione anche ai segnali di potenza. Infatti:

$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)u(t-\alpha) d\alpha = x(t) * u(t)$$

D'altra parte:

$$x(t) * u(t) \longleftrightarrow X(f) \left[ \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right]$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f) \quad (37)$$

Questo è il teorema di integrazione in forma completa. Il secondo termine tiene conto di un'eventuale componente continua che potrebbe risultare dall'integrazione e che nel caso di segnali di energia risulta essere nulla. Si tenga presente che quando  $X(0) = 0$  si ottiene la proprietà (24).

### 1.8.4 Trasformata di Fourier per segnali periodici

Grazie all'introduzione della delta di Dirac, è possibile estendere la trasformata di Fourier anche ai segnali periodici. In questo modo si utilizza un unico strumento (trasformata di Fourier) sia per i segnali aperiodici che per quelli periodici. Ricordiamo l'equazione (32):

$$x(t) = \delta(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

Applicando la proprietà di dualità, otteniamo:

$$x(t) = e^{-j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(-f - f_0) = \delta(f + f_0) \quad (38)$$

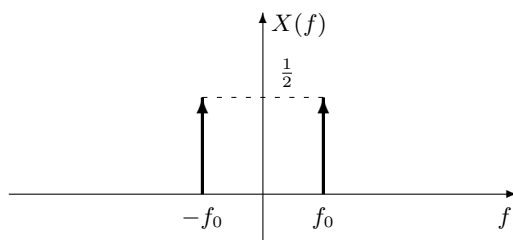


Figura 7: Trasformata di Fourier di  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

ma anche:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(-f + f_0) = \delta(f - f_0) \quad (39)$$

Nelle due relazioni (38) e (39) abbiamo sfruttato la proprietà di parità della  $\delta(t)$ . A questo punto, è semplice ricavare la trasformata di Fourier di  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , utilizzando la formula di Eulero:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad (40)$$

La trasformata di Fourier del coseno è costituita da due impulsi di ampiezza  $1/2$  centrati nelle frequenze  $\pm f_0$ , come mostrato in figura 7. È importante sottolineare che da un punto di vista concettuale la trasformata di Fourier fornisce le stesse indicazioni della serie di Fourier. Con un procedimento analogo possiamo derivare la trasformata di Fourier del seno:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0) \quad (41)$$

Si noti che possiamo riottenere la proprietà di modulazione, tenendo presente che la trasformata di Fourier del prodotto di due segnali è data dalla convoluzione delle trasformate:

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) * \left[ \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right]$$

quindi:

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

A questo punto è immediato calcolare la trasformata di Fourier di un qualsiasi segnale periodico  $x_p(t)$ , ricordando che tale segnale ammette espansione in serie di Fourier:

$$x_p(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow X_p(f) = \sum_k X_k \delta(f - k f_0)$$

Questa relazione mostra che il contenuto spettrale di un segnale periodico è concentrato alle frequenze armoniche (spettro a righe), così come evidenzia l'analisi in frequenza mediante la serie (figura 8).

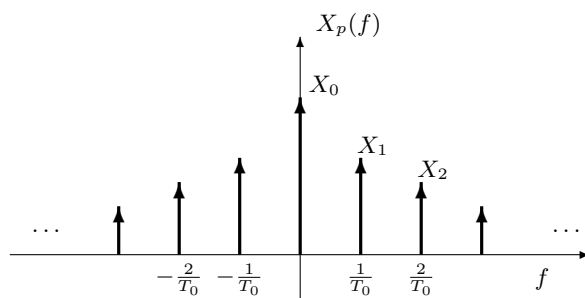


Figura 8: Trasformata di Fourier di un segnale periodico

**Esempio.** Si consideri nuovamente il treno di impulsi ideali

$$x_p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$$

Ricordiamo che i coefficienti di Fourier sono tutti costanti  $X_k = 1/T_0$ , per cui:

$$x_p(t) \longleftrightarrow X_p(f) = \sum_k \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \quad (42)$$

La trasformata di Fourier di un treno di impulsi di periodo  $T_0$  è ancora un treno di impulsi di ampiezza  $1/T_0$  e periodo  $1/T_0$ .

### 1.8.5 Formule di Poisson

Le formule di Poisson ci forniscono dei risultati importanti per quanto riguarda la replicazione e il campionamento dei segnali.

1. *Prima formula di Poisson.* Si consideri un segnale periodico:

$$x_p(t) = \text{rep}_{T_0}[x(t)] = \sum_n x(t - nT_0) \quad (43)$$

dove  $x(t)$  è il generatore. Il segnale  $x_p(t)$  si può anche esprimere come:

$$x_p(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0)$$

Calcoliamo adesso la trasformata di Fourier di  $x_p(t)$ , ricordando che la convoluzione nel tempo è il prodotto in frequenza e che vale la (42):

$$\begin{aligned} X_p(f) &= X(f) \sum_k \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= \sum_k \frac{1}{T_0} X(f) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= \sum_k \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

Antitrasformando la (44) e uguagliando alla (43) si ottiene la prima formula di Poisson:

$$\sum_n x(t - nT_0) = \sum_k \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi kt/T_0} \quad (45)$$

Tale relazione esprime il fatto che ad una replicazione nel tempo corrisponde un campionamento in frequenza. Facciamo un'importante osservazione. Dalla (45) si può notare come i coefficienti di Fourier  $X_k$  si possono determinare anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \quad (46)$$

cioè bisogna prima determinare la trasformata del generatore  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$  e poi campionarla opportunamente. La formula (46) può risultare molto più comoda rispetto alla definizione per calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie.

2. *Seconda formula di Poisson.* Tale relazione è duale rispetto alla precedente e ci dice che se si campiona un segnale nel dominio del tempo lo spettro viene replicato in frequenza. Consideriamo un segnale campionato idealmente:

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_0) \quad (47)$$

e calcoliamone la sua trasformata di Fourier usando la (27) e la (42):

$$\begin{aligned} X_\delta(f) &= X(f) * \sum_k \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= \sum_k \frac{1}{T_0} X\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned} \quad (48)$$

Scopriamo che campionare nel tempo significa replicare in frequenza. Adesso riscriviamo la (47) nel seguente modo:

$$x_\delta(t) = \sum_n x(t) \delta(t - nT_0) = \sum_n x(nT_0) \delta(t - nT_0) \quad (49)$$

e calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$X_\delta(f) = \sum_n x(nT_0) e^{-j2\pi n f T_0} \quad (50)$$

Uguagliando la (50) e la (48) si ottiene la seconda formula di Poisson:

$$\sum_n x(nT_0) e^{-j2\pi n f T_0} = \sum_k \frac{1}{T_0} X\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \quad (51)$$

Di seguito mostriamo alcuni esempi di calcolo della trasformata di Fourier per segnali periodici attraverso la (46) (formula del campionamento in frequenza). Questa formula è molto più semplice da usare, perchè nell'equazione di analisi dello sviluppo in serie è necessario considerare la restrizione ad un periodo del segnale, con la (46), invece, basta scegliere un qualsiasi generatore del segnale periodico.

