

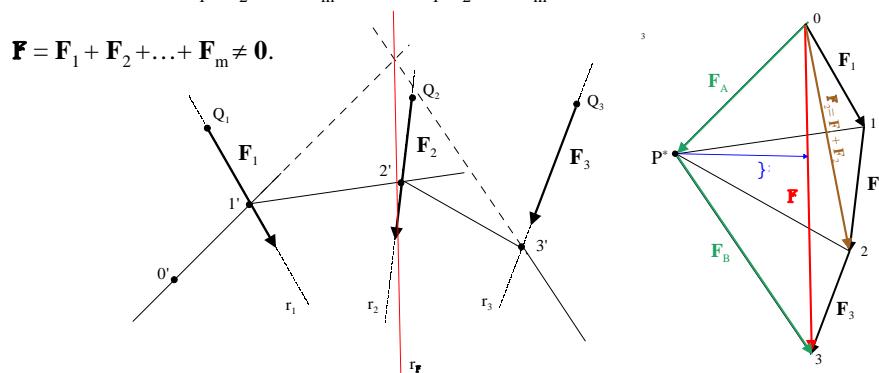
Il Poligono Funicolare

Parte I

Nel seguito si illustra il metodo grafico fondamentale per la riduzione di un sistema piano di forze, il poligono funicolare, che si pone come alternativa alla tecnica di riduzione connessa alle semplici operazioni di composizione e scomposizione vettoriale.

Il poligono funicolare: Riduzione di un sistema di forze ad una unica forza (Condizione a.i)

Si consideri un sistema piano di "m" forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_m$ con punti di applicazione rispettivamente Q_1, Q_2, \dots, Q_m (e rette r_1, r_2, \dots, r_m) a risultante non-nullo



Il relativo poligono dei vettori 0-1-2-...-m, costruito a partire dal punto 0 arbitrariamente scelto, risulta aperto con risultante fornito (in intensità, verso e direzione) dall'equipollente vettore congiungente il primo con l'ultimo spigolo del poligono

In particolare, poiché i lati del poligono sono costituiti da vettori equipollenti alle forze componenti il sistema

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{F}_2 = \mathbf{x}_{1,2}, \dots, \mathbf{F}_m = \mathbf{x}_{m-1,m}$$

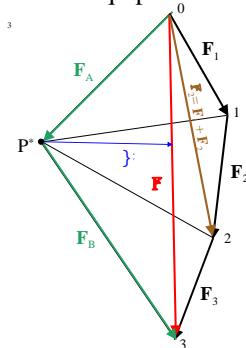
i vettori congiungenti il primo punto “0” del poligono con lo j -esimo vertice rappresentano le risultanti parziali delle precedenti j forze, ovvero

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{x}_{0,j} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_j, \text{ e, per } j = m, \text{ si ha il risultante totale}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m = \mathbf{x}_{0,m} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_m.$$

Si consideri un arbitrario punto del piano P^* , denominato *polo*, a partire dal quale si proiettino i raggi congiungenti P^* con i vertici del poligono delle forze; considerati i vettori distesi lungo i raggi così individuati è possibile operare una scomposizione di ciascuna forza componente il sistema del tipo

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \mathbf{x}_{0,1} = \mathbf{x}_{0,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,1}, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{x}_{1,2} = \mathbf{x}_{1,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,2}, \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{x}_{2,3} = \mathbf{x}_{2,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,3}, \\ \mathbf{F}_m &= \mathbf{x}_{m-1,m} = \mathbf{x}_{m-1,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,m}\end{aligned}$$



Dunque con riferimento al risultante parziale delle prime j forze del poligono dei vettori, si ha

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{x}_{0,j} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_j = \mathbf{x}_{0,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,1} + \dots + \mathbf{x}_{j-1,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,j} = \mathbf{x}_{0,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,j}$$

