Lezioni di Teoria delle Strutture

Elementi di Meccanica

Lezione 1a:

Il momento di una forza rispetto ad un polo
Il momento di una forza rispetto a un asse
La coppia
Unità di misura
Analisi dimensionale

Momento di una forza rispetto ad un polo

Si consideri la generica forza **F** applicata in Q, di vettore posizione $\mathbf{x}_Q$ rispetto al riferimento cartesiano Oxyz assunto, ed un punto A di vettore posizione $\mathbf{x}_A$

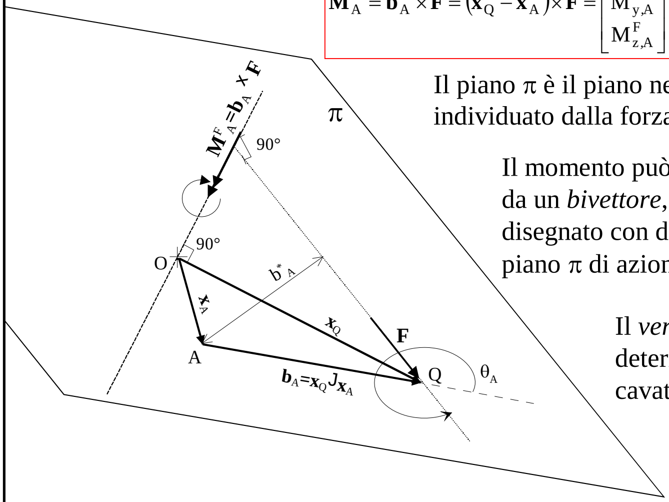
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_Q = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix}$$

si definisce *momento* $\mathbf{M}^F_A$ *della forza* **F** *rispetto al polo* A, il prodotto vettoriale[2]

$$\mathbf{M}^F_A = \mathbf{b}_A \times \mathbf{F} = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} M^F_{x,A} \\ M^F_{y,A} \\ M^F_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z(y_Q - y_A) - F_y(z_Q - z_A) \\ F_x(z_Q - z_A) - F_z(x_Q - x_A) \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix}$$

in cui $\mathbf{b}_A$ è il vettore congiungente i punti A e Q, ovvero $\mathbf{b}_A = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A)$, che prende il nome di *braccio vettore* della forza **F** rispetto al polo A.

$$\mathbf{M}_A^F = \mathbf{b}_A \times \mathbf{F} = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_{x,A}^F \\ M_{y,A}^F \\ M_{z,A}^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z(y_Q - y_A) - F_y(z_Q - z_A) \\ F_x(z_Q - z_A) - F_z(x_Q - x_A) \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix}$$



Il piano π è il piano nel quale agisce il momento, individuato dalla forza **F** e dal braccio vettore $\mathbf{b}_A$.

Il momento può essere anche individuato da un *bivettore*, convenzionalmente disegnato con due frecce, ortogonale al piano π di azione del momento.

Il *verso* del bivettore è determinato dalla “regola del cavatappi”

In base alla *regola del cavatappi* un osservatore con i piedi sull’ estremo del bivettore e la testa nell’ origine, affonda il cavatappi girandolo nel verso del momento.

$$\mathbf{M}_A^F = \mathbf{b}_A \times \mathbf{F} = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_{x,A}^F \\ M_{y,A}^F \\ M_{z,A}^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z(y_Q - y_A) - F_y(z_Q - z_A) \\ F_x(z_Q - z_A) - F_z(x_Q - x_A) \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix}$$

Il momento $\mathbf{M}^F{}_A$ ha modulo $M^F{}_A$

$$M_A^F = |\mathbf{b}_A \times \mathbf{F}| = F \cdot b_A \, sen\theta_A = \pm F \cdot b_A^*$$

Dove:

θ_A è l’angolo compreso tra le direzioni orientate di **F** e $\mathbf{b}_A$,

$b^*{}_A = b_A \, sen\theta_A$ rappresenta la distanza della retta di azione di **F** dal polo A, detta anche *braccio della forza rispetto al polo*;

il che si enuncia: *il modulo del momento di una forza rispetto ad un polo è dato dal modulo della forza per il braccio della forza rispetto al polo.*

*S*i assume il segno "+" se la forza ruota in senso antiorario rispetto al polo "A" e il segno "–" in caso contrario.

