

*Lezioni di Scienza delle Costruzioni (Ing\_Ed\_Arch)*  
**Diagrammi delle sollecitazioni**

Esempio  
Ricerca grafica reazioni  
Diagramma momento  
Diagramma taglio

DIAGRA2.DS4

1

**Equazioni di riferimento**

Per il tracciamento dei diagrammi delle sollecitazioni si fa riferimento alle equazioni indefinite di equilibrio delle travi

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dz} = -p(z) \\ \frac{dM}{dz} = T \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2M}{dz^2} = -p(z)$$

che legano il momento M e il taglio T tra loro e con il carico p(z) trasversale all'asse della trave.

Per strutture complesse, le equazioni si intendono ovviamente valide su ogni tratto della struttura.

Da tali equazioni si deduce che:

2

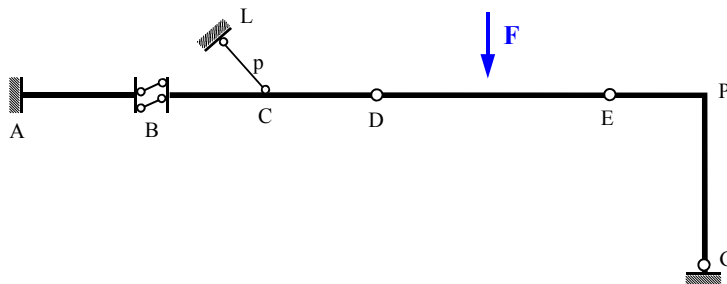
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dz} = -p(z) \\ \frac{dM}{dz} = T \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2M}{dz^2} = -p(z)$$

Da tali equazioni si deduce che:

- 1) Su un tratto in cui il carico  $p(z)$  è nullo il taglio è costante e il momento varia con legge lineare.
- 2) Su un tratto in cui è applicata una forza concentrata con una componente ortogonale al tratto il diagramma del taglio presenta una discontinuità e il diagramma del momento presenta un punto angoloso.
- 3) Su un tratto in cui il carico  $p(z)$  è costante il taglio varia con legge lineare e il momento varia con legge quadratica (parabolica).
- 4) Su un tratto in cui è applicata una coppia concentrata il diagramma del taglio resta insensibile alla presenza della coppia e il diagramma del momento presenta una discontinuità.

3

Esempio

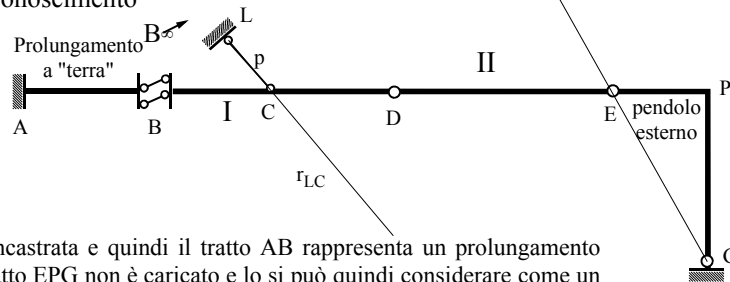


Il tracciamento dei diagrammi del momento e del taglio presuppone la identificazione (grafica) delle reazioni vincolari.

4

Esempio

Preliminare: Riconoscimento



La sezione A è incastrata e quindi il tratto AB rappresenta un prolungamento della "terra". Il tratto EPG non è caricato e lo si può quindi considerare come un pendolo di asse EG con vincolo a terra. Pertanto la struttura si può considerare costituita di due tratti:

Il tratto I: BCD direttamente vincolato a terra col doppio pendolo B

Il tratto II: DE; e si ha  $t = 2$ .