mentre, con riferimento al risultante globale, si ha

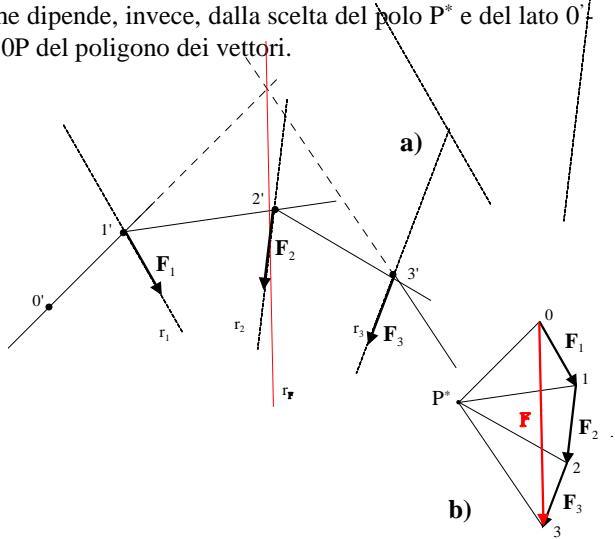
$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathbf{F}_m &= \mathbf{x}_{0,m} = \mathbf{x}_{0,1} + \mathbf{x}_{1,2} + \mathbf{x}_{2,3} + \dots + \mathbf{x}_{m-1,m} = \\ &= (\mathbf{x}_{0,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,1}) + (\mathbf{x}_{1,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,2}) + (\mathbf{x}_{2,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,3}) + \dots + [\mathbf{x}_{m-1,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,m}] = \\ &= \mathbf{x}_{0,P^*} + \mathbf{x}_{P^*,m} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B\end{aligned}$$

il che esprime la semplice regola di scomposizione vettoriale del risultante delle forze nei due vettori \mathbf{F}_A ed \mathbf{F}_B distesi secondo la prima e l'ultima proiettante del poligono dei vettori.

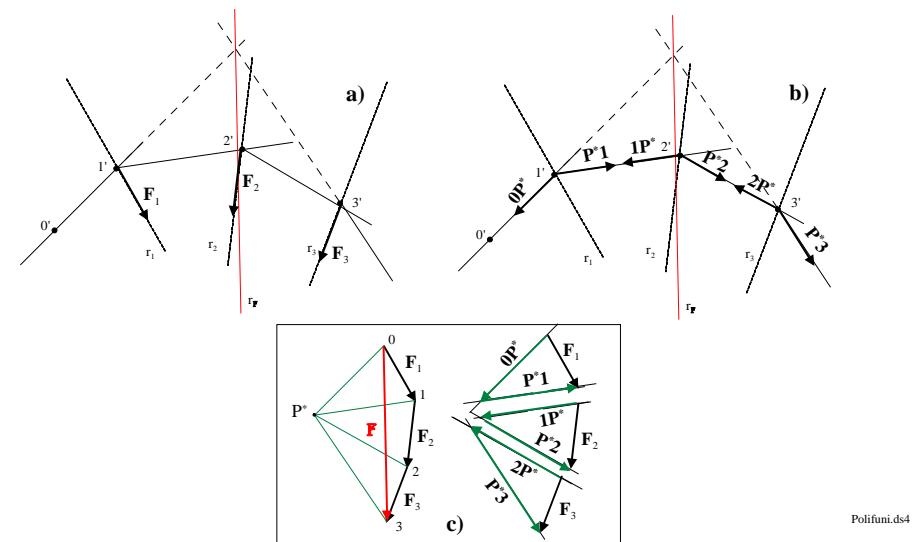
Si definisce poligono funicolare un qualsiasi poligono $0'-1'-2'-\dots-m'$, i cui lati siano ordinatamente paralleli alle proiettanti P^*-0 , P^*-1 , $P^*-2\dots$, P^*-m .

La posizione del poligono delle forze Fig.b) non influisce sulla costruzione del poligono funicolare Fig.a), che dipende, invece, dalla scelta del polo P^* e del lato $0'-1'$ tra le rette parallele al lato OP del poligono dei vettori.

La arbitrarietà di questa scelta in base a tre parametri indipendenti (le due coordinate di P^* e ascissa di intersezione del lato $0'-1'$ con l'asse orizzontale) denota la circostanza secondo cui, per un assegnato sistema di forze, è possibile individuare ∞^3 poligoni funicolari che le connettano.



Si dimostra che, comunque si tracci il poligono funicolare di connessione di un assegnato sistema di forze, il risultante del sistema \mathbf{F} ha retta d'azione passante per il punto di intersezione del primo e dell'ultimo lato del poligono funicolare.