a) Calcoliamo nuovamente la rappresentazione in frequenza del segnale periodico:

$$x_p(t) = \sum_n (-1)^n \delta(t - nT_0/2)$$

Dobbiamo individuare il generatore, calcolarne la trasformata e campionarla secondo la (46). Il generatore del segnale è:

$$x(t) = \delta(t) - \delta(t - T_0/2)$$

La cui trasformata di Fourier è:

$$X(f) = 1 - e^{-j\pi f T_0}$$

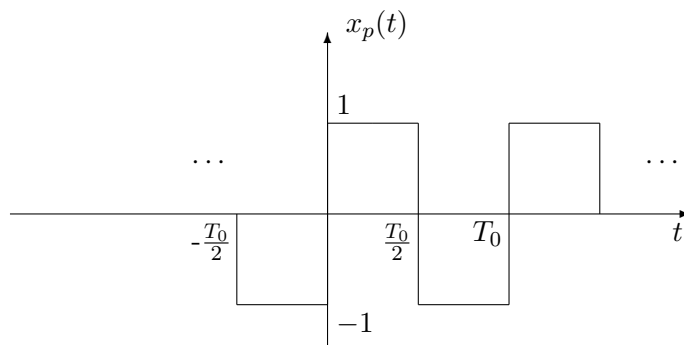
Essendo  $x_p(t)$  periodico di periodo  $T_0$  i coefficienti di Fourier si calcolano come:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \\ &= \frac{1}{T_0} (1 - e^{-j\pi k}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{T_0} & k \text{ disp.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

In conclusione:

$$X_p(f) = \sum_{k \text{ disp.}} \frac{2}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

b) Si consideri nuovamente l'onda quadra di periodo  $T_0$ :



Per determinare i coefficienti di Fourier, consideriamo il seguente generatore:

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t - T_0/4}{T_0/2}\right) - \Pi\left(\frac{t + T_0/4}{T_0/2}\right)$$

la cui trasformata di Fourier è:

$$X(f) = \frac{T_0}{2} \text{sinc}(fT_0/2) e^{-j2\pi f T_0/4} - \frac{T_0}{2} \text{sinc}(fT_0/2) e^{j2\pi f T_0/4} = -jT_0 \text{sinc}(fT_0/2) \sin(\pi f T_0/2)$$

I coefficienti di Fourier quindi sono:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = -j \operatorname{sinc}(k/2) \sin(\pi k/2)$$

Si noti come per  $k$  pari i coefficienti si annullino, per cui si possono riscrivere come:

$$X_k = \begin{cases} -j \frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k/2} & k \text{ disp.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2j}{\pi k} & k \text{ disp.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Il segnale dell'esempio precedente viene anche detto *alternativo* (o alternato), dato che risulta:

$$x_p(t + T_0/2) = -x_p(t)$$

Un segnale periodico alternativo di periodo  $T_0$  può sempre essere espresso nella forma:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n y(t - nT_0/2) \quad (53)$$

dove  $y(t)$  è nel nostro caso:

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t - T_0/4}{T_0/2}\right)$$

Il fatto che per tale segnale i coefficienti di Fourier di ordine pari sono nulli non è un caso. Dimostriamo, sfruttando il risultato ottenuto al punto a), che un segnale periodico alternativo ha i coefficienti di Fourier di ordine pari tutti nulli. La (53) può anche essere riscritta come:

$$x_p(t) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t - nT_0/2)$$

la cui trasformata di Fourier è quindi:

$$\begin{aligned} X_p(f) &= Y(f) \sum_{k \text{ disp.}} \frac{2}{T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= \sum_{k \text{ disp.}} \frac{2}{T_0} Y\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

Quindi abbiamo trovato che la sommatoria è diversa da zero solo per  $k$  dispari e che basta calcolare la trasformata di Fourier di  $y(t)$ , piuttosto che del generatore. Ripetiamo l'esercizio del punto precedente, usando la (54). Nel nostro caso la trasformata di Fourier di  $y(t)$  è:

$$Y(f) = \frac{T_0}{2} \operatorname{sinc}(fT_0/2) e^{-j2\pi fT_0/4}$$

Quindi:

$$\frac{2}{T_0} Y\left(\frac{k}{T_0}\right) = \operatorname{sinc}(k/2) e^{-j\pi k/2} = \begin{cases} -\frac{2j}{\pi k} & k \text{ disp.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Otteniamo così lo stesso risultato del punto precedente.

## 2 Trasformata di Fourier per segnali tempo discreto

In questa sezione estendiamo l'analisi in frequenza mediante trasformata di Fourier anche ai segnali aperiodici tempo discreto. Abbiamo già notato nello studio dello sviluppo in serie che esistono molte similitudini tra il caso continuo e quello discreto, ci sono tuttavia anche significative differenze. Proprio per questo motivo, cominceremo lo studio prima estendendo la rappresentazione in frequenza ai segnali aperiodici tempo discreto, così come è stato fatto nel continuo, quindi descriveremo le proprietà comuni col caso continuo, ma soprattutto cercheremo di enfatizzare le differenze allo scopo di comprendere meglio le due rappresentazioni.

### 2.1 Dalla serie alla trasformata di Fourier

Applichiamo una procedura analoga al caso continuo per sviluppare la rappresentazione mediante trasformata di Fourier dei segnali aperiodici. Consideriamo una sequenza,  $x(n)$ , di durata finita  $N$ , e costruiamo il segnale aperiodico  $x_p(n) = \text{rep}_{N_0}[x(n)]$ , con  $N_0 > N$ . Per esempio, supponiamo che  $x(n)$  sia il segnale mostrato in figura 9 e  $x_p(n)$  il corrispondente segnale periodico.

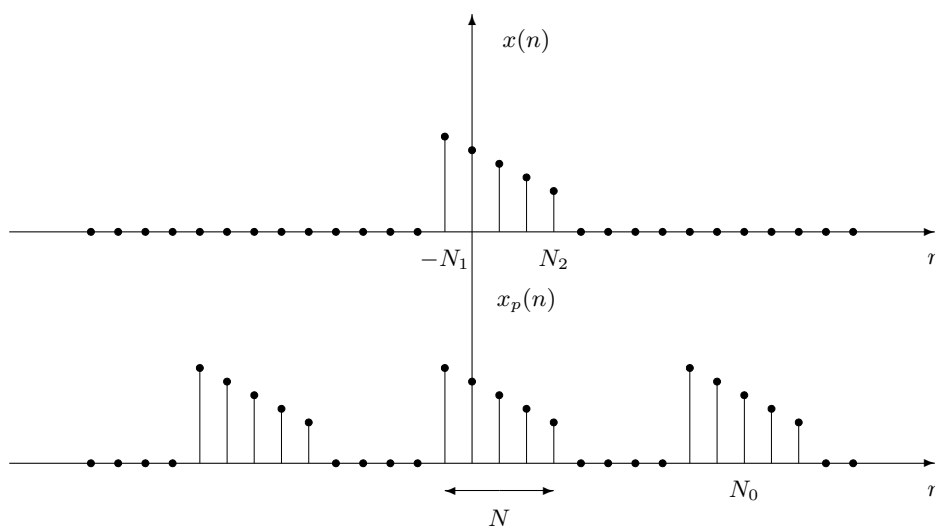


Figura 9: Andamento temporale di  $x(n)$  e  $x_p(n)$

Il segnale periodico ammette la seguente espansione in serie (eq. sintesi):

$$x_p(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X_k e^{j2\pi kn/N_0} \quad (55)$$

dove i coefficienti di Fourier si calcolano come (eq. analisi):

$$X_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_p(n) e^{-j2\pi kn/N_0} \quad (56)$$

Poiché  $x_p(n) = x(n)$  su un periodo che include l'intervallo  $(-N_1, N_2)$  è conveniente scegliere come periodo per il calcolo degli  $X_k$  quello che include tale intervallo, quindi la (56) diventa:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x(n) e^{-j2\pi kn/N_0} \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi kn/N_0} \end{aligned} \quad (57)$$

nella (57) è stato possibile modificare gli estremi della sommatoria, dato che  $x(n)$  è nullo all'esterno dell'intervallo  $(-N_1, N_2)$ . Definiamo adesso:

$$X(\nu) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n}$$

risulta

$$X_k = \frac{1}{N_0} X(\nu)|_{\nu=k/N_0} = \frac{1}{N_0} X\left(\frac{k}{N_0}\right) \quad (58)$$