Per il computo dei vincoli si ha:

Il doppio pendolo B:  $g_{dv} = 2$

Il pendolo LC:  $g_{dv} = 1$

La cerniera D:  $g_{dv} = 2$

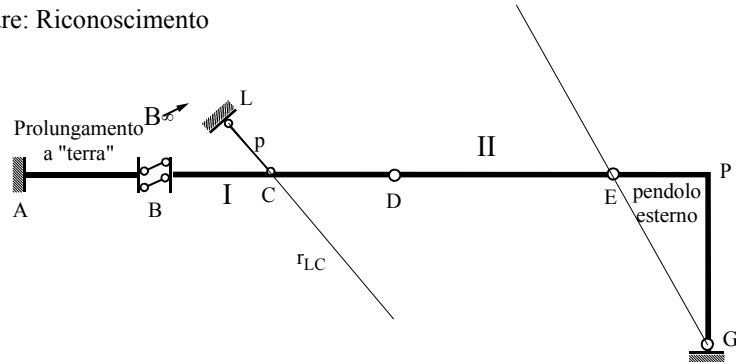
Il pendolo EG:  $g_{dv} = 1$

In definitiva:  $s = 2+1+2+1 = 6 \Rightarrow 3t - s = 0 = \ell - i \Rightarrow \ell = i$

5

Esempio

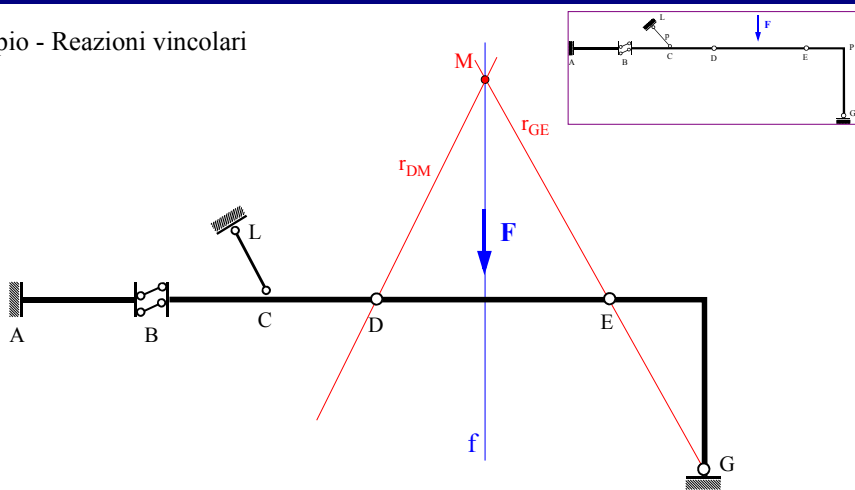
Preliminare: Riconoscimento



Si può constatare che la struttura non ha gradi di libertà e quindi  $\ell = 0$ .

Infatti considerando il tratto BCD, questo è vincolato a terra dal pendolo LC e dalla cerniera B che vincola il punto improprio  $B_{\infty}$ . Poiché l'asse  $r_{LC}$  del pendolo LC non contiene  $B_{\infty}$  (non è parallelo a")  $B_{\infty}$ , ogni rotazione del tratto è impedita, e il punto D è un punto fisso. A questo punto il tratto II è vincolato a terra dalla cerniera D e dal pendolo EG il cui asse non contiene D, e quindi non esiste possibilità di rotazione. Se ne conclude che  $\ell = 0$ , quindi anche  $i = 0$  e la struttura è isostatica.

