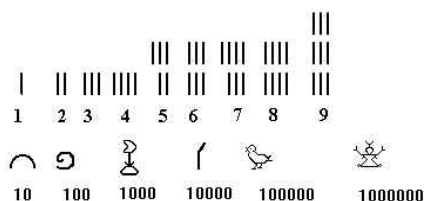


SULLA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI NUMERI

PREMESSA: l'origine delle cifre 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 0

I numeri naturali sono stati i primi numeri maneggiati dagli uomini e sono stati utilizzati per contare gli oggetti; successivamente ad essi si è aggiunto lo zero, 0, per indicare l'assenza di oggetti. Il significato e l'uso di questi numeri risulta chiaro se guardiamo ai simboli che gli antichi egizi usavano per indicare almeno i primi numeri naturali, che consistevano in allineamenti di asticelle (ogni asticella per un oggetto):



Anche presso i Romani l'allineamento di asticelle indicava i primi numeri naturali; furono poi introdotti caratteri che sostituivano gruppi di asticelle come il carattere V, che ricorda la forma di una mano aperta e quindi le cinque dita e sostituisce un gruppo di cinque asticelle, o il carattere X per un gruppo di dieci asticelle, il carattere L per 50 e così via:

1	I	30	XXX
2	II	40	XL
3	III	50	L
4	IIII (IV)	60	LX
5	V	70	LXX
6	VI	80	LXXX
7	VII	90	XC
8	VIII	100	C
9	IX (VIII)	200	CC
10	X	300	CCC
11	XI	400	CD
12	XII	500	D (ID)
13	XIII	600	DC
14	XIV	700	DCC
15	XV	800	DCCC
16	XVI	900	CM
17	XVII	1.000	M (CID)
18	XVIII	2.000	MM, C I D C I D, II
19	XIX	10.000	CC I D D, X̄
20	XX	100.000	CCC I D D D, C̄
		1.000.000	CCCC I D D D D, [X̄]

I simboli, cifre che oggi usiamo per indicare i numeri naturali e lo zero sono “1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 0” sono detti rispettivamente *cifre arabe*, e il *modo* (sistema posizionale) in cui allineano tali cifre per indicare i numeri interi maggiori di 9 (10, 325, 105567, ...) è detto *algoritmo arabo*. Fu, infatti, attraverso gli arabi che, durante il medioevo, gli europei seppero delle cifre e dell'algoritmo suindicati, che erano in realtà già in uso presso degli indiani. In particolare fu un mercante pisano, Leonardo Fibonacci, a indagare sui procedimenti aritmetici che matematici musulmani stavano diffondendo nelle varie regioni del mondo islamico e a far conoscere la numerazione posizionale in Europa attraverso il suo *Liber abbaci*, pubblicato nel 1202.

Il simbolo 0 veniva chiamato dagli arabi **sifr** (صفر) che significa "**vuoto**", ma nelle traduzioni latine veniva indicato con zephirum (per semplice assonanza), cioè zefiro (figura della mitologia greca, personificazione del vento di ponente). Anche il termine cifra discende da questa stessa parola sifr .

L'origine delle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tuttavia risale più lontano, ai mercanti fenici che li usavano per contare e per gestire la loro attività commerciale, mentre lo 0 è attribuibile direttamente agli indiani.

Ma perché mai **1** corrisponde appunto a "**uno**", **2** a "**due**", e **3** a "**tre**"? in altre parole come questi simboli si collegano all' operazione del contare?

La risposta è tutta negli angoli!

Riportiamo di seguito le cifre nella loro forma primitiva



e contiamo gli angoli: il numero indicato dalla cifra è esattamente il numero degli angoli che essa disegna. La cifra che indica lo zero non ha angoli:



1. RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI NUMERI RAZIONALI

Nell'indicare i numeri razionali noi usiamo una **rappresentazione** che è detta **decimale** o in **base dieci** e una notazione che è detta **notazione posizionale** in quanto:

- sono utilizzati **dieci** simboli o **cifre**: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**; con tali cifre si indicano i primi dieci numeri di \mathbf{N}_0 , e ogni altro numero razionale **q** è indicato attraverso un **allineamento di alcune di tali cifre**, che è preceduto dal segno **-** se **q < 0**, ed interrotto da una virgola o punto se **q** non è intero.