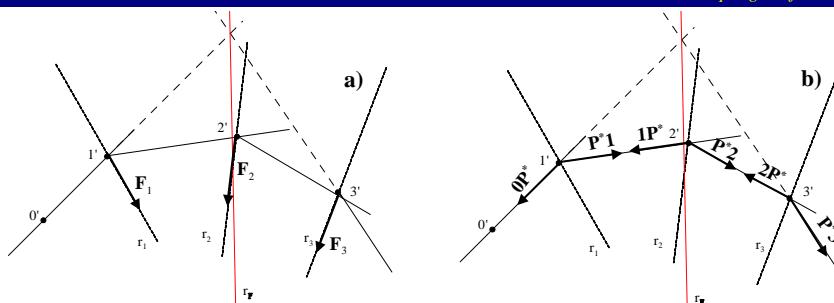
La dimostrazione di tale asserto è, in realtà, immediata e discende dalla diretta applicazione delle fondamentali regole di composizione e scomposizione vettoriale, come viene illustrato di seguito.

Poiché ciascuna forza è equivalente ad una qualsiasi altra forza ad essa equipollente e con medesima retta d'azione, la singola forza può essere traslata indifferentemente lungo la sua retta d'azione.

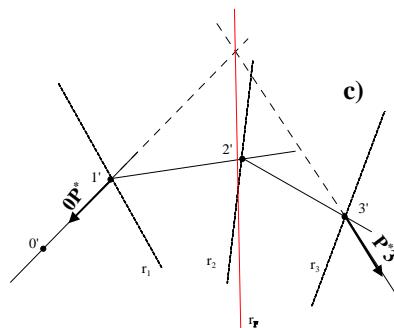
Una volta costruito il poligono funicolare per l'assegnato sistema, si traslino allora le forze componenti il sistema nei vertici del poligono, $1', 2', \dots, m'$, in modo che a ciascuno di essi corrisponda rispettivamente la forza $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_m$, ovvero secondo la regola di associazione (j', \mathbf{F}_j) (Fig. a); si scomponga quindi la singola forza \mathbf{F}_j secondo le direzioni dei lati che convergono nel relativo vertice j' (Fig. b): è facile riconoscere la equazione precedentemente introdotta

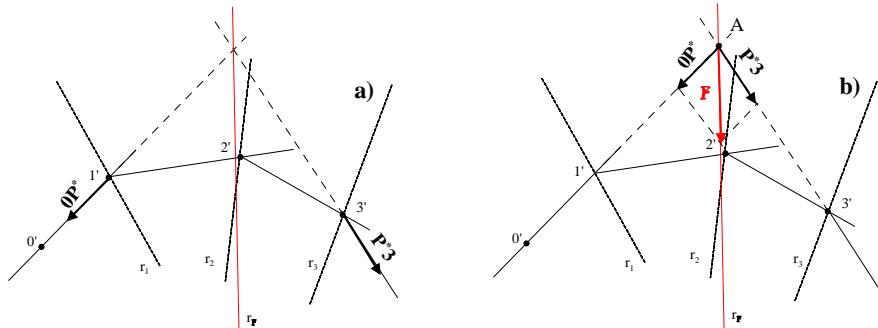
$$\mathbf{F}_j = 0j = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_j = 0P^* + P^*1 + \dots + P^*j = 0P^* + P^*j$$

ovvero che le componenti di ciascuna forza secondo i lati del poligono funicolare ad essi relativi sono equipollenti ai vettori distesi lungo i lati del poligono dei vettori, con la differenza (notevole) che ne sono ora note le rette di azione, che coincidono, appunto, con i lati del poligono funicolare (Fig. c).



Si nota che i lati "interni" del poligono funicolare sono interessati da forze uguali ed opposte (ovvero equipollenti e con medesima retta d'azione, dunque in equilibrio tra loro) del tipo \mathbf{x}_{j,P^*} e $\mathbf{x}_{P^*,j}$, equivalenti a zero.





Dunque tutto il sistema di forze è riducibile alle componenti individuate sul primo e l'ultimo lato del poligono funicolare, ovvero $\mathbf{x}_{0,p*}$ e $\mathbf{x}_{p*,m}$ (Fig.a). Queste possono a loro volta essere traslate nel punto di intersezione delle relative rette d'azione "A", coincidenti con il primo e l'ultimo lato del poligono funicolare ed essere composte fornendo il risultante \mathbf{F} , equipollente al vettore $0m$ del poligono dei vettori e con la effettiva retta r_F d'azione passante per "A", detta *asse centrale del sistema di forze* (Fig.b).