Esempio - Reazioni vincolari

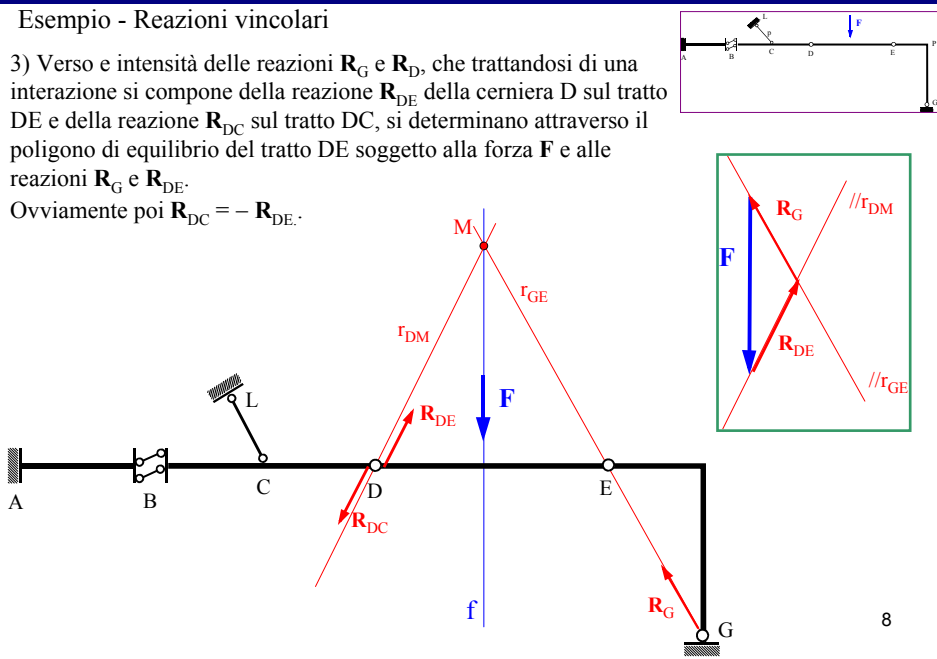


- 1) Per l' equilibrio del tratto GE la reazione della cerniera G passa per E e pertanto la retta di azione della reazione  $R_G$  è la retta  $r_{GE}$  che interseca la retta  $f$  di azione di  $F$  nel punto M.
- 2) Per l' equilibrio del tratto DE la interazione  $R_D$  nella cerniera D giace sulla retta  $r_{DM}$  congiungente D con M (per l' equilibrio di tre forze è necessario che siano concorrenti nello stesso punto).

Esempio - Reazioni vincolari

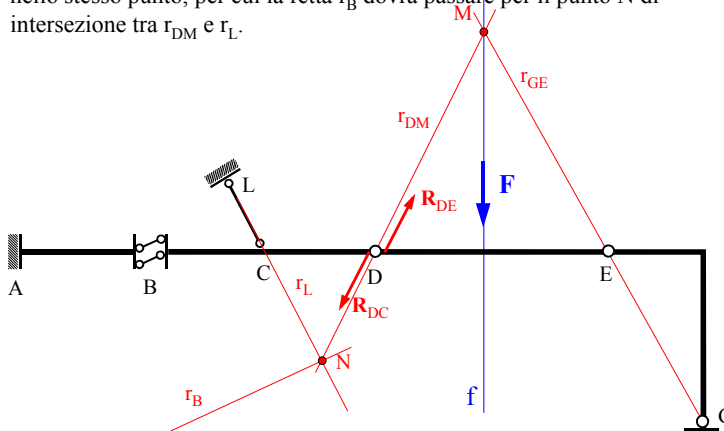
3) Verso e intensità delle reazioni  $R_G$  e  $R_D$ , che trattandosi di una interazione si compone della reazione  $R_{DE}$  della cerniera D sul tratto DE e della reazione  $R_{DC}$  sul tratto DC, si determinano attraverso il poligono di equilibrio del tratto DE soggetto alla forza  $F$  e alle reazioni  $R_G$  e  $R_{DE}$ .

Ovviamente poi  $R_{DC} = -R_{DE}$ .



## Esempio - Reazioni vincolari

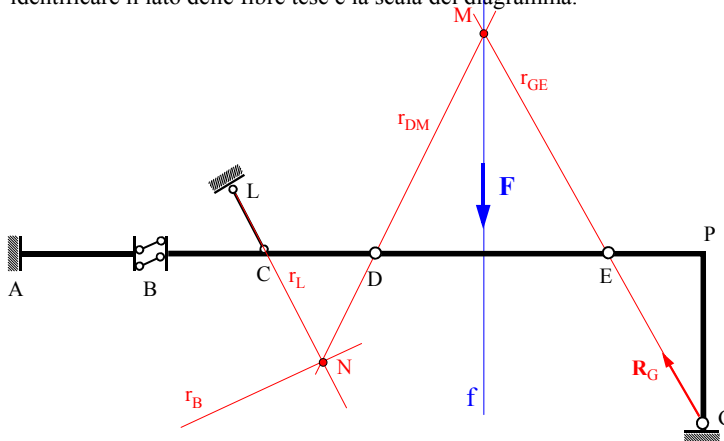
4) Si consideri quindi l'equilibrio del tratto BCD, soggetto alla reazione  $R_L$  del pendolo LC, applicata alla retta  $r_L$ , alla interazione  $R_{DC}$  e alla interazione del doppio pendolo interno B, che si intende applicata ad una retta  $r_B$  parallela alla direzione del doppio pendolo. Trattandosi di tre forze, per l'equilibrio queste devono concorrere nello stesso punto, per cui la retta  $r_B$  dovrà passare per il punto N di intersezione tra  $r_{DM}$  e  $r_L$ .