Sostituendo la (58) nella (55), si ha:

$$x_p(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} X\left(\frac{k}{N_0}\right) e^{j2\pi kn/N_0}$$

A questo punto possiamo ottenere  $x(n)$  a partire da  $x_p(n)$  portando il periodo all'infinito:

$$\begin{aligned} x(n) &= \lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_p(n) \\ &= \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} X\left(\frac{k}{N_0}\right) e^{j2\pi kn/N_0} \end{aligned} \quad (59)$$

Riscriviamo la (59) sostituendo  $\nu_0 = 1/N_0$ :

$$\begin{aligned} x(n) &= \lim_{\nu_0 \rightarrow 0} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\nu_0) e^{j2\pi k\nu_0 n} \nu_0 \\ &= \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Delta\nu) e^{j2\pi k\Delta\nu n} \Delta\nu \end{aligned} \quad (60)$$

Nella (60) abbiamo riconosciuto che  $\nu_0$  rappresenta anche la spaziatura tra due armoniche successive e quindi è stata rinominata  $\Delta\nu$ . Notiamo adesso che ogni termine della sommatoria non è altro che l'area di un rettangolo di altezza  $X(k\Delta\nu) e^{j2\pi k\Delta\nu n}$  e larghezza  $\Delta\nu$ . Per  $\Delta\nu \rightarrow 0$  la sommatoria diventa un integrale, inoltre poiché la somma si effettua su  $N_0$  intervalli consecutivi di ampiezza  $\Delta\nu = \nu_0 = 1/N_0$ , l'intervallo complessivo di integrazione avrà ampiezza unitaria

$$x(n) = \int_1 X(\nu) e^{j2\pi\nu n} d\nu$$

E' importante sottolineare che la quantità  $e^{j2\pi n}$  è periodica di periodo 1, e di conseguenza lo è anche  $X(\nu)$ , dato che risulta:

$$X(\nu - 1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi(\nu-1)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n} = X(\nu) \quad (61)$$

Allora per specificare completamente  $X(\nu)$  basta assegnare i suoi valori in un intervallo di ampiezza unitario, ad esempio  $(-1/2, 1/2)$  oppure  $(0, 1)$ .

In conclusione, riportiamo le due equazioni relative alla rappresentazione di un segnale aperiodico tempo discreto:

$$x(n) = \int_1 X(\nu) e^{j2\pi\nu n} d\nu \quad (62)$$

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n} \quad (63)$$

La (62) è l'equazione di sintesi (trasformata di Fourier inversa), che mostra come  $x(n)$  si possa rappresentare come combinazione lineare di esponenziali complessi con frequenza che varia con continuità su intervalli di durata unitaria; mentre la (63) è quella di analisi (trasformata di Fourier diretta), che ci permette di determinare il peso che le varie componenti hanno nella ricostruzione del segnale. Anche in questo caso  $X(\nu)$  viene chiamato spettro e fornisce le informazioni sull'ampiezza e sulla fase dei fasori costituenti il segnale:

$$X(\nu) = |X(\nu)| e^{j\angle X(\nu)}$$

Ancora una volta nella trattazione che segue utilizzeremo la notazione:

$$x(n) \longleftrightarrow X(\nu)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{F}^{-1}[X(\nu)] \\ X(\nu) &= \mathcal{F}[x(n)] \end{aligned}$$

Confrontiamo adesso le equazioni (62) e (63) con le corrispondenti versioni tempo continuo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

La differenza fondamentale tra le due è rappresentata dalla *periodicità* di  $X(\nu)$  (61), e dall'intervallo di durata finita per la ricostruzione del segnale (62). Si noti poi l'asimmetria delle equazioni (62) e (63) (un integrale per la sintesi e una sommatoria per l'analisi), che mette in evidenza che anche se il segnale è discreto, essendo aperiodico, è necessario usare fasori la cui frequenza varia con continuità in un intervallo.

### 2.1.1 Esempio

Si consideri il segnale impulso rettangolare di durata  $N$ :

$$x(n) = \mathcal{R}_N(n)$$

Si vuole calcolare la sua trasformata di Fourier  $X(\nu)$ , applicando la (63):

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}}$$

Mettendo in evidenza  $e^{-j\pi\nu N}$  al numeratore e  $e^{-j\pi\nu}$  al denominatore si ha:

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \frac{e^{-j\pi\nu N} [e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}]}{e^{-j\pi\nu} [e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}]} \\ &= e^{-j\pi\nu(N-1)} \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)} \end{aligned} \quad (64)$$

La (64) rappresenta proprio la funzione di Dirichlet  $\mathcal{D}_N(\nu)$ , il cui spettro di ampiezza e di fase sono dati da:

$$\begin{aligned} |X(\nu)| &= \left| \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)} \right| \\ \angle X(\nu) &= -\pi\nu(N-1) + \angle \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)} \end{aligned}$$

e riportati in figura 10 per  $N = 10$  (a sinistra). Lo spettro è mostrato nell'intervallo  $(-1, 1)$ , in realtà essendo  $X(\nu)$  periodico è sufficiente osservarlo nell'intervallo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  oppure  $(0, 1)$ . Notate le analogie con la trasformata dell'impulso rettangolare tempo continuo non simmetrico rispetto all'origine  $x(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$  (figura 3).

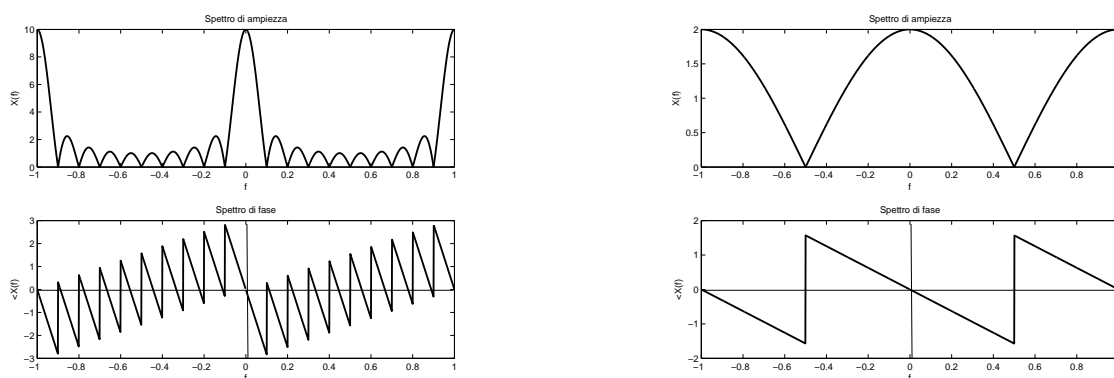


Figura 10: Modulo e fase della funzione di Dirichlet per  $N = 10$  e  $N = 2$ .

E' interessante calcolare  $X(\nu)$  per  $N = 2$ , in tal caso risulta:

$$X(\nu) = 1 + e^{-j2\pi\nu} = 2 e^{-j\pi\nu} \cos(\pi\nu)$$

Notate dalla rappresentazione in figura 10 (a destra) come siano scomparsi i lobi laterali e lo spettro di ampiezza sia quello di una sinusoidale. Ovviamente il lobo centrale si è allargato, dato che  $x(n)$  ha durata più stretta. Per  $N = 1$ , invece,  $x(n)$  si riduce ad un impulso unitario, e la trasformata è pari a 1:

$$x(n) = \delta(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu) = 1 \quad (65)$$

coerentemente con la (31).

