

## Forme bilineari simmetriche.

Nel seguito  $V_n$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  sul campo reale.

Sia  $g : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare simmetrica. Fissata una base

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la forma  $g$  determina una matrice  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = g(e_i, e_j)$  che risulta simmetrica essendo  $g$  simmetrica.

Se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono due vettori ed  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ed  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sono le loro coordinate rispetto alla base  $B$  si ha  $\underline{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ,  $\underline{w} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$  e quindi, tenendo conto che  $g$  è bilineare, si ha

$$(*) \quad g(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

Se  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  è un'altra base e  $P$  è la matrice di passaggio da  $B$  a  $B'$  cioè

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) [P] = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$$

allora la matrice  $A' = (a'_{ij})$  con  $a'_{ij} = g(e'_i, e'_j)$  costruita attraverso l'uso di  $B'$  è legata ad  $A$  dalla seguente relazione

$$A' = P^t A P$$

La matrice  $A'$  è quindi **congruente** ad  $A$ .

Ricordiamo che una matrice simmetrica ha  **$n$  autovalori reali** e due matrici simmetriche congruenti hanno **lo stesso rango ma non hanno gli stessi autovalori**.

Nell'espressione

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

figurano  $n^2$  addendi che diventerebbero  $n$  se la matrice  $A$  fosse diagonale.

Si pone quindi il seguente

**Problema** : è possibile trovare una base rispetto alla quale la matrice è diagonale ?

Poiché  $g$  è simmetrica la risposta sarà affermativa. Vediamo.

**Passo 1.**

Sia  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  una base e sia  $A$  la matrice ad essa corrispondente. Essendo  $g$  simmetrica la matrice  $A$  è simmetrica e definisce una funzione lineare di  $\mathbb{R}^n$  in sé ponendo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Tale funzione lineare  $A$  è simmetrica essendo  $A$  simmetrica e quindi ammette una base ortonormale di autovettori. Siano  $\underline{p}^1, \underline{p}^2, \dots, \underline{p}^n$  tali autovettori e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  i rispettivi autovalori. Sia  $\mathbf{P}$  la matrice avente per colonne gli autovettori  $\underline{p}^1, \underline{p}^2, \dots, \underline{p}^n$ . Tale matrice avendo per colonne una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  è **ortogonale** e quindi è  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^t$ . Sia  $D$  la matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Le relazioni

$$A \underline{p}^1 = \lambda_1 \underline{p}^1, \quad A \underline{p}^2 = \lambda_2 \underline{p}^2, \dots, \dots, \quad A \underline{p}^n = \lambda_n \underline{p}^n$$

sono equivalenti alla seguente eguaglianza tra matrici :

$$AP = PD$$

dalla quale segue, tenendo conto che  $P$  è ortogonale, che

$$(**) \quad P^{-1}AP = P_t AP = D.$$

Quindi la relazione

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$$

fornisce una nuova base  $B'$  e la matrice corrispondente a tale base, stante (\*\*), è la matrice  $D$ . Usando la base  $B'$  ora costruita l'espressione

$$(*) \quad g(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

diventa, se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  sono gli autovalori non nulli,

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_t x_t y_t \quad t \leq n$$

e quindi molto più semplice.

### **Passo 2.**

Nel costruire la matrice  $P$  che ci ha permesso di pervenire alla base  $B'$  da noi desiderata, possiamo disporre nelle prime  $s$  colonne gli autovettori di autovalore  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  positivo subito dopo quelli che hanno autovalore  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_t$  negativo e per ultime quelle con autovalore zero. In tal modo nella matrice  $D$  i primi  $s$  posti della diagonale sono occupati da numeri positivi, i successivi  $t-s$  da numeri negativi e gli ultimi  $n-t$  dal numero zero. La seguente matrice diagonale  $J$



Tale espressione finale mostreremo ora che è indipendente dalla base  $B$  inizialmente scelta . Vediamo.

Sia quindi  $B_0 = ( \underline{w}_1, \underline{w}_2 , .., \underline{w}_n )$  una nuova base e sia  $A_0$  la matrice simmetrica ad essa corrispondente. Ripetendo i passi 1 e 2 fatti in precedenza si costruisce una matrice  $P_0$  usando la quale cambieremo la base  $B_0$  in una nuova base  $B'_0$  cui corrisponde la matrice  $D_0$  avente sulla diagonale gli autovalori della funzione simmetrica  $A_0$ . Ora essendo le matrici simmetriche  $A$  ed  $A_0$  congruenti esse hanno lo stesso rango ma non gli stessi autovalori.