9

## Esempio - Reazioni vincolari

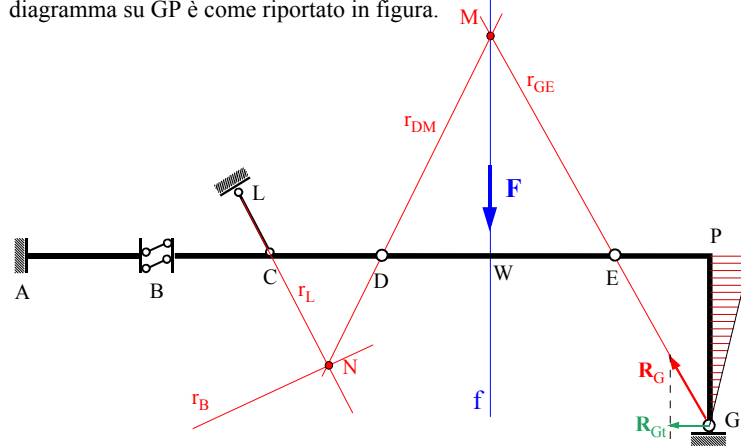
5) Gli elementi fin qui identificati sono necessari e sufficienti per il tracciamento del diagramma dei momenti. Come si potrà constatare sono sufficienti le rette di azione delle singole reazioni e interazioni, e non è necessario calcolare le loro intensità, a parte almeno una reazione, per esempio la  $R_G$  già calcolata, che è necessaria per identificare il lato delle fibre tese e la scala del diagramma.



10

## Esempio – Diagramma del momento

6) Si inizi a tracciare il diagramma del momento relativamente al tratto GP. Con riferimento ad un qualsiasi punto di tale tratto il momento è prodotto dalla sola reazione  $R_G$ , e per la precisione dalla sua componente tagliante  $R_{Gt}$ , da cui si deduce che il momento tende le fibre sul lato esterno di GP. Per convenzione il diagramma del momento si riporta sempre dalla parte delle fibre tese. Inoltre esso varia con legge lineare (essendo nullo il carico distribuito) ed è nullo nella cerniera G e quindi, a meno della scala che si potrà determinare in seguito, il diagramma su GP è come riportato in figura.

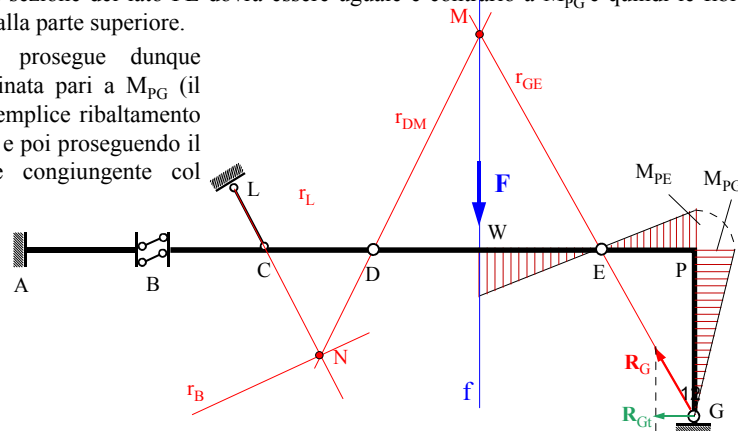
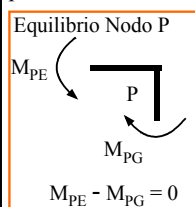