### 2.1.2 Esempio

Si consideri il segnale esponenziale monolatero:

$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

La trasformata di Fourier è:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j2\pi\nu})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi\nu}}$$

Spettro di ampiezza e di fase sono dati da:

$$|X(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi\nu)}}$$

$$\angle X(\nu) = \arctan \left[ \frac{a \sin(2\pi\nu)}{1 - a \cos(2\pi\nu)} \right]$$

In figura 11 sono mostrati spettro di ampiezza e di fase per  $a > 0$  e  $a < 0$ . Si noti come nel primo caso lo spettro sia concentrato alle basse frequenze (intorno a ogni multiplo di un valore intero  $k$ ), mentre nel secondo caso il contributo frequenziale sia più elevato alle alte frequenze (intorno a ogni multiplo di  $1/2 + k$ ), in accordo col fatto che quando  $a < 0$  il segnale assume alternativamente valori positivi e negativi e quindi varia più rapidamente rispetto a quando  $a > 0$  (figura 12).

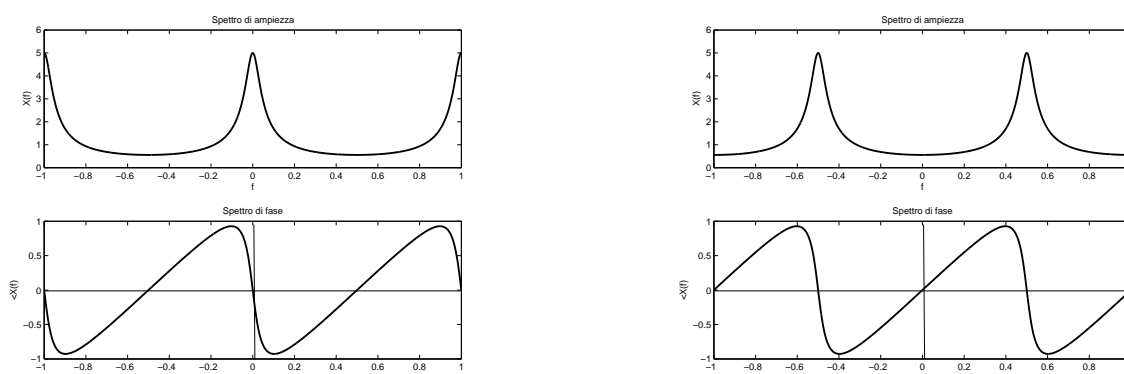


Figura 11: Modulo e fase di  $X(\nu)$  per  $a = 0.8$  e  $a = -0.8$ .

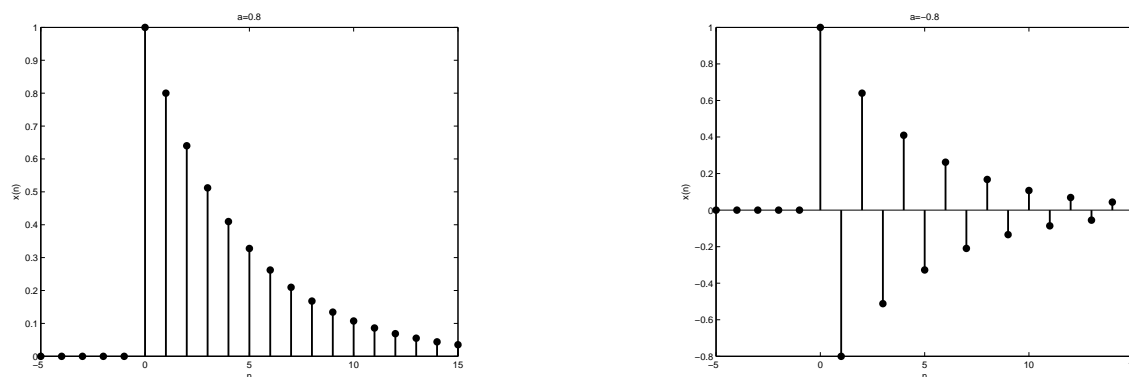


Figura 12: Andamento temporale dell'esponenziale monolatero per  $a = 0.8$  e  $a = -0.8$ .

### 2.1.3 Esempio

Consideriamo adesso la sequenza esponenziale bilatera:

$$x(n) = a^{|n|} \quad |a| < 1$$

La trasformata di Fourier è:

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j2\pi\nu n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j2\pi\nu n} \quad (66)$$

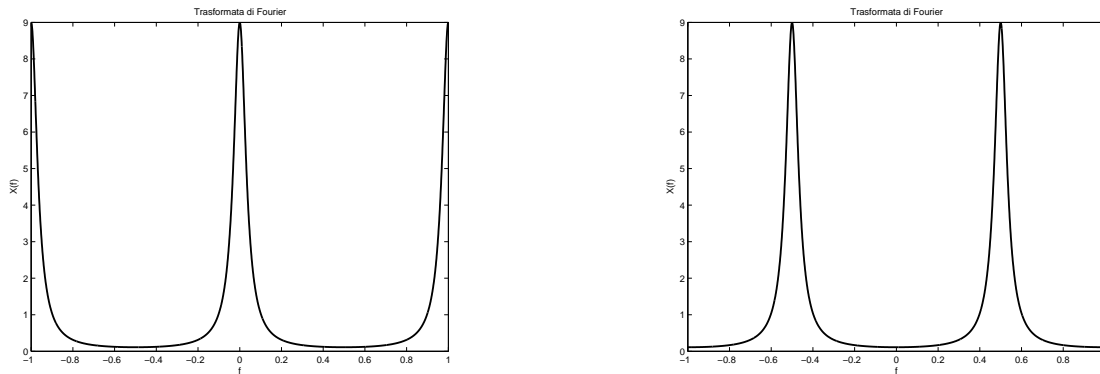
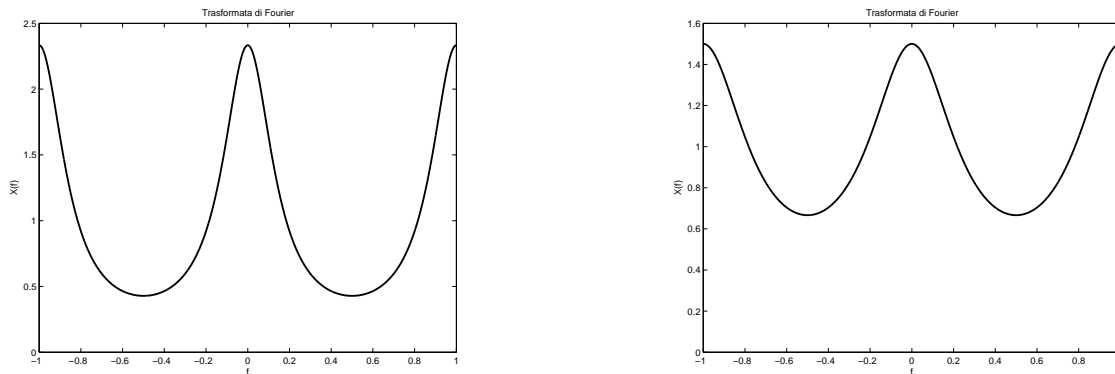
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j2\pi\nu})^n + \sum_{k=1}^{+\infty} (a e^{j2\pi\nu})^k \quad (67)$$

Nella seconda sommatoria della (66) è stato fatto il cambio di variabile  $k = -n$ . Per fare in modo che anche quest'ultima sommatoria sia una serie geometrica aggiungiamo e sottraiamo il termine per  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j2\pi\nu})^n + \sum_{k=0}^{+\infty} (a e^{j2\pi\nu})^k - 1 \\ &= \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi\nu}} + \frac{1}{1 - a e^{j2\pi\nu}} - 1 \\ &= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(2\pi\nu) + a^2} \end{aligned}$$

In figura 13 si mostra lo spettro del segnale per valori di  $a$  positivi e negativi. Anche in questo caso per  $a > 0$  lo spettro è concentrato intorno alle basse frequenze, mentre per  $a < 0$  intorno alle alte frequenze.