Sistema piano

Nel caso di sistema piano, con piano $\pi \equiv$ <xy> e sistema di riferimento Oxy, si ha

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_Q = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

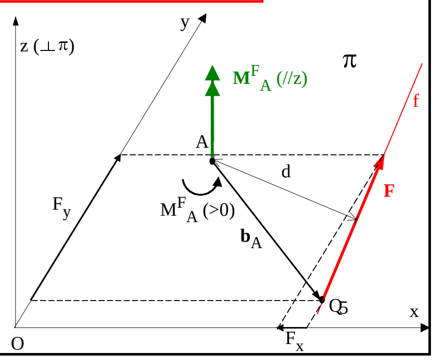
il *momento* $\mathbf{M}^F_A$ *della forza* F *rispetto al polo* A contenuto nel piano è fornito dal prodotto vettoriale

$$\boxed{\mathbf{M}^F_A = \mathbf{b}_A \times \mathbf{F} = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} M^F_{x,A} \\ M^F_{y,A} \\ M^F_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix}}$$

da cui si deduce che il vettore momento è diretto parallelamente all'asse z, e il valore scalare M^F_A di $\mathbf{M}^F_A$ è dato da

$$M^F_A = \pm|\mathbf{M}^F_A| = F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A)$$

$$\boxed{\mathbf{M}^F_A = \begin{bmatrix} M^F_{x,A} \\ M^F_{y,A} \\ M^F_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z(y_Q - y_A) - F_y(z_Q - z_A) \\ F_x(z_Q - z_A) - F_z(x_Q - x_A) \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix}}$$



Sistema piano

$$\boxed{\mathbf{M}^F_A = \mathbf{b}_A \times \mathbf{F} = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} M^F_{x,A} \\ M^F_{y,A} \\ M^F_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}_A \end{bmatrix}}$$

Si ha evidentemente anche che

$$M^F_A = \pm|\mathbf{M}^F_A| = \pm|\mathbf{b}_A \times \mathbf{F}| = \pm|b_A F \operatorname{sen}\theta|$$

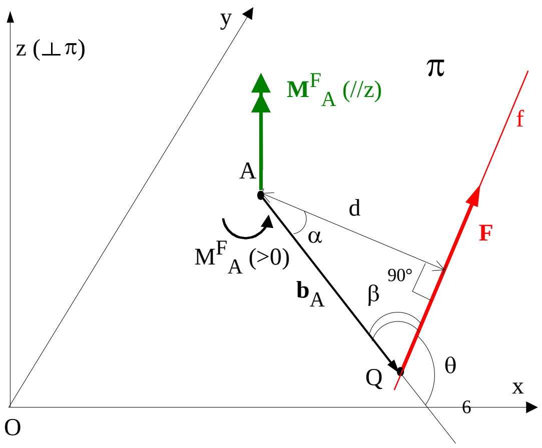
Essendo $\quad \beta = 180° - \theta \ ; \ \alpha = 90° - \beta$

si ha $\quad \operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\beta = -\cos\alpha$

e quindi, essendo
$|b_A \operatorname{sen}\theta| = |b_A \cos\alpha| = d$,
con "d" la distanza della retta di azione f di F da A si ha in definitiva

$$M^F_A = \pm|\mathbf{b}_A \times \mathbf{F}| = \pm|F(b_A \operatorname{sen}\theta)| = \pm Fd$$

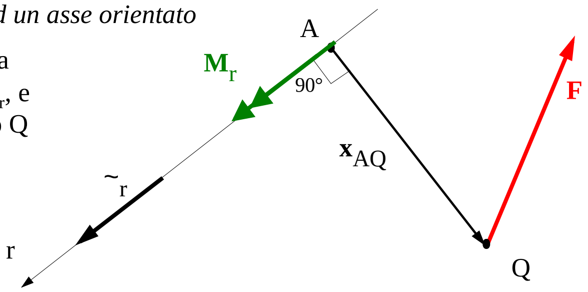
Il segno "+" si intende se il momento ruota nel verso (antiorario) che porta x su y, altrimenti vale il segno "–"



Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

Si consideri nello spazio una retta orientata <r>, il cui versore sia $\sim_r$, e una forza **F** applicata in un punto Q

Si consideri il punto A, piede della perpendicolare da Q su <r>, e sia $\mathbf{x}_{AQ}$ il vettore AQ orientato da A a Q.



Si definisce "momento di F rispetto all' asse <r>" il momento $\mathbf{M}_r$ rappresentato dal bivettore parallelo ad <r>

$\mathbf{M}_r = M_r \sim_r$

il cui fattore M_r è dato dal prodotto scalare triplo

$$M_r = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r$$

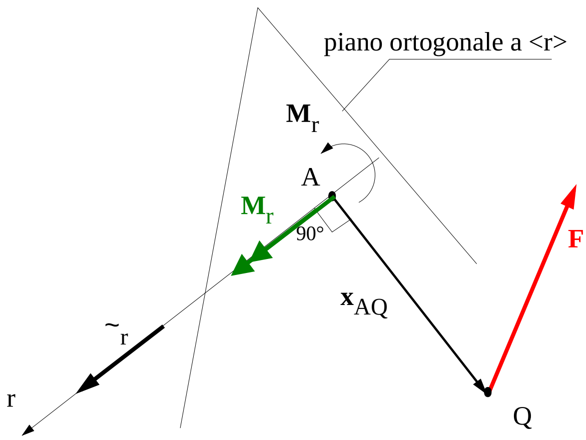
Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