11

## Esempio – Diagramma del momento

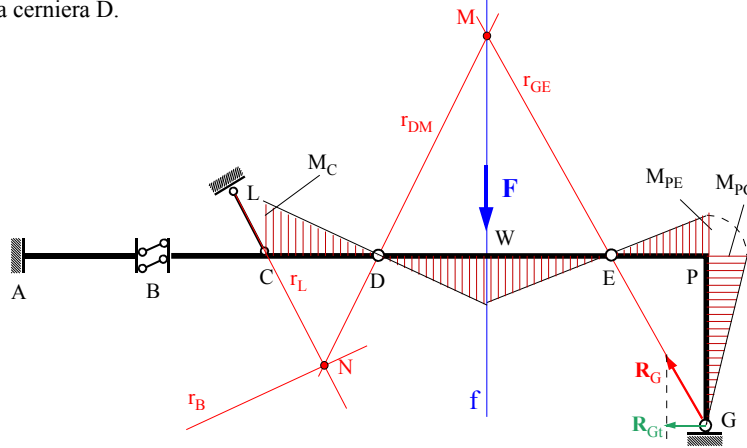
7) Occorre ora proseguire il diagramma sul tratto orizzontale. Si osserva che fino alla sezione W ove è applicata la forza, il momento rispetto a qualsiasi punto del tratto PW è sempre dato dalla reazione  $R_G$ , la quale, intersecando il tratto nella cerniera E produce (ovviamente) momento nullo in tale sezione. Per disegnare il diagramma (che è ancora lineare) occorre identificare il momento nella sezione P, lato PE. A tal fine si consideri l'equilibrio del nodo P (v. figura). Poiché sulla sezione del lato PG il momento è dato dalla ordinata  $M_{PG}$ , per l'equilibrio il momento  $M_{PE}$  sulla sezione del lato PE dovrà essere uguale e contrario a  $M_{PG}$  e quindi le fibre tese si troveranno dalla parte superiore.

Il diagramma si prosegue dunque riportando una ordinata pari a  $M_{PG}$  (il che può farsi per semplice ribaltamento della ordinata  $M_{PG}$ ) e poi proseguendo il diagramma tramite congiungente col punto E.



Esempio – Diagramma del momento

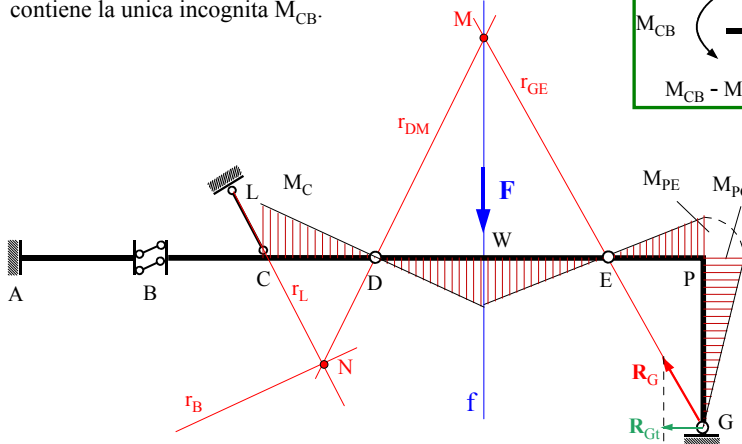
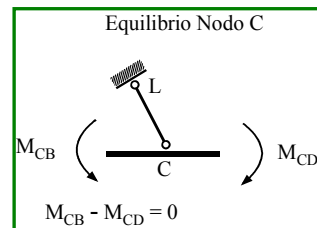
8) Per proseguire il diagramma dalla sezione W a C, occorre considerare che le forze che precedono un qualsiasi punto di WC sono la reazione  $R_G$  e la forza  $F$ , la cui risultante è la reazione  $R_{DC}$  applicata alla retta  $r_{DM}$ . Tale risultante produce momento nullo rispetto alla cerniera D (come ovvia condizione di equilibrio), mentre il diagramma non presenta discontinuità nella sezione W, ove si manifesta un punto angoloso a causa della presenza della forza concentrata. Il diagramma procede quindi con andamento lineare fino a C sulla congiungente l' ordinata in W con la cerniera D.