Il valore di  $a$  determina la rapidità di decadimento della sequenza nel dominio del tempo e quindi la larghezza di banda nel dominio della frequenza. In particolare, al diminuire di  $a$  la sequenza decade più rapidamente a zero e quindi il suo spettro si allarga. Nella figura 14 si mostrano i grafici per  $a = 0.4$  (a sinistra) e  $a = 0.2$  (a destra).

Figura 13: Trasformata di Fourier per  $a = 0.8$  e  $a = -0.8$ .Figura 14: Trasformata di Fourier per  $a = 0.4$  e  $a = 0.2$ .

## 2.2 Condizioni di convergenza

Le condizioni su  $x(n)$  che garantiscono la convergenza della serie:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi\nu n}$$

sono la controparte tempo discreta delle condizioni di convergenza per il caso continuo. La serie converge in senso ordinario se  $x(n)$  è sommabile:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$$

In realtà, sotto tali ipotesi si può far vedere che la convergenza è uniforme, inoltre  $X(\nu)$  è invertibile e l'equazione di sintesi fornisce proprio  $x(n)$ . Se invece  $x(n)$  è a quadrato sommabile:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

la convergenza è assicurata in media quadratica.

## 2.3 Proprietà

Nell'elencare le proprietà per la trasformata di Fourier tempo discreta ci limiteremo ad enunciare quelle che presentano similitudini con il caso tempo continuo, mentre dimostreremo quelle che si differenziano significativamente. Mettiamo in evidenza comunque che la trasformata di Fourier nel caso discreto gode della proprietà di periodicità, cioè:

$$X(\nu - 1) = X(\nu) \quad (68)$$

### 2.3.1 Simmetria coniugata o hermitiana

Se un segnale è reale:

$$X(-\nu) = X^*(\nu) \quad (69)$$

Questa condizione equivale a dire che lo spettro di ampiezza è pari e quello di fase dispari.

### 2.3.2 Valore nell'origine

Ponendo  $n = 0$  nell'equazione di sintesi (62) e  $\nu = 0$  in quella di analisi (63), otteniamo:

$$x(0) = \int_1 X(\nu) d\nu \quad (70)$$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \quad (71)$$

ricordiamo che queste equazioni permettono di calcolare rapidamente l'area della trasformata sul periodo dal valore del segnale nell'origine (70) e la somma di una serie nota la trasformata nell'origine (71).

### 2.3.3 Relazione di Parseval

La relazione di Parseval ci permette di calcolare l'energia del segnale sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_1 |X(\nu)|^2 d\nu \quad (72)$$

### 2.3.4 Linearità

Sia:

$$\begin{aligned} x(n) &\longleftrightarrow X(\nu) \\ y(n) &\longleftrightarrow Y(\nu) \end{aligned}$$

Si consideri poi il segnale  $z(n) = ax(n) + by(n)$ , combinazione lineare dei due segnali. Risulta:

$$z(n) = ax(n) + by(n) \quad \longleftrightarrow \quad Z(\nu) = aX(\nu) + bY(\nu) \quad (73)$$

### 2.3.5 Traslazione temporale e frequenziale

La traslazione nel tempo corrisponde ad una moltiplicazione per un esponenziale complesso in frequenza:

$$y(n) = x(n - n_0) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X(\nu) e^{-j2\pi\nu n_0} \quad (74)$$

Dualmente la moltiplicazione per un esponenziale complesso nel tempo corrisponde ad una traslazione in frequenza:

$$y(n) = x(n) e^{j2\pi\nu_0 n} \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X(\nu - \nu_0) \quad (75)$$

Consideriamo per la traslazione in frequenza il caso in cui  $\nu_0 = 1/2$ , cioè:

$$y(n) = x(n) e^{j\pi n} \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X\left(\nu - \frac{1}{2}\right)$$

Questa operazione non fa altro che spostare lo spettro di  $1/2$ , quindi se  $X(\nu)$  è concentrato alle basse frequenze  $Y(\nu)$  sarà concentrato alle alte frequenze e viceversa. D'altra parte ricordiamo che

$$e^{j\pi n} = (-1)^n$$

quindi cambiare il segno dei coefficienti di posto dispari in un segnale non fa altro che modificare le caratteristiche spettrali del segnale traslando lo spettro intorno alle basse (alte) frequenze se il segnale è concentrato intorno alle alte (basse) frequenze (si veda esempio 2.1.2).

### 2.3.6 Modulazione

La proprietà di modulazione afferma che:

$$y(n) = x(n) \cos(2\pi\nu_0 n) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = \frac{1}{2}X(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}X(\nu + \nu_0) \quad (76)$$

in modo analogo al caso continuo.

### 2.3.7 Differenza prima e somma corrente

Ricordiamo che le operazioni di derivazione e integrazione nel caso discreto sono date dalla differenza prima e dalla somma corrente, rispettivamente e risulta per la differenza prima:

$$y(n) = x(n) - x(n - 1) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X(\nu)[1 - e^{-j2\pi\nu}] \quad (77)$$

mentre per la somma corrente

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\nu}} X(\nu) \quad (78)$$

Anche in questo caso quest'ultima proprietà è valida solo se  $X(0) = 0$ , cioè quando  $x(n)$  ha area nulla, ovvero  $y(n)$  è un segnale di energia.

### 2.3.8 Prodotto e convoluzione

Per quanto riguarda le proprietà di prodotto e convoluzione c'è un'unica differenza tra il caso continuo e discreto legata alla periodicità di  $X(\nu)$ . Risulta, infatti che a una convoluzione nel tempo corrisponde ancora una volta un prodotto in frequenza:

$$z(n) = x(n) * y(n) \quad \longleftrightarrow \quad Z(\nu) = X(\nu)Y(\nu) \quad (79)$$

mentre a un prodotto nel tempo corrisponde la convoluzione, ma calcolata su un intervallo di durata unitaria (convoluzione periodica):

$$z(n) = x(n)y(n) \quad \longleftrightarrow \quad Z(\nu) = X(\nu) * Y(\nu) = \int_1 X(u)Y(\nu - u) du \quad (80)$$

### 2.3.9 Cambiamento di scala

Il cambiamento di scala per segnali discreti ha un significato diverso che per segnali continui, ci aspettiamo quindi delle differenze per questa proprietà. In realtà, vedremo che è ancora possibile affermare, da un punto di vista concettuale, che a una compressione (espansione) nel tempo corrisponde un'espansione (compressione), tuttavia bisognerà fare alcune precisazioni. Analizziamo tre casi:

- a) *Riflessione*. In questo caso il segnale risulta essere ribaltato rispetto all'asse delle ordinate e si ha:

$$y(n) = x(-n) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X(-\nu) \quad (81)$$

In modo analogo al caso continuo.