Si definisce "momento di F rispetto all' asse <r>" il momento $\mathbf{M}_r$ rappresentato dal bivettore parallelo ad <r>

$\mathbf{M}_r = M_r \sim_r$

il cui fattore M_r è dato dal prodotto scalare triplo

$$M_r = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r$$



Il bivettore $\mathbf{M}_r$ rappresenta una coppia agente nel piano ortogonale alla retta <r>. Se M_r è positivo il bivettore è concorde al verso di <r> e l' osservatore disteso lungo <r> con la testa dalla parte del verso positivo di <r> vede la coppia agire in senso antiorario. Il contrario accade se M_r è negativo.

Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

Per il calcolo del prodotto scalare triplo si introduca un sistema di riferimento Qxyz, con:

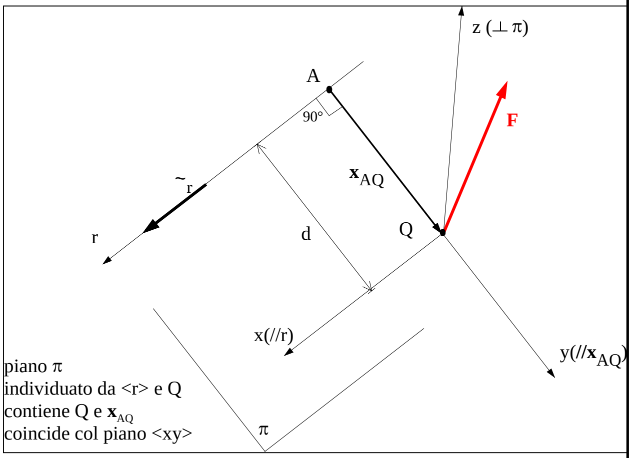
l' origine nel punto Q;

l' asse <x> parallelo ad <r>

l' asse <y> sul prolungamento di $\mathbf{x}_{AQ}$;

l' asse <z> ortogonale ad <xy> e orientato in modo che la terna sia levogira.

In tale riferimento le componenti dei vettori sono:



$$\boldsymbol{\alpha}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}_{AQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

ove "d" denota la lunghezza di $\mathbf{x}_{AQ}$, e cioè la *distanza* di Q dalla retta <r>.

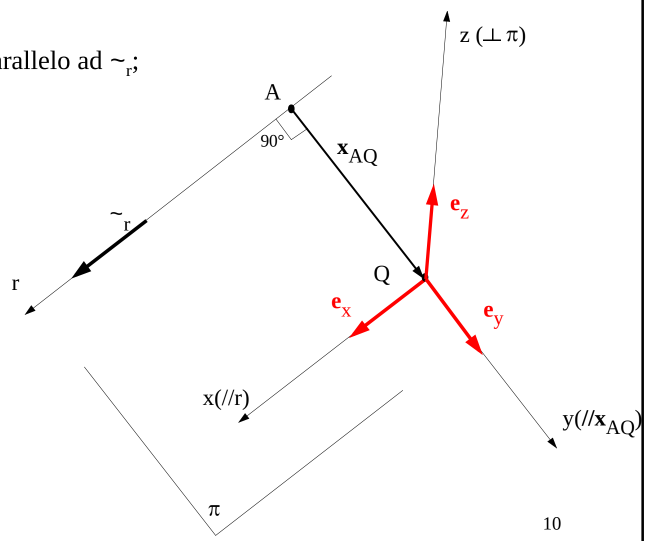
Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

Gli assi del riferimento sono identificati dai rispettivi versori:

$\mathbf{e}_x$: versore dell' asse <x> , parallelo ad $\tilde{}_r$;

$\mathbf{e}_y$: versore dell' asse <y>;

$\mathbf{e}_z$: versore dell' asse <z>.



Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

$$\boldsymbol{\alpha}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}_{AQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per il calcolo del prodotto scalare triplo si calcoli prima il vettore

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F}$$

Le componenti del prodotto vettoriale si deducono dal determinante simbolico

$$\mathbf{M}_A = \begin{pmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & d & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(F_z \mathbf{e}_x - F_x \mathbf{e}_z\right) d = \begin{pmatrix} F_z d \\ 0 \\ -F_x d \end{pmatrix}$$