-l' allineamento indica il **numero come somma di multipli di potenze di $10^{(*)}$** : la **posizione della cifra nell'allineamento** indica di quale potenza di 10 si tratta e (la cifra stessa indica) quante volte tale potenza è contata.

Analizziamo le due tipologie di rappresentazione che corrispondono rispettivamente a un numero intero e ad un numero razionale non intero

• Rappresentazione decimale di numero intero

Un numero **intero positivo** è esprimibile come **somma di multipli di potenze di 10 con esponente intero non negativo**; esso è allora indicato con **un allineamento semplice di cifre**: la cifra che occupa il posto **n**-esimo (a partire da destra nell'allineamento) indica il numero intero di potenze 10^{n-1} contenuto nel numero.

$$253 = 200 + 50 + 3 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$235 = 200 + 30 + 5 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$1042 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

$$1430 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$$

Nota. Dagli esempi si legge chiaramente che il significato di una cifra nell'allineamento indicante il numero dipende dalla **posizione** che la cifra occupa. Il significato della cifra 5 nell'allineamento **253** è **diverso** da quello essa che ha nell'allineamento **235**, perché diversa è la **posizione occupata**: nel primo allineamento 5 è al secondo posto (a partire da destra) e indica che la potenza 10^1 è contenuta cinque volte nel numero, mentre nel secondo allineamento è al primo posto (a partire da destra) e indica che ci sono cinque unità (cinque 10^0) non inglobate nelle potenze 10^1 e 10^2 . La notazione da noi usata è allora una **notazione posizionale**.

Un numero **intero negativo** è l'opposto di una somma di multipli di potenze di 10 con esponente non negativo; esso viene indicato con **l'allineamento di cifre indicante il suo valore assoluto preceduto dal segno -**:

$$-253 = -200 - 50 - 3 = -2 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^1 - 3 \cdot 10^0.$$

• Rappresentazione decimale di un numero razionale non intero.

Un numero razionale non intero contiene delle frazioni. Si conviene di esprimere tali frazioni in decimi, centesimi etc. e cioè attraverso potenze negative di 10. Vediamo innanzitutto con quali allineamenti si indicano le potenze negative di 10:

$$10^{-1} = 1/10 \text{ si indica con } 0.1,$$

$$10^{-2} = 1/100 \text{ si indica con } 0.01,$$

$$10^{-3} = 1/1000 \text{ si indica con } 0.001$$

$$10^{-4} = 1/10000 \text{ si indica con } 0.0001 \text{ etc..}$$

Allora:

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75 \cdot \frac{1}{100} = 75 \cdot 0,01 \text{ si indica con } 0,75; \text{ l'allineamento } 0.75 \text{ si ottiene anche}$$

operando , con le regole note, la divisione 3 : 4.

(*) Ricordiamo che se $a \neq 0$ allora $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$

Come ottenere la rappresentazione decimale del numero razionale $q = m/n$?

La rappresentazione decimale si ottiene operando la divisione di m per n . In tale rappresentazione le cifre che indicano multipli di potenze di base **10** con esponente non negativo sono separate mediante un punto o una virgola dalle cifre indicanti multipli di potenze di base **10** con esponente negativo:

$$2,53 = 2 + (5/10) + (3/100) = 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2},$$

$$0,103 = 0 + (1/10) + (0/100) + (3/1000) = 1 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3},$$

$$-2,53 = -2 - (5/10) - (3/100) = -2 \cdot 10^1 - 5 \cdot 10^{-1} - 3 \cdot 10^{-2}.$$

- **Rappresentazione decimale illimitata periodica di un numero razionale**

Per i numeri razionali non interi sono individuati due tipi di rappresentazione decimale

- **a) rappresentazione decimale finita o limitata:** $9/100 = 0,09$ $9/2 = 4,5$ $9/5 = 1,8$