Il poligono funicolare: Riduzione di un sistema di forze ad una forza ed una coppia (Condizione a.ii)

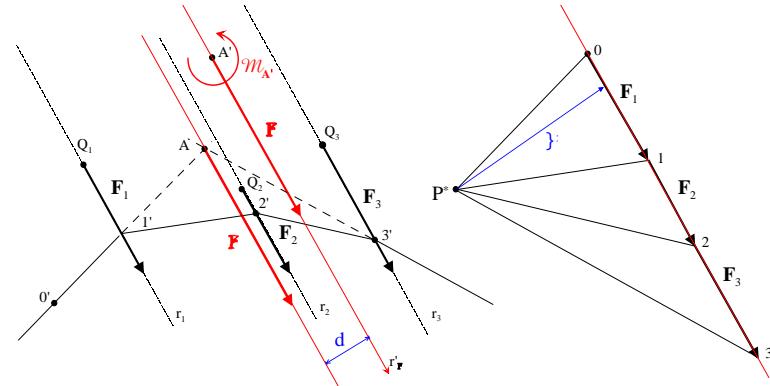
Si consideri un sistema piano costituito da "m" forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_m$ **parallele tra loro** con punti di applicazione rispettivamente Q_1, Q_2, \dots, Q_m (e rette r_1, r_2, \dots, r_m), a risultante non-nullo $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_m \neq \mathbf{0}$.

Se ne operi, attraverso la costruzione del poligono funicolare, una riduzione ad un risultante \mathbf{F} applicato all'asse centrale del sistema: a tale scopo si tracci dunque il poligono delle forze $0-1-2-\dots-m$, che consente di identificare nel vettore $0m$ un vettore equipollente al risultante \mathbf{F} ; si scelga quindi il polo P^* e si indichi con λ^* la distanza di P^* dalla retta d'azione di $0m$, detta *distanza polare*.

Si proceda conseguentemente alla costruzione del poligono funicolare, tramite cui è possibile individuare l'asse centrale del sistema nell'asse con la direzione del vettore $0m$ e passante per il punto A fornito dalla intersezione del primo e dell'ultimo lato del poligono .

Si consideri di volere operare una riduzione del sistema ad un risultante \mathbf{F} applicato su un asse r'_F parallelo all'asse centrale r_F e passante per il punto A' arbitrariamente scelto e ad una coppia $\mathcal{M}_{A'}$, attraverso la costruzione del poligono funicolare.

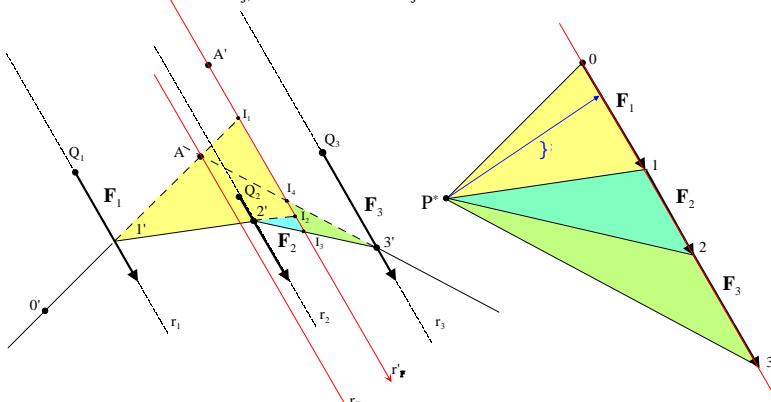
Risulta chiaro che il problema consiste nella valutazione di $\mathcal{M}_{A'}$, pari al momento risultante del sistema di forze rispetto al polo A' .

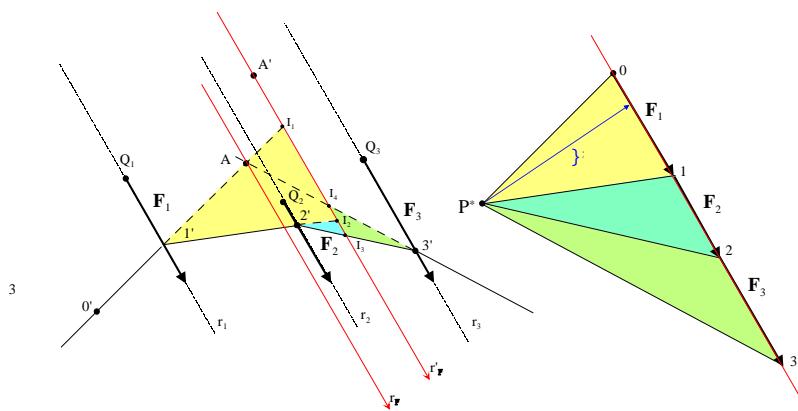


Per inciso, è immediato verificare che il trasporto del risultante \mathbf{F} da r_F ad r'_F genera una coppia $\mathcal{M}_{A'}$ di momento pari al momento di \mathbf{F} applicato in A' rispetto ad A' (modulo della forza \mathbf{F} per il braccio "d", ovvero $\mathcal{M}_{A'} = \mathbf{F} \cdot d$), ovvero al *momento di trasporto* di \mathbf{F} da r_F ad r'_F .