Le matrici  $D$  e  $D_0$  sono congruenti in quanto rappresentano  $g$  in due basi diverse e quindi hanno lo stesso rango. Ne segue che il numero di elementi non nulli di  $D$  coincide col numero di elementi non nulli di  $D_0$ . In conclusione anche  $A_0$  ha **t autovalori non nulli** e se indichiamo con  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  tali autovalori l'espressione di  $g$  rispetto alla base  $B'_0$  sarà :

$$g( \underline{v} , \underline{w} ) = \eta_1 x_1 y_1 + \eta_2 x_2 y_2 + \dots + \eta_t x_t y_t \quad t \leq n$$

Ancora una volta disponendo le colonne di  $P_0$  in modo opportuno possiamo fare apparire nella matrice  $D_0$  ai primi  $r$  posti gli autovalori positivi , nei successivi  $t-r$  posti gli autovalori negativi e poi tutti zero. Usando la matrice



$$(2) \quad g(\underline{v}, \underline{w}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_r y_r - x_{r+1} y_{r+1} - \dots - x_t y_t \quad t \leq n.$$

Supponiamo per assurdo che sia  $s > r$ . Sia  $H = [e_1, e_2, \dots, e_s]$  il sottospazio generato dai primi  $s$  vettori di  $T$  e sia  $K = [e'_{r+1}, e'_{r+2}, \dots, e'_n]$  il sottospazio generato dagli ultimi  $n-r$  vettori di  $T'$ . Si ha  $\dim H = s$  e  $\dim K = n-r$ . Calcolando con la formula di Grassmann la dimensione dello spazio intersezione si ha :

$$\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H + K) \geq s + n-r - n = s - r > 0.$$

Lo spazio  $H \cap K$  avendo dimensione positiva non è ridotto al solo vettore nullo.

Esiste quindi un vettore  $\underline{v}$  non nullo comune ad  $H$  e  $K$ . Poiché  $\underline{v} \in H$  esso è

combinazione dei soli vettori  $e_1, e_2, \dots, e_s$  e quindi le sue coordinate rispetto a  $T$

$x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$  sono tutte nulle, mentre almeno una delle prime  $s$  coordinate è

diversa da zero essendo  $\underline{v}$  non nullo. Analogamente poichè  $\underline{v} \in K$  esso è

combinazione dei soli vettori  $e'_{r+1}, e'_{r+2}, \dots, e'_n$  e quindi ha le coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_r$

rispetto alla base  $T'$  tutte nulle ed almeno una delle rimanenti non nulla. Quindi si ha

$$g(\underline{v}, \underline{v}) = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_s x_s = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_s^2 > 0 \quad \text{usando la base } T$$

e

$$g(\underline{v}, \underline{v}) = -x_{r+1} x_{r+1} - x_{r+2} x_{r+2} - \dots - x_t x_t = -(X_{r+1}^2 + X_{r+2}^2 + \dots + X_t^2) < 0 \quad \text{usando la}$$

base  $T'$ .

Abbiamo così trovato un assurdo.

In modo analogo si prova che non può essere  $s < r$  e quindi è  $s = r$ .

Il numero di +1 e di -1 che figurano nell'espressione

$$(1) \quad g(\underline{v}, \underline{w}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \dots - x_t y_t \quad t \leq n$$

è quindi **costante** e viene chiamata la **segnatura della forma**.

Quando ad ogni vettore  $v$  di  $V_n$  si associa il numero reale  $q(v) = g(v, v)$  si dice che stiamo considerando la **forma quadratica** associata a  $g$ .

Per tutto ciò che precede si può trovare una base  $B$  opportuna in modo che il numero  $g(v, v)$  si ottenga attraverso il valore che assume il polinomio

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_t^2 \quad t \leq n$$

sulle coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_n$  di  $v$  rispetto alla base  $B$ . Il polinomio che permette di calcolare la funzione  $q$  è quindi di secondo grado e questo giustifica il nome di forma quadratica dato alla funzione  $q$ .