e il fattore M_r si deduce completando il prodotto triplo

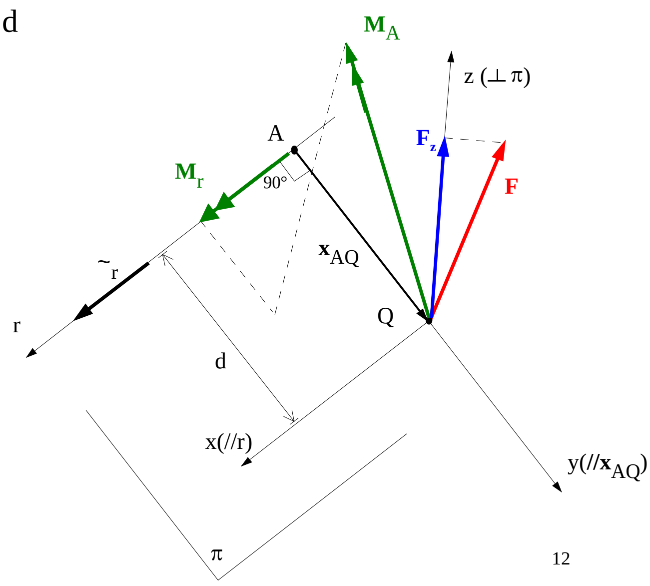
$$M_r = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{M}_A \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = \begin{pmatrix} F_z d \\ 0 \\ -F_x d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F_z d$$

Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

$$M_r = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = F_z d$$

$$\mathbf{M}_r = \left(F_z d\right) \boldsymbol{\alpha}_r$$

In altri termini, il momento di una forza rispetto ad un asse è dato dal prodotto della componente della forza ortogonale alla retta per la distanza "d" dall' asse medesimo, e rappresenta una coppia agente nel piano ortogonale all' asse.



Momento di una forza rispetto ad un asse orientato. Osservazione importante

$M_r = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = F_z d$

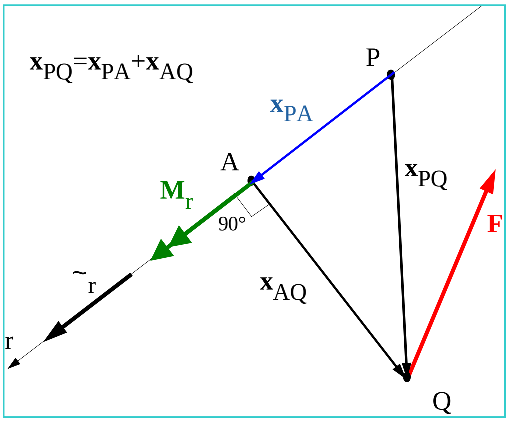
Se invece del punto A, piede della perpendicolare da Q ad r, si considera un qualsiasi altro punto P di r, si ha

$$\mathbf{x}_{PQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = (\mathbf{x}_{PA} + \mathbf{x}_{AQ}) \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r =$$

$$= \mathbf{x}_{PA} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r + \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r$$

Essendo $\mathbf{x}_{PA}$ parallelo ad $\sim_r$ si può porre $\mathbf{x}_{PA} = \lambda \sim_r$ e il primo prodotto triplo risulta nullo

$$\mathbf{x}_{PA} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = \lambda \boldsymbol{\alpha}_r \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = 0$$



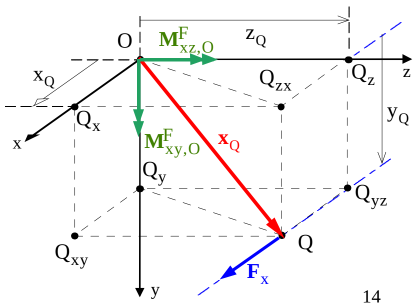
da cui $\boxed{\mathbf{x}_{PQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{x}_{AQ} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}_r = M_r \qquad \forall P \in r}$

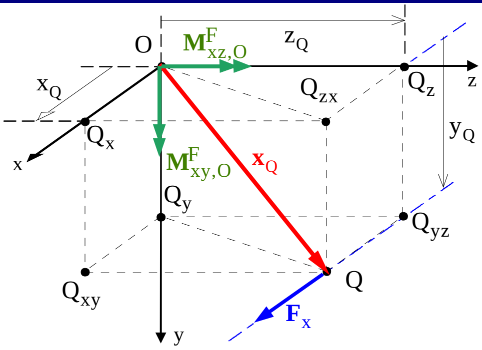
In altri termini, il momento rispetto all' asse r è indipendente dalla posizione del polo che si sceglie su r.

Momento di una forza rispetto agli assi coordinati con polo coincidente con l'origine del riferimento

Si consideri il caso in cui la forza è parallela ad uno degli assi coordinati e si scelga come polo l'origine del riferimento cartesiano prescelto Oxyz, ovvero A=O.
Con riferimento al caso in cui la forza è parallela all' asse <x>, la forza $\mathbf{F}_x$, che ha come unica componente non nulla F_x, è positiva in quanto diretta nel verso positivo dell' asse <x> e con punto di applicazione Q di vettore posizione $\mathbf{x}_Q$.