Esempio – Diagramma del momento. Il problema del *nodo triplo*

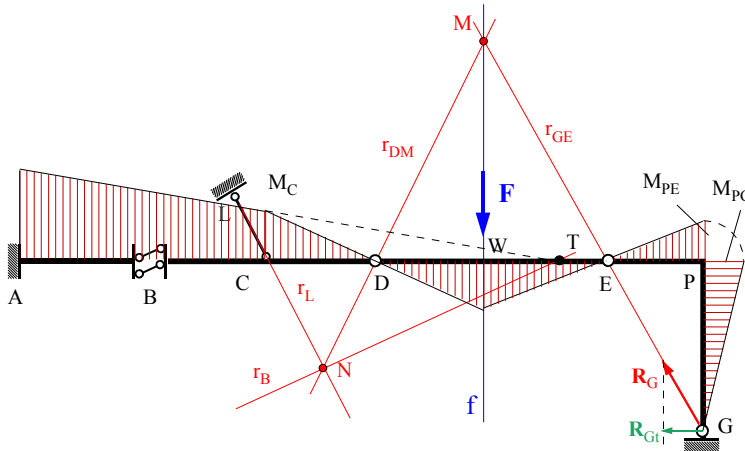
9) Si è tracciato il diagramma dalla sezione G alla sezione C. La sezione C è un nodo nel quale concorrono due tratti (CD e CB) analogamente a quanto si è visto relativamente al nodo P nel quale confluivano solo due tratti.

L' equilibrio alla rotazione del nodo C fornisce immediatamente il momento  $M_{CB} = M_{CD} = M_C$  sul tratto CB, in quanto la equazione di equilibrio alla rotazione contiene la unica incognita  $M_{CB}$ .



Esempio – Diagramma del momento.

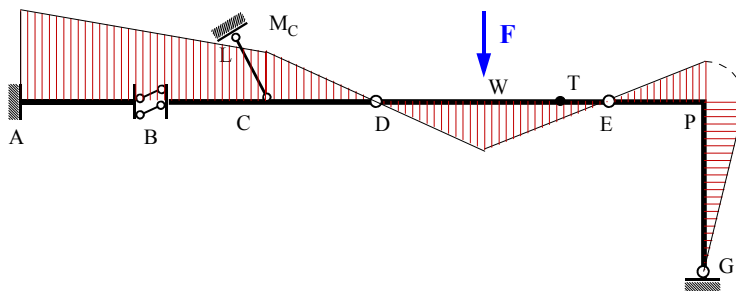
10) Assodata la continuità del momento e quindi l'uguaglianza  $M_{CD} = M_{CB} = M_C$ , relativamente al tratto AC si osserva che le forze che producono momento rispetto ai punti di tale tratto sono  $R_{DC}$  e la reazione del pendolo  $R_{LC}$ , due forze la cui risultante è applicata alla retta  $r_B$ . E pertanto il diagramma si completa congiungendo il punto T di intersezione di  $r_B$  col prolungamento di AC con l'ordinata momento  $M_C$ .



15

Esempio – Diagramma del momento.

In pulito quindi il diagramma si presenta così, ed è esatto in proporzioni e segno, salvo definire la scala nella quale va letto. Si osserva il punto angoloso in corrispondenza della forza concentrata, che risulta sempre orientato come la freccia della forza.

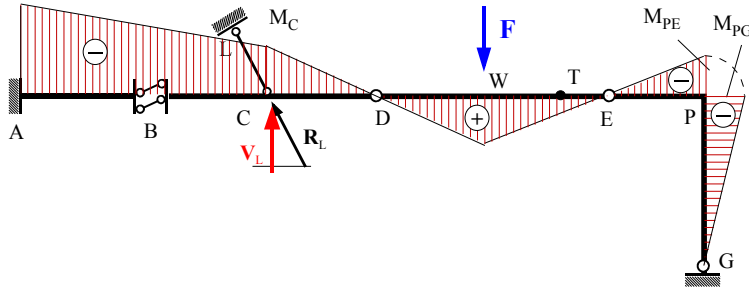


16

Esempio – Diagramma del momento.