- b) *Decimazione*. L'operazione di decimazione richiede un pò di attenzione. Per calcolare la trasformata di Fourier del segnale  $y(n) = x(Mn)$  si procede in due passi, osservando che il segnale  $y(n)$  si può ottenere anche come il risultato delle due seguenti operazioni poste in cascata:

- 1) Moltiplicazione di  $x(n)$  per un treno di impulsi ideali di periodo  $M$ ,  $\tilde{\delta}_M(n) = \text{rep}_M[\delta(n)]$ :

$$\tilde{x}(n) = x(n)\tilde{\delta}_M(n) = x(n) \sum_k \delta(n - kM)$$

- 2) Decimazione per  $M$ :  $y(n) = \tilde{x}(Mn)$ .

La prima operazione non fa altro che annullare i campioni del segnale che poi andranno eliminati a causa della decimazione, per cui non modifica il risultato finale, d'altra parte è molto utile introdurla per il calcolo di  $Y(\nu)$ . Infatti si ha che:

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(Mn)e^{-j2\pi\nu n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(k)e^{-j2\pi\nu k/M} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi\nu n/M} \end{aligned} \quad (82)$$

nella (82) è stato effettuato il cambio di variabile  $k = Mn$  e poi la variabile  $k$  è stata rinominata  $n$ . A questo punto possiamo sostituire a  $\tilde{x}(n)$  il prodotto tra  $x(n)$  e il treno di impulsi  $\tilde{\delta}_M(n)$ , tenendo presente che quest'ultimo, essendo periodico, ammette espansione in serie di Fourier:

$$\tilde{\delta}_M(n) = \sum_{k=0}^{M-1} X_k e^{j2\pi kn/M}$$

con coefficienti di Fourier:

$$X_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \delta(n) e^{j2\pi kn/M} = \frac{1}{M} e^{j2\pi kn/M} \Big|_{n=0} = \frac{1}{M}$$

per cui:

$$\tilde{\delta}_M(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} e^{j2\pi kn/M} \quad (83)$$

Possiamo a questo punto riscrivere l'equazione (82) come:

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \tilde{\delta}_M(n) e^{-j2\pi \nu n/M} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} e^{j2\pi kn/M} e^{-j2\pi \nu n/M} \end{aligned}$$

A questo punto, scambiando l'ordine delle due sommatorie, otteniamo:

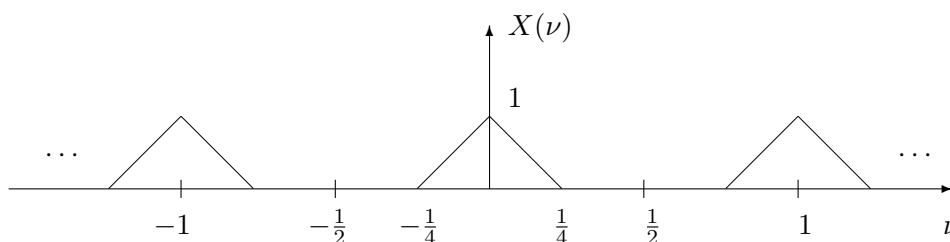
$$Y(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi(\nu-k)n/M} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu-k}{M}\right)$$

con  $X(\nu) = \mathcal{F}[x(n)]$ . In conclusione:

$$y(n) = x(Mn) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu-k}{M}\right) \quad (84)$$

La proprietà (84) ci dice che se effettuiamo una decimazione nel tempo otteniamo un'espansione in frequenza, ma a causa della periodicità della trasformata bisognerà considerare anche il contributo delle repliche in frequenza, che possono alterare lo spettro del segnale.

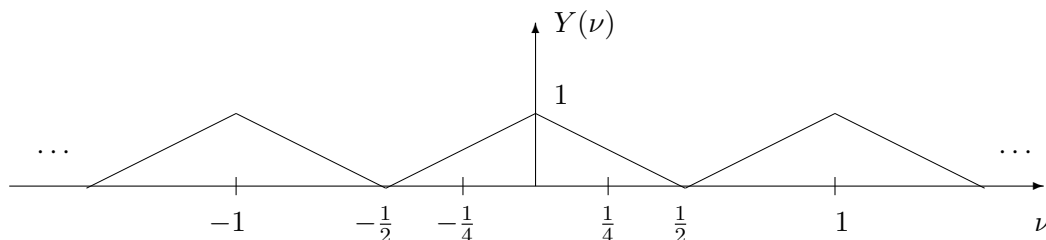
**Esempio.** Supponiamo di avere un segnale  $x(n)$  che presenta il seguente spettro:



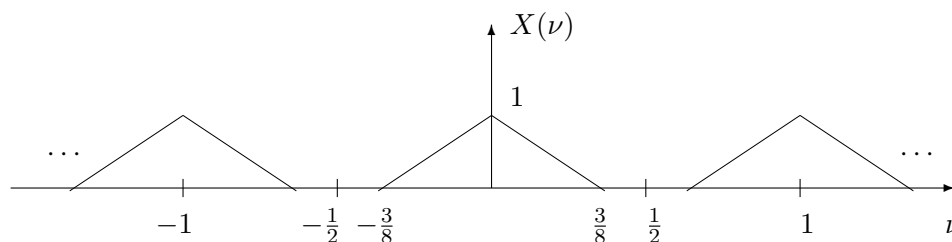
Consideriamo poi il segnale decimato  $y(n) = x(2n)$ , la cui trasformata di Fourier per la (84) risulta essere:

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} \left[ X\left(\frac{\nu}{2}\right) + X\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \right]$$

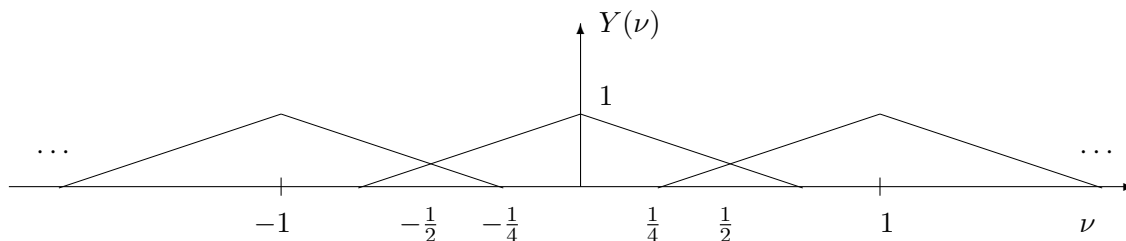
Graficamente si ottiene:



In effetti in questo caso lo spettro nell'intervallo  $(-1/2, 1/2)$  risulta essere proprio la versione espansa dello spettro del segnale  $x(n)$ . In realtà, se  $x(n)$  avesse avuto il seguente spettro:



la trasformata del segnale decimato per 2 sarebbe stata:



In tal caso lo spettro oltre ad essere espanso, viene anche distorto a causa della presenza delle repliche adiacenti (fenomeno di *aliasing*).

- c) *Espansione*. L'operazione di espansione risulta più semplice per il calcolo della trasformata rispetto alla decimazione.