Il verso di rotazione positivo della terna di riferimento è quello che porta <x> su <y>, <y> su <z>, <z> su <x> e così via (x→y→z→x→….)
Il verso di rotazione negativo è quello opposto (x→z→y→x→….)



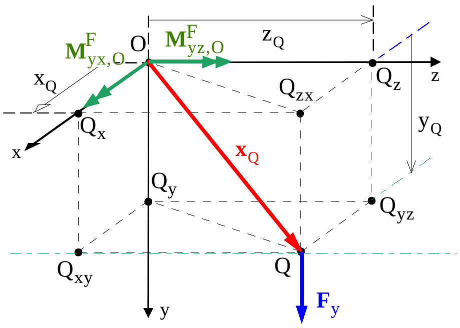


Il momento $M^F{}_{xy,O}$ è dello stesso segno del prodotto $F_x{\cdot}z_Q$ in quanto, se questo è positivo, porta l' asse <z> su <x> secondo il verso di rotazione positivo del riferimento.
Il momento $M^F{}_{xz,O}$ è di segno opposto al prodotto $F_x{\cdot}y_Q$ in quanto, se questo è positivo, porta l' asse <y> su <x> secondo il verso di rotazione negativo del riferimento. In definitiva, si ha

$$M^F_{xx,O} = 0 \ ; \ M^F_{xy,O} = F_x z_Q \ ; \ M^F_{xz,O} = -F_x y_Q$$

da cui si deduce che il vettore momento è diretto ortogonalmente all'asse x. 15

Analogamente nel caso in cui la forza è parallela all' asse <x>, la forza $\mathbf{F}_y$, che ha come unica componente non nulla F_y, è positiva in quanto diretta nel verso positivo dell' asse <y> e con punto di applicazione Q di vettore posizione $\mathbf{x}_Q$.

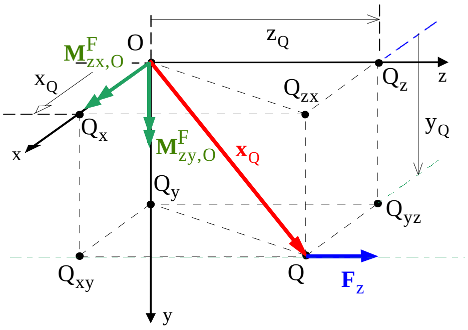


Il momento $M^F{}_{yz,O}$ è dello stesso segno del prodotto $F_y{\cdot}x_Q$ in quanto, se questo è positivo, porta l' asse <x> su <y> secondo il verso di rotazione positivo del riferimento.
Il momento $M^F{}_{yx,O}$ è di segno opposto al prodotto $F_y{\cdot}z_Q$ in quanto, se questo è positivo, porta l' asse <z> su <y> secondo il verso di rotazione negativo del riferimento. In definitiva, si ha

$$M^F_{yx,O} = -F_y z_Q \ ; \ M^F_{yy,O} = 0 \ ; \ M^F_{yz,O} = F_y x_Q$$

da cui si deduce che il vettore momento è diretto ortogonalmente all'asse y. 16

Infine nel caso in cui in cui la forza è parallela all' asse <z>, la forza $\mathbf{F}_z$, che ha come unica componente non nulla F_z, è positiva in quanto diretta nel verso positivo dell' asse <z> e con punto di applicazione Q di vettore posizione $\mathbf{x}_Q$.



Il momento $M^F_{zx,O}$ è dello stesso segno del prodotto $F_z \cdot y_Q$ in quanto, se questo è positivo, porta l' asse <y> su <z> secondo il verso di rotazione positivo del riferimento.
Il momento $M^F_{zy,O}$ è di segno opposto al prodotto $F_z \cdot y_Q$ in quanto, se questo è positivo, porta l' asse <x> su <z> secondo il verso di rotazione negativo del riferimento. In definitiva, si ha

$$M^F_{zx,O} = F_z y_Q \;\; ; \;\; M^F_{zy,O} = -F_z x_Q \;\; ; \;\; M^F_{zz,O} = 0$$

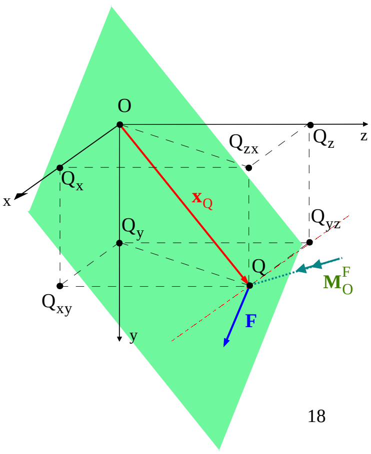
da cui si deduce che il vettore momento è diretto ortogonalmente all'asse z. 17

Momento di una forza rispetto ad un polo coincidente con l'origine del riferimento