Hanno rappresentazione decimale finita tutti i razionali rappresentabili con frazioni decimali, cioè con frazioni il cui denominatore è una potenza di 10, come, a esempio, $9/100$ e $9/2 = 45/10 = 4,5$;

- **b) rappresentazione decimale illimitata periodica**, in cui una cifra o un gruppo di cifre (detto periodo), si ripete illimitatamente dopo la virgola

Essa si distingue in rappresentazione decimale illimitata periodica **senza antiperiodo** o **con antiperiodo**.

$$7/3 = 2,33333\dots = 2,\overline{3} \quad (\overline{3} \text{ periodo}) \quad 1/7 = 0,142857142857\dots = 0,\overline{142857} \quad (\overline{142857} \text{ periodo})$$

- **rappresentazione decimale illimitata periodica con periodo**

$$7/6 = 1,16666\dots = 1,1\overline{6} \quad (1 \text{ antiperiodo}, \overline{6} \text{ periodo});$$

Convenendo di indicare come periodo lo 0 nel caso di una rappresentazione decimale finita le due rappresentazione si unificano:

$$9 = 9,0000\dots = 9,\overline{0} \quad 9/2 = 4,5000\dots = 4,5\overline{0}.$$

Tale convenzione si può estendere anche ai numeri interi ponendo $m = m, \overline{0}$, ad esempio: $3 = 3, \overline{0}$

Si dice allora che

“ogni numero razionale ha una rappresentazione decimale illimitata periodica”.

Nota. L'operazione di divisione di m per n non da mai periodo 9, tuttavia si conviene che un allineamento di cifre tali che dopo la virgola compaia 9 come periodo è coincidente con il numero che è rappresentato dall'allineamento che si ottiene incrementando di 1 la cifra immediatamente precedente il periodo e ponendo il periodo uguale a 0.

$$0,\overline{9} = 1 \quad 1,\overline{9} = 2 \quad 4,2\overline{9} = 4,3$$

- Come si risale dalla rappresentazione decimale di $q \in \mathbb{Q}$ a quella di q come frazione di interi

Esempio:

$$q = 1,166666\dots$$

↓

$10q = 11,666666\dots$ in questo nuovo numero la parte intera è costituita con le cifre della parte intera di q e dalle cifre dell'antiperiodo

↓

$100q = 116,666666\dots$ in questo nuovo numero la parte intera è costituita con le cifre della parte intera di q , dalle cifre dell'antiperiodo e da quelle del periodo

$$100q - 10q = 116,666666 - 11,666666$$

$$90q = 116 - 11$$

$$\boxed{q = \frac{116 - 11}{90}} \longrightarrow q = \frac{116 - 11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{5 \cdot 21}{5 \cdot 18} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{7}{6}$$

Il numero razionale non negativo rappresentato da un allineamento decimale periodico è il numero ottenuto dato dalla cosiddetta frazione generatrice: il numeratore m di tale frazione si ottiene allineando in ordine e senza utilizzare la virgola le cifre della parte intera, quelle dell'antiperiodo e del periodo e sottraendo il numero ottenuto allineando le cifre della parte intera e quelle dell'antiperiodo; il denominatore n si ottiene allineando tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

$$1,1\overline{6} = \frac{116 - 11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$$

Un allineamento decimale in cui il periodo è 9 individua attraverso la frazione generatrice il numero la cui rappresentazione decimale si ottiene dal precedente allineamento eliminando il periodo 9 e aumentando di 1 la cifra che immediatamente precede il periodo (e quindi una rappresentazione decimale finita perché con periodo 0)

$$2.\overline{9} = (29 - 2)/9 = 27/9 = 3$$

$$1,1\overline{9} = \frac{119 - 11}{90} = \frac{108}{90} = \frac{12}{10} = 1,2$$

2. SULLA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE APPROSSIMATA DI UN NUMERO IRRAZIONALE

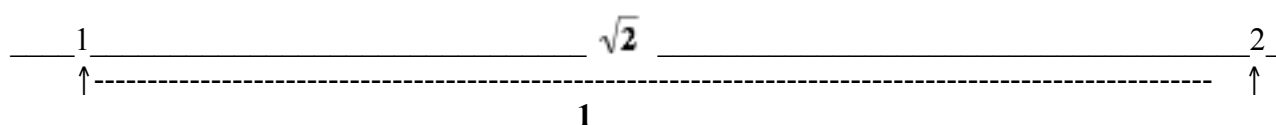
E' possibile individuare una rappresentazione decimale per un numero irrazionale?