Ricordiamo che un segnale espanso è definito nel seguente modo:

$$y(n) = x \left[ \frac{n}{N} \right] \triangleq \begin{cases} x \left( \frac{n}{N} \right) & n \text{ multiplo } N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La trasformata di Fourier quindi è data da:

$$Y(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{n}{M}\right] e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n \text{ mult. } M} x\left(\frac{n}{M}\right) e^{-j2\pi\nu n}$$

Effettuiamo adesso il cambio di variabile  $k = n/M$ , sostituzione possibile essendo  $n$  multiplo di  $M$  e quindi  $k$  intero:

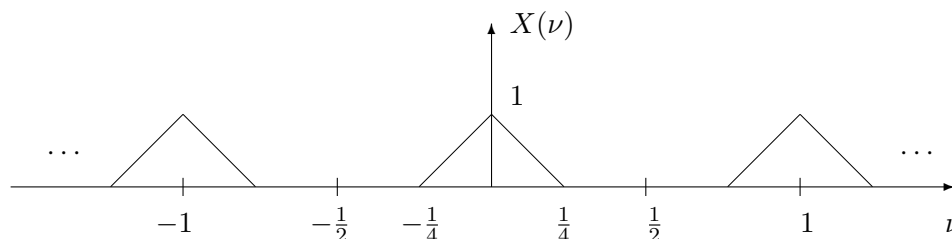
$$Y(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu Mk} = X(M\nu)$$

In conclusione:

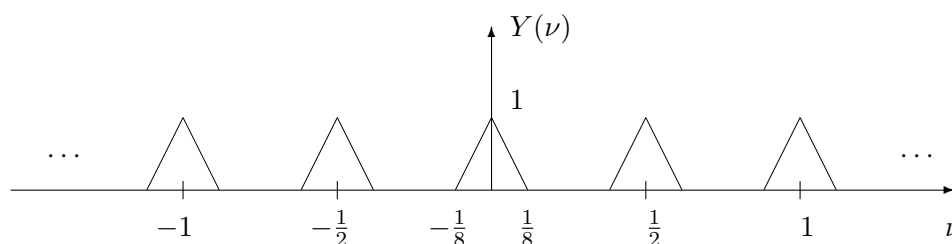
$$y(n) = x\left[\frac{n}{M}\right] \longleftrightarrow Y(\nu) = X(M\nu) \quad (85)$$

Quindi in questo caso è possibile affermare che ad un'espansione nel tempo corrisponde una compressione in frequenza.

**Esempio.** Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale  $y(n) = x[n/2]$  nell'ipotesi in cui lo spettro di  $x(n)$  sia:



Per la (85) si ha  $Y(\nu) = X(2\nu)$ . Graficamente:



In questo caso se si osserva lo spettro nell'intervallo  $(-1/2, 1/2)$  si può notare la presenza delle repliche adiacenti che però non si vanno a sovrapporre alla replica centrata nell'origine (fenomeno di *imaging*).

Come ulteriori esempi della proprietà di cambiamento di scala in figura 15 e 16 si mostrano i grafici relativi alla compressione ed espansione di un impulso rettangolare nell'intervallo  $(-1/2, 1/2)$ .

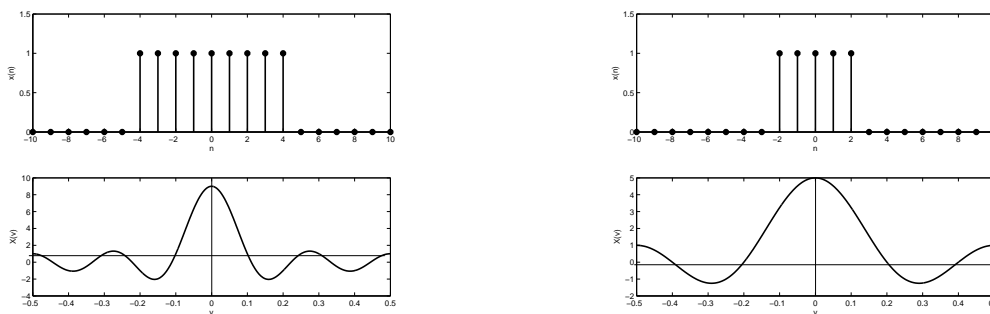


Figura 15: Trasformata di Fourier di  $x(n)$  e  $y(n) = x(2n)$ .

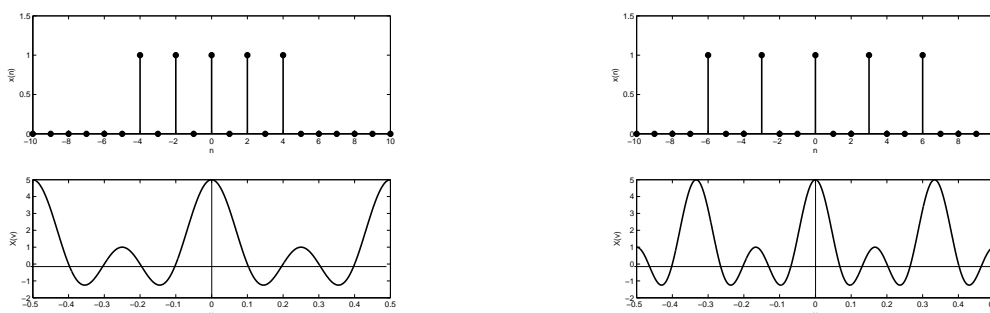


Figura 16: Trasformata di Fourier di  $y(n) = x[n/2]$  e  $y(n) = x[n/3]$ .

### 2.3.10 Dualità

Nello studio della trasformata di Fourier per segnali tempo continuo abbiamo visto che esiste una simmetria tra le equazioni di analisi e sintesi, Questa stessa proprietà non si verifica per i segnali tempo discreto, tuttavia esiste una proprietà di dualità tra la trasformata di Fourier tempo discreto e la serie di Fourier tempo continuo. Cerchiamo di capire il motivo confrontando le equazioni di analisi e sintesi nei due casi. Per la trasformata tempo discreto si ha:

$$x(n) = \int_1 X(\nu) e^{j2\pi\nu n} d\nu \tag{86}$$

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n} \tag{87}$$

mentre per la serie di Fourier tempo continuo:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi knt/T_0} \tag{88}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_p(t) e^{-j2\pi knt/T_0} dt \tag{89}$$

Si noti come le equazioni (87) e (88) risultino molto simili, in effetti la (87) non è altro che l'espansione in serie di Fourier (nel dominio della frequenza,  $t \rightarrow \nu$ ) del segnale  $X(\nu)$  periodico con periodo  $T_0 = 1$ , con coefficienti di Fourier dati da  $x(-n)$  (86). Quindi la proprietà di dualità si può vedere nel seguente modo. Sia  $x_p(t)$  un segnale periodico (di periodo 1) con coefficienti di Fourier dati da  $x(n)$ :

$$x_p(t) \longleftrightarrow X_n = x(n) \quad (90)$$

risulta:

$$x(-n) \longleftrightarrow X(\nu) = x_p(\nu) \quad (91)$$

Consideriamo l'esempio di seguito per chiarire l'uso di questa proprietà.

**Esempio.** Sappiamo che il treno di impulsi rettangolari di periodo  $T_0 = 1$ :

$$x_p(t) = \text{rep}_1[\Pi(2t)]$$

ha coefficienti di Fourier:

$$X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

La dualità ci dice che se consideriamo il segnale tempo discreto  $y(n) = x(-n) = X_{-n}$ :

$$y(n) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

allora la sua trasformata di Fourier è:

$$Y(\nu) = x_p(\nu) = \text{rep}_1[\Pi(2\nu)]$$

In figura 17 si mostra il segnale  $x_p(t)$  con i suoi coefficienti di Fourier  $X_n$  e il segnale  $y(n) = X_{-n}$  con la sua trasformata di Fourier tempo discreto.