In definitiva, assemblando i risultati ottenuti relativi ai casi di forze dirette parallelamente a ciascuno degli assi coordinati, è possibile valutare il momento di una generica forza rispetto agli assi di una terna cartesiana triortogonale di origine O.

$$\boxed{\begin{aligned} M^F_{x,O} &= -F_y(z_Q - z_O) + F_z(y_Q - y_O) \\ M^F_{y,O} &= F_x(z_Q - z_O) - F_z(x_Q - x_O) \\ M^F_{z,O} &= -F_x(y_Q - y_O) + F_y(x_Q - x_O) \end{aligned}}$$

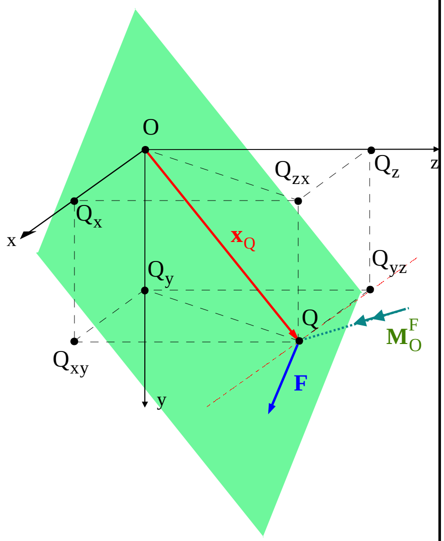
$$\mathbf{M}^F_A = \begin{bmatrix} M^F_{x,A} \\ M^F_{y,A} \\ M^F_{z,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z(y_Q - y_A) - F_y(z_Q - z_A) \\ F_x(z_Q - z_A) - F_z(x_Q - x_A) \\ F_y(x_Q - x_A) - F_x(y_Q - y_A) \end{bmatrix}$$



Si perviene così a dei risultati congruenti con quanto riportato precedentemente:
Le componenti del momento rispetto ad O di una forza F applicata in un punto Q coincidono con i momenti della forza rispetto agli assi coordinati con origine in O.

18

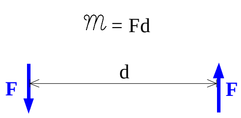
Il vettore $\mathbf{M}^F{}_O=\mathbf{x}_Q\times\mathbf{F}$, risultato del prodotto vettoriale indicato, è per definizione ortogonale al piano identificato dalla forza **F** e dalla posizione del punto Q di applicazione di **F**; il suo modulo è dato dal prodotto dei moduli di **F** e $\mathbf{x}_Q$ per il seno dell' angolo formato da $\mathbf{x}_Q$ con **F**. Il verso di $\mathbf{M}_O$ è tale che la terna delle direzioni di **F**, $\mathbf{x}_Q$ ed $\mathbf{M}_O$ è levogira.
I componenti $\mathbf{M}^F{}_{x,O}$, $\mathbf{M}^F{}_{y,O}$, $\mathbf{M}^F{}_{z,O}$ di $\mathbf{M}^F{}_O$, rispetto agli assi x, y e rispettivamente z, sono i momenti di **F** rispetto ai suddetti assi e sono dati, in modulo, da



$$
\begin{aligned}
M^F_{x,O} &= -F_y\left(z_Q - z_O\right) + F_z\left(y_Q - y_O\right)\\
M^F_{y,O} &= F_x\left(z_Q - z_O\right) - F_z\left(x_Q - x_O\right)\\
M^F_{z,O} &= -F_x\left(y_Q - y_O\right) + F_y\left(x_Q - x_O\right)
\end{aligned}
$$

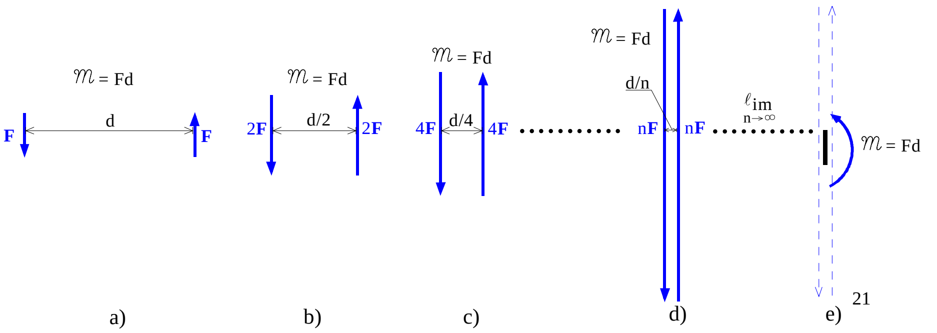
Un caso particolare di sistema di due forze: la coppia

Si dice *coppia* un insieme di due forze (in genere di vettori applicati) parallele, di eguale intensità e direzione ma versi opposti).
La distanza "d" tra le rette di applicazione delle forze si dice *braccio della coppia*, il modulo "F" comune alle due forze *intensità della coppia*;
il verso della coppia è invece il verso di rotazione concordemente individuato dalle due forze attorno ad un qualunque punto interno alla striscia di piano limitato dalle loro rette (levogiro o destrogiro).
La giacitura contenente la coppia si dice *piano della coppia*.