Posto $Q^+ = \{q \in Q: q > 0\}$, consideriamo il numero irrazionale $\sqrt{2}$ che, per costruzione, è l'unico numero reale che separa i seguenti insiemi costituiti da numeri razionali

$$\mathcal{A}' = \{q \in Q^+: q^2 < 2\} \quad \mathcal{B} = \{q \in Q^+: q^2 > 2\}.$$

Sulla retta i numeri di \mathcal{A}' precedono $\sqrt{2}$, che a sua volta precede tutti i numeri di \mathcal{B} . Per tentare di giungere ad una rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$, determiniamo il più grande intero contenuto in $\sqrt{2}$. Poiché è $1^2=1 < 2 < 4=2^2$, ne deduciamo che $1 \in \mathcal{A}'$ e $2 \in \mathcal{B}$, cioè

$$\boxed{1 < \sqrt{2} < 2}.$$



$\sqrt{2}$ è allora $1 + \text{qualcosa}$

Individuiamo ora tra numeri razionali con rappresentazione del tipo $1, a_1 = 1 + a_1/10$ quelli che sono più vicini al nostro numero irrazionale. Risulta:

$$(1,1)^2 = 1,21 < 2$$

$$(1,2)^2 = 1,44 < 2$$

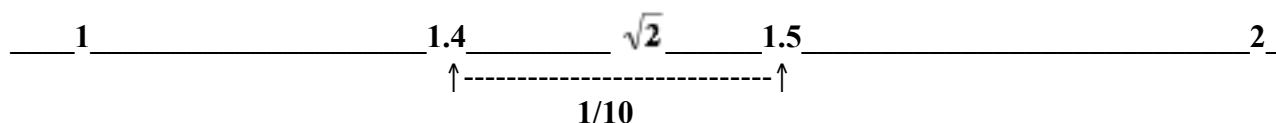
$$(1,3)^2 = 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 \quad \leftarrow$$

$$(1,5)^2 = 2,25 > 2. \quad \leftarrow$$

Allora $1,4 \in \mathcal{A}$ e $1,5 \in \mathcal{B}$ e

$$\boxed{1,4 < \sqrt{2} < 1,5}$$

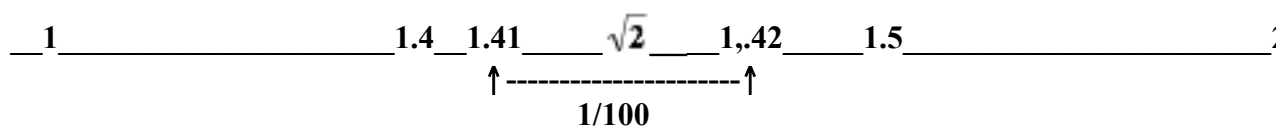


$\sqrt{2}$ è allora $1,4 + \text{qualcosa}$

Nella nostra manovra di avvicinamento a $\sqrt{2}$ consideriamo tra numeri razionali con rappresentazione del tipo $1, a_1 a_2 = 1 + a_1/10 + a_2/100$ quelli più vicini a $\sqrt{2}$.