In base a tale osservazione si può dedurre dalla semplice osservazione del diagramma del momento anche che la componente tagliante (cioè ortogonale all' asse della trave)  $V_L$  della reazione del pendolo LC deve essere concorde con il punto angoloso del diagramma e quindi è diretta verso l' alto; dal che si deduce anche il verso di  $R_L$  (azione del pendolo sul tratto BD) e quindi che il pendolo stesso è teso, cioè è un *tirante*.

Si può anche attribuire un segno alle ordinate, convenendo che il momento è positivo quando il diagramma si trova alla destra di un osservatore che percorre l' asse della struttura da A verso G e da C verso H.



Esempio – Diagramma del momento.

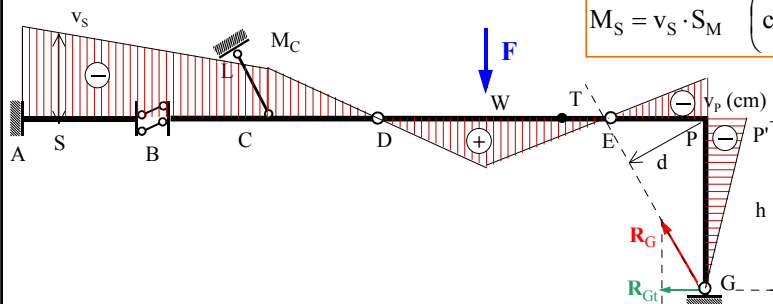
11) Per definire la "scala" nella quale il diagramma va letto, occorre e basta calcolare il valore del momento in una sezione della trave e confrontarla con la relativa ordinata letta per esempio in cm. Si consideri ad esempio la sezione P, e si legga la ordinata PP' in cm (o qualunque altra unità di lunghezza). Sia  $v_p$  la ordinata PP' espressa in cm. Esprimendo le forze in Kg e le lunghezze in metri, il momento in P vale  $M_p = R_G d = R_{Gt} h$  (Kgm)

Detta  $S_M$  la scala del diagramma si ha:

$$S_M = \frac{M_p \text{ Kgm}}{v_p \text{ cm}}$$

Cosicchè, considerata una qualsiasi sezione S della struttura e misurata la ordinata  $v_S$  in cm relativa alla sezione S, il momento è dato da:

$$M_S = v_S \cdot S_M \left( \text{cm} \cdot \frac{\text{Kgm}}{\text{cm}} = \text{Kgm} \right)$$

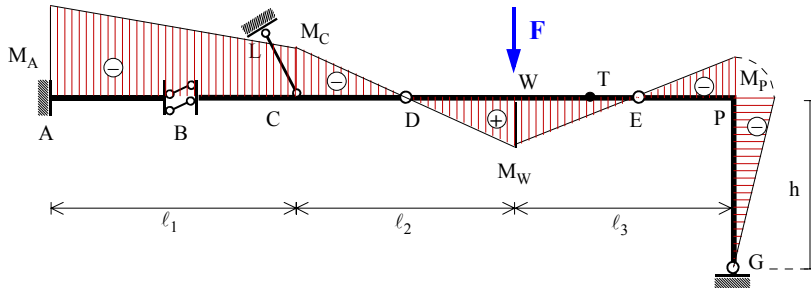


Esempio – Diagramma del taglio.