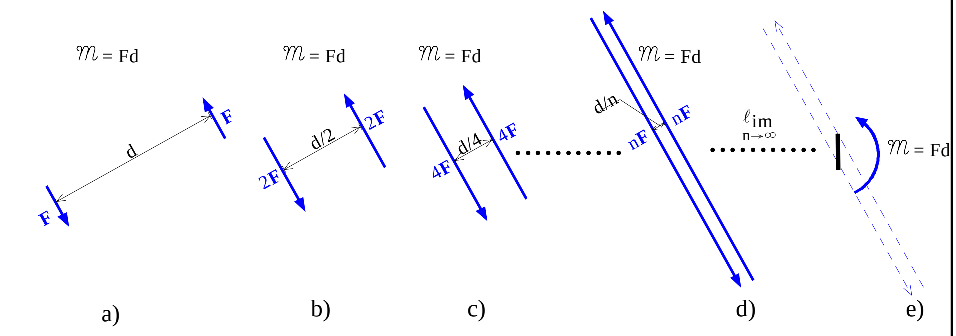


La coppia $\mathcal{M}$ è un sistema a risultante nullo e momento risultante (diretto ortogonalmente al piano della coppia) di modulo (il *modulo della coppia*) pari alla intensità della coppia per il braccio $\mathcal{M} = \pm F\cdot d$, con il segno "+" se il verso della coppia è levogiro rispetto alla normale uscente positiva al piano della coppia e il segno "–" in caso contrario.

Il sistema coppia è a risultante nullo, il suo momento risultante è invariante rispetto al polo.
Inoltre dalla figura è possibile osservare in sequenza come, incrementando l'intensità delle forze componenti in maniera inversamente proporzionale al decremento della braccio della coppia, il modulo della coppia $\mathcal{M}$ rimanga invariato: al limite si raggiunge la condizione in cui si hanno due forze di intensità infinita e verso opposto applicate ad una distanza infinitesima, ovvero un *dipolo*, rappresentabile come in e), che raffigura la più appropriata definizione di coppia, ferma restando la equivalenza con i casi di a)-d)



È altresì da notare che il valore e le modalità di azione della coppia finale sono indipendenti dalla direzione delle due forze.
Nel caso di sistema piano con giacitura individuata dal riferimento Oyz, il piano della coppia coincide con il piano Oyz.



Sistemi di Misura

Delle Grandezze Meccaniche

23

Sistema di Misura

Sistema Internazionale

Le unità di misura legali da utilizzare sono quelle che costituiscono il Sistema Internazionale delle Unità di Misura (**SI**).

D.P.R. del 12.08.82 n.802 emesso in “Attuazione della Direttiva (CEE) n.80/801 relativa alle unità di misura”

Sostituisce il Sistema Pratico delle Unità di Misura (**M.K.S.**).

24

Sistema M.K.S.

Vecchio sistema non legale.

M = **Metro**, unità di Lunghezza.

K = **Kilogrammo**, unità di Forza.

S = **Secondo**, unità di Tempo (intervallo).

Sistema SI

Nuovo sistema legale.

M = **Metro**, unità di Lunghezza.

K = **Kilogrammo**, unità di Massa.

S = **Secondo**, unità di Tempo (intervallo).

Sistema SI e Sistema M.K.S.

Differenza fondamentale: Per il sistema M.K.S.:
K = **Kilogrammo**, è unità fondamentale di Forza.

Per il sistema SI:
K = **Kilogrammo**, è unità fondamentale di Massa.

La Forza nel Sistema SI

La forza è una grandezza fisica derivata:

F=ma

La sua unità di misura è una unità derivata N:

1N=1Kg 1m/s2

Il Newton (N) è definito come la forza che imprime all'unità di massa l'accelerazione unitaria.

La Forza nei due Sistemi

La conversione dell'unità di forza dal vecchio sistema (M.K.S.) al nuovo sistema (SI) è:

$$1Kgf=9,81\ N$$

Viceversa:

$$1N= 1/9,81\ Kgf \quad 1N= 0,102\ Kgf$$

La Pressione nel Sistema SI

La pressione è una grandezza fisica derivata:

$$p=F/A$$

La sua unità di misura è una unità derivata:

$$1Pa=1N/1m^2$$

Il Pascal (Pa) è definito come la pressione di una forza unitaria su una superficie unitaria.