Poiché $(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164$, risulta

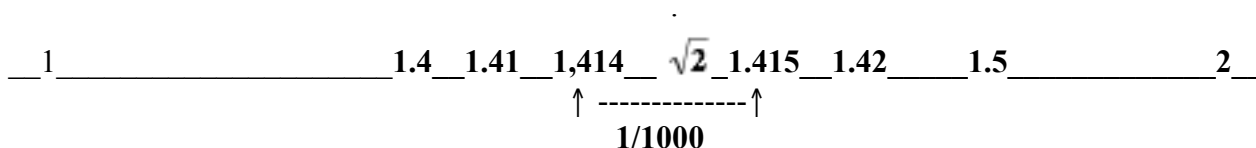
$$\boxed{1,41 < \sqrt{2} < 1,42}.$$



$\sqrt{2}$ è allora 1,41+ qualcosa

Così procedendo si ha ancora

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$



e ancora

$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$

$$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$$

.....

Tale procedimento di avvicinamento non ha mai fine e tende a produrre un allineamento decimale illimitato aperiodico. Si usa allora dire che $\sqrt{2}$ ha una rappresentazione decimale illimitata aperiodica:

$$\sqrt{2} = 1.414213.....$$

Ma quale è questa rappresentazione? In realtà non riusciamo descrivere $\sqrt{2}$ attraverso una rappresentazione decimale compiuta, possiamo solo indicare dei numeri razionali, quali **1**, **1.4**, **1.41** etc. che approssimano $\sqrt{2}$ e danno quindi una idea della sua grandezza. L'approssimazione è tanto migliore quante più cifre ci sono dopo la virgola e l'approssimazione è a meno di 10^{-n} (cioè il numero approssimante dista da $\sqrt{2}$ meno di 10^{-n}) se dopo la virgola ci sono n cifre decimali. Scriveremo allora più correttamente

$$\sqrt{2} \approx 1.414213$$

per dire che il **numero razionale 1.414213 è una approssimazione** (per difetto) di $\sqrt{2}$ a meno di 10^{-6} . Analogo discorso va fatto per gli altri numeri irrazionali.

Nota. I numeri interi **1** e **2** sono gli interi più vicini a $\sqrt{2}$, in particolare 1 è il più grande intero contenuto in $\sqrt{2}$ (1 è la parte intera di $\sqrt{2}$). La differenza 2-1 è 1, pertanto la distanza di tali interi da $\sqrt{2}$ è minore di 1. Diremo allora che **1** e **2** sono interi che approssimano $\sqrt{2}$ a meno dell'unità. Più esattamente diremo che 1 approssima $\sqrt{2}$ per difetto mentre 2 approssima $\sqrt{2}$ per eccesso.

I numeri **1.4** e **1.5**, sono, tra i numeri razionali con una sola cifra dopo la virgola, quelli più vicini $\sqrt{2}$ e la loro distanza da $\sqrt{2}$ è minore di $1.5 - 1.4 = 0.1 = 1/10$. Diremo allora che **1.4** e **1.5** approssimano $\sqrt{2}$ a meno di $1/10$ o di 10^{-1} .

I numeri razionali **1.41** e **1.42**, approssimano $\sqrt{2}$ a meno di $1/100 = 1.42 - 1.41$.

3. PARTE INTERA DI UN NUMERO REALE

Parte intera di un numero reale x è il più grande numero intero minore o uguale a x : esso viene indicato con $[x]$.

$$[x] = \max \{ z \in \mathbb{Z} : z \leq x \}$$

Ovviamente:

$$[x] = x \text{ se e solo se } x \text{ è intero,}$$

Se $x \geq 0$, $[x]$ è il numero intero z indicato dalle cifre che, nella rappresentazione decimale, precedono la virgola

Se $x < 0$, $[x]$ è il numero intero negativo $z-1$, dove z è l'intero indicato dal segno e dalle cifre che, nella rappresentazione decimale, precedono la virgola.

Esempi:

- $x = 2$ è un intero quindi $[2] = 2$
- $x = 2,35$ è compreso tra gli interi 2 e 3



allora: $[2,35] = 2$

Notiamo che 2 è l'unica cifra che nella rappresentazione decimale di x precede la virgola

- $x = -2,35$ è compreso tra gli interi -3 e -2



allora: $[-2,35] = -3$

Notiamo che -3 si ottiene diminuendo di 1 il numero intero negativo indicato dalla cifra che nella rappresentazione decimale di x precede la virgola