12) Il diagramma del taglio può dedursi direttamente da quello del momento, ricordando che il Taglio è la derivata del Momento. Questo metodo è particolarmente efficace quando, come in questo caso il diagramma del momento è ovunque lineare a tratti, in quanto in questo caso il taglio è costante a tratti e coincide con la tangente dell' angolo di inclinazione del diagramma del momento rispetto al tratto cui si riferisce. Introducendo le grandezze che misurano la geometria della struttura si ha

$$T_{AC} = \frac{M_C - M_A}{l_1} > 0 ; T_{CW} = \frac{M_W - M_{CD}}{l_2} > 0$$

$$T_{WP} = \frac{M_P - M_W}{l_3} < 0 ; T_{PG} = \frac{-M_P}{h} > 0$$



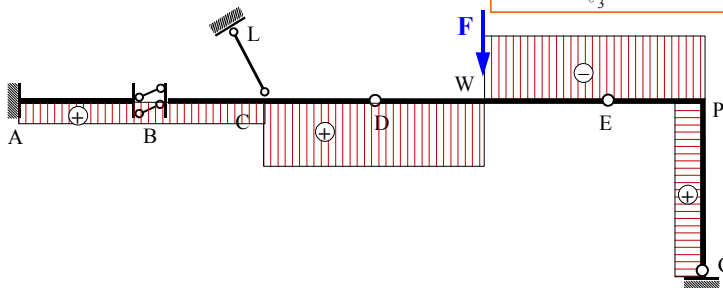
Esempio – Diagramma del taglio.

13) Può ora tracciarsi il diagramma del taglio per tratti, riportando alla destra dell' osservatore il taglio positivo e ricordando la convenzione sul segno dello sforzo di taglio.



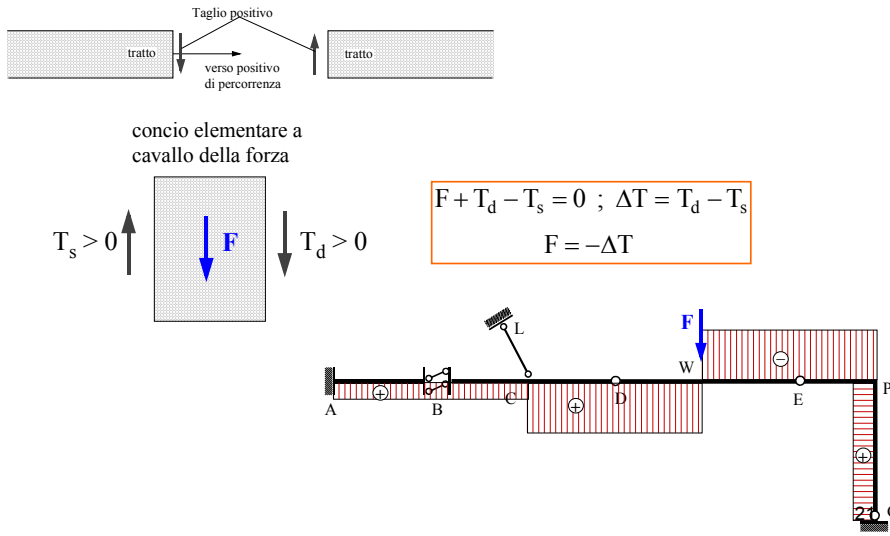
$$T_{AC} = \frac{M_C - M_A}{l_1} > 0 ; T_{CW} = \frac{M_W - M_{CD}}{l_2} > 0$$

$$T_{WP} = \frac{M_P - M_W}{l_3} < 0 ; T_{PG} = \frac{-M_P}{h} > 0$$



Esempio – Diagramma del taglio.

Si osserva che in corrispondenza della sezione di applicazione della forza, detti  $T_s$  e  $T_d$  il taglio sulle sezioni del concio a sinistra e destra della forza, per l'equilibrio si ha:



Esempio – Completamento calcolo reazioni

14) Si possono agevolmente calcolare le reazioni  $R_L$ ,  $R_{BC}$  e  $R_{BA}$  e infine la reazione di incastro  $R_A$ , costruendo i poligoni di equilibrio dei tratti BD e AB.

Per l'equilibrio del tratto BD, le forze agenti sono la reazione  $R_{DC}$ , ormai nota, la reazione del pendolo e la interazione del doppio pendolo. L'equilibrio si risolve attraverso la chiusura del poligono dei vettori che interpreta la equazione vettoriale  $R_{BD} + R_{DC} + R_L = 0$ .

La reazione  $R_A$  è banalmente uguale a  $-R_{BA}$ .