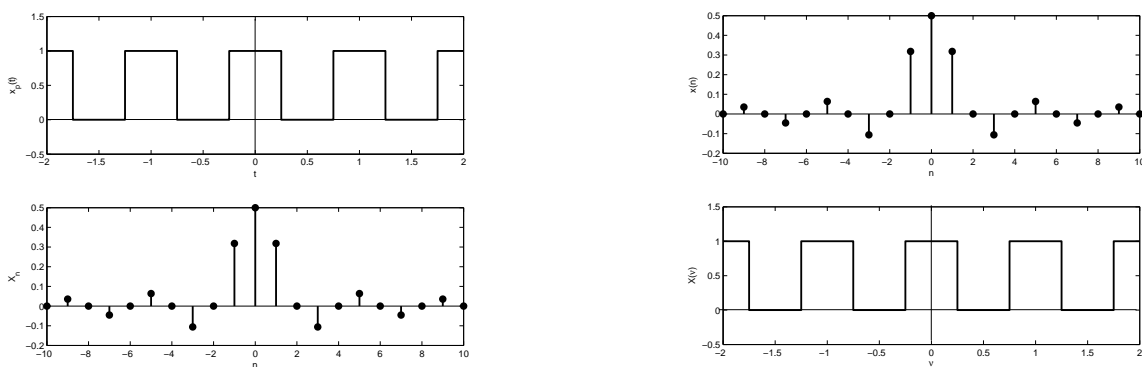


Figura 17: Proprietà di dualità.

## 2.4 Trasformata di Fourier generalizzata

Come nel caso continuo è possibile estendere la trasformata di Fourier anche ai segnali che non sono né sommabili né a quadrato sommabile come i segnali di potenza. Di seguito considereremo il calcolo della trasformata di Fourier per il segnale costante, il gradino e i segnali periodici. Inoltre estenderemo al caso discreto le importanti proprietà sulla replicazione e il campionamento.

### 2.4.1 Segnale costante

Cominciamo a osservare che abbiamo già determinato la trasformata di un impulso unitario (65):

$$x(n) = \delta(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu) = 1$$

Per calcolare la trasformata di Fourier della costante, usiamo la proprietà di dualità. Pertanto consideriamo il segnale periodico  $x_p(t) = \text{rep}_1[\delta(t)]$  che ha coefficienti di Fourier  $X_n = 1$ , allora la trasformata di Fourier di  $y(n) = x(-n) = X_{-n} = 1$  è  $x_p(\nu)$ :

$$y(n) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = \text{rep}_1[\delta(\nu)] = \tilde{\delta}(\nu) \quad (92)$$

### 2.4.2 Gradino e signum

Per il calcolo della trasformata di Fourier del gradino, procediamo esprimendo  $u(n)$  attraverso il segnale  $\text{sign}(n)$ :

$$u(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(n)$$

per cui:

$$\mathcal{F}[u(n)] = \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\nu) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\text{sign}(n)]$$

A questo punto è necessario calcolare la trasformata di Fourier di  $x(n) = \text{sign}(n)$ . A tal fine basta riconoscere che risulta:

$$\text{sign}(n) - \text{sign}(n-1) = 2\delta(n) \quad (93)$$

Trasformando ambo i membri della (93), si trova:

$$\mathcal{F}[\text{sign}(n)](1 - e^{-j2\pi\nu}) = 2$$

da cui

$$\mathcal{F}[\text{sign}(n)] = \frac{2}{1 - e^{-j2\pi\nu}} \quad (94)$$

In conclusione:

$$u(n) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\nu) + \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\nu}} \quad (95)$$

### 2.4.3 Proprietà della somma corrente

I risultati ottenuti nel paragrafo precedente permettono di estendere la proprietà (78) anche ai segnali di potenza, infatti risulta:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * u(n) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X(\nu)\mathcal{F}[u(n)]$$

per cui

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\nu}} X(\nu) + \frac{1}{2} X(0)\tilde{\delta}(\nu) \quad (96)$$

### 2.4.4 Segnali periodici

In questa sezione vogliamo estendere il calcolo della trasformata di Fourier anche ai segnali periodici. Cominciamo a considerare un fasore alla frequenza  $\nu_0$ :  $x(n) = e^{j2\pi\nu_0 n}$ , applicando la proprietà (75) e tenendo presente che vale la (92), risulta:

$$x(n) = e^{j2\pi\nu_0 n} \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu) = \tilde{\delta}(\nu - \nu_0) \quad (97)$$

In effetti otteniamo lo stesso risultato del caso continuo, eccetto il fatto che la trasformata adesso è periodica. L'estensione ai segnali seno e coseno risulta semplice, applicando la formula di Eulero:

$$x(n) = \cos(2\pi\nu_0 n) = \frac{e^{j2\pi\nu_0 n} + e^{-j2\pi\nu_0 n}}{2} \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu) = \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\nu + \nu_0) \quad (98)$$

In figura 18 si mostra il grafico di  $X(\nu)$ .

Per quanto riguarda, invece, il seno:

$$x(n) = \sin(2\pi\nu_0 n) = \frac{e^{j2\pi\nu_0 n} - e^{-j2\pi\nu_0 n}}{2j} \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu) = \frac{1}{2j}\tilde{\delta}(\nu - \nu_0) - \frac{1}{2j}\tilde{\delta}(\nu + \nu_0) \quad (99)$$

Infine, per un segnale periodico di periodo  $N_0$ :

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{j2\pi kn/N_0} \quad \longleftrightarrow \quad X_p(\nu) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k \tilde{\delta}(\nu - k/N_0) \quad (100)$$

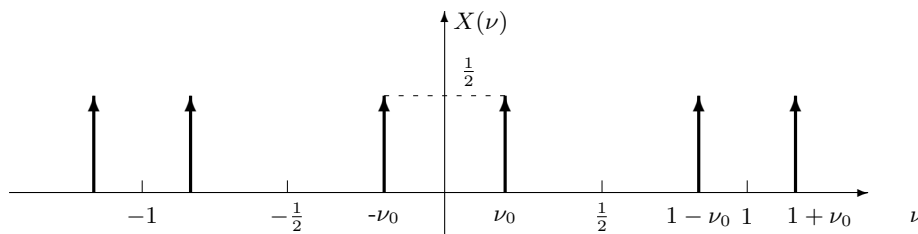


Figura 18: Trasformata di Fourier di  $x(n) = \cos(2\pi\nu_0 n)$

### 2.4.5 Replicazione e campionamento

Anche per segnali discreti valgono le formule di Poisson: ad un campionamento nel tempo corrisponde ad una replicazione in frequenza e viceversa. In particolare la proprietà di replicazione in frequenza dice che:

$$x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - kN_0) \quad \longleftrightarrow \quad X_p(\nu) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\frac{k}{N_0}\right) \tilde{\delta}\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right) \quad (101)$$

mentre quella del campionamento in frequenza:

$$x_\delta(n) = x(n) \tilde{\delta}_{N_0}(n) \quad \longleftrightarrow \quad X_\delta(\nu) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X\left(\nu - \frac{k}{N_0}\right) \quad (102)$$

La prima proprietà può essere utile per calcolare i coefficienti di Fourier di un segnale periodico, come mostra l'esempio di seguito.

**Esempio.** Consideriamo nuovamente il segnale periodico:

$$x_p(n) = \text{rep}_{N_0}[x(n)] = \text{rep}_9[\mathcal{R}_5(n+2)]$$

di cui abbiamo già calcolato i coefficienti della serie di Fourier nell'esempio 2.4 del capitolo 3. Il generatore del segnale è:

$$x(n) = \mathcal{R}_5(n+2)$$

usando la (64) e la (74) la trasformata di  $x(n)$  è:

$$X(\nu) = e^{-j\pi n/4} \frac{\sin(5\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} e^{j\pi n/4}$$

A questo punto i coefficienti di Fourier si calcolano campionando  $X(\nu)$ :

$$X_k = \frac{1}{N_0} X\left(\frac{k}{N_0}\right) = \frac{1}{9} X\left(\frac{k}{9}\right) = \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi k/9)}{\sin(\pi k/9)}$$