Sistema di Misura

Forza:
1 Newton (N) = 0,1 KilogrammiForza
1 KiloNewton (KN) = 100 KilogrammiForza

Pressione:
1Pascal (Pa) = 1N/m^2
1Megapascal (Mpa) = 10^6 Pa = 10 Kg/cm^2
1Kg/cm^2 = 10N/$10^{-4}m^2$ = 10^5 N/m^2 = 100000 Pa = 0,1MPa
1N/mm^2 = 0.1 Kg/$10^{-2}cm^2$ = 10 Kg/cm^2 = 1 MPa

Momento, Coppia:

Kilogrammometro (Kgm), Sistema MKS:
Il momento esercitato dalla Forza di 1 Kg che agisce con il braccio di 1 metro

KiloNewtonmetro (KNm), Sistema SI:
Il momento esercitato dalla Forza di 1 KN che agisce con il braccio di 1 metro

31

Analisi Dimensionale

*L'**analisi dimensionale** è uno strumento concettuale applicato frequentemente in fisica, chimica e ingegneria per comprendere le situazioni fisiche che coinvolgono grandezze fisiche di diversa natura. È abitualmente usata da fisici ed ingegneri per verificare la plausibilità di calcoli ed equazioni. È anche utilizzata per formare ragionevoli ipotesi su situazioni fisiche complesse che possono essere verificate da esperimenti o da più sviluppate teorie del fenomeno.*

32

Analisi Dimensionale

Le dimensioni di una grandezza fisica sono associate con simboli, come *M*, *L*, e *T* che rappresentano massa, lunghezza, e tempo, ciascuna elevata a un esponente razionale.

Nell'ambito del Sistema internazionale di unità di misura, sono state definite delle "unità fondamentali", ognuna associata ad una grandezza fisica, che oltre la massa, la lunghezza e il tempo, comprendono: l'intensità di corrente, la temperatura assoluta, la quantità di sostanza e l'intensità luminosa.

Tutte le unità di misura sono riconducibili a queste unità fondamentali: per ogni grandezza fisica esiste un'equazione dimensionale che esprime la relativa unità di misura come prodotto delle potenze delle grandezze fisiche anzidette.

Per esempio, la dimensione della grandezza fisica velocità è distanza/tempo (L/T) e la dimensione di una forza è massa × distanza/tempo^2 o ML/T^2. L'analisi dimensionale è una procedura utile e potente, che può essere adoperata come un controllo di consistenza per aiutarci nella derivazione o nella verifica dell'espressione finale. L'analisi dimensionale utilizza il fatto che le dimensioni possono essere trattate come grandezze algebriche, cioè le grandezze possono essere sommate o sottratte fra loro solamente se hanno le stesse dimensioni. Inoltre, i termini di ciascun membro di un'equazione debbono avere le stesse dimensioni. Seguendo queste semplici regole, si può adoperare l'analisi dimensionale come valido ausilio per giudicare la correttezza della forma di un'espressione, poiché la relazione può essere corretta solamente se le dimensioni in ambo i membri dell'equazione sono le stesse.

Analisi Dimensionale

Nella sua forma più primitiva, l'analisi dimensionale può essere usata per controllare la plausibilità delle equazioni fisiche: le due parti di ogni equazione devono essere commensurabili o avere le stesse dimensioni, ovvero, l'equazione deve essere dimensionalmente omogenea. Come corollario di questo requisito, segue che in una espressione fisicamente significativa, solo quantità della stessa dimensione possono essere sommate o sottratte. Ad esempio, la massa di un topo e la massa di una pulce possono essere sommate, ma la massa di una pulce e la lunghezza di un topo non possono essere sommate significativamente.

Quantità fisiche che hanno dimensioni differenti non possono essere comparate tra di loro, o usate in disuguaglianze:

3 metri > 1 secondo non è un'espressione corretta, né significativa.

Le grandezze dimensionali fondamentali sono: Massa (M), Lunghezza (L), Tempo (T)

Analisi Dimensionale

Le grandezze dimensionali fondamentali sono: Massa (M), Lunghezza (L), Tempo (T)

Ma possono essere usate anche grandezze combinate a scopo speditivo

Es: La distanza “d” da Napoli a Roma è una Lunghezza L

La durata “t” del viaggio è un tempo T

La velocità media sul percorso è data da $v = d/t$

La velocità è una “grandezza derivata”. Le sue dimensioni fisiche sono

$[v] = [d]/[t] = L/T = LT^{-1}$

Se l’ autovettura impiega Δt = 36 secondi per passare dalla velocità $v_o = 0$ alla velocità v = 100 Km/ora = 3,6 m/sec, essa ha subito un’ accelerazione media

$a = \Delta v/\Delta t$, con $\Delta v = v - v_o$, che è il rapporto tra una velocità e un tempo.

Le sue dimensioni fisiche sono:

$[a] = [\Delta v]/[\Delta t] = LT^{-1}/T = LT^{-2}$

E così via

35