Si proceda allora alla costruzione del poligono funicolare $0'-1'-2'-\dots-m'$ e si tracci per A' la retta r'_F parallela alla direzione di $0m$ (ovvero di \mathbf{F}) e con verso concorde al verso di \mathbf{F} ; si intercettino dunque su r'_F le intersezioni dei lati del poligono funicolare nei punti I_1, I_2, \dots, I_{m+1} .

Si dimostra che, con riferimento alla j -esima forza \mathbf{F}_j , il vettore $\mathbf{II}_{j,j+1}$ congiungente i punti I_j ed I_{j+1} , di verso positivo se concorde con il verso di r'_F , è direttamente proporzionale al momento $\mathbf{M}_{j,A'}^F$ della forza \mathbf{F}_j rispetto al polo A' .



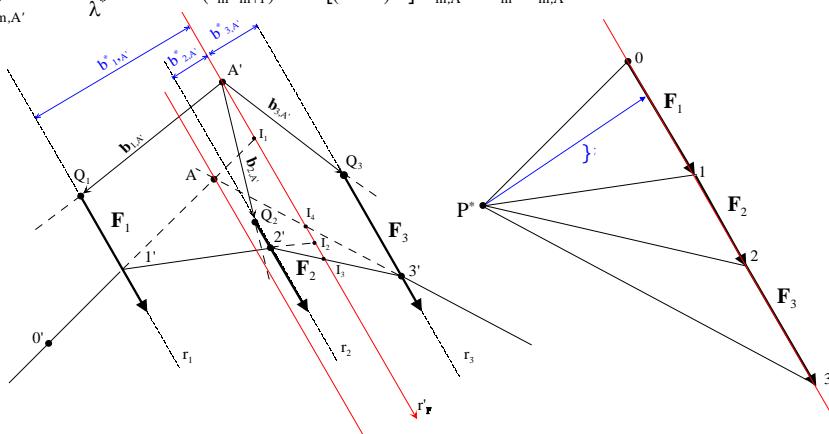


Si osserva che sussistono le seguenti similitudini tra i triangoli relativi al poligono funicolare ed al poligono dei vettori rispettivamente:

$$I' I_1 I_2 \quad P^* 01, \quad 2' I_2 I_3 \quad P^* 12, \dots, \quad m' I_m I_{m+1} \quad P^* (m-1)m$$

che permettono di definire le seguenti proporzioni:

$$\begin{cases} \frac{I_1 I_2}{b_{1,A'}^*} = \frac{01}{\lambda^*} \rightarrow (I_1 I_2) \cdot \lambda^* = (01) \cdot b_{1,A'}^* = F_1 \cdot b_{1,A'}^*, \\ \frac{I_2 I_3}{b_{2,A'}^*} = \frac{12}{\lambda^*} \rightarrow (I_2 I_3) \cdot \lambda^* = (12) \cdot b_{2,A'}^* = F_2 \cdot b_{2,A'}^*, \\ \dots \\ \frac{I_m I_{m+1}}{b_{m,A'}^*} = \frac{(m-1)m}{\lambda^*} \rightarrow (I_m I_{m+1}) \cdot \lambda^* = [(m-1)m] \cdot b_{m,A'}^* = F_m \cdot b_{m,A'}^*. \end{cases}$$



Come noto, i momenti delle singole forze rispetto al polo A' valgono, con i loro moduli,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{M}_{1,A'}^F = \mathbf{b}_{1,A'} \times \mathbf{F}_1, & \mathbf{M}_{1,A'}^F = \pm \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{b}_{1,A'}^*, \\ \mathbf{M}_{2,A'}^F = \mathbf{b}_{2,A'} \times \mathbf{F}_2, & \mathbf{M}_{2,A'}^F = \pm \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{b}_{2,A'}^* \\ \dots \\ \mathbf{M}_{m,A'}^F = \mathbf{b}_{m,A'} \times \mathbf{F}_m, & \mathbf{M}_{m,A'}^F = \pm \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{b}_{m,A'}^* \end{array} \right.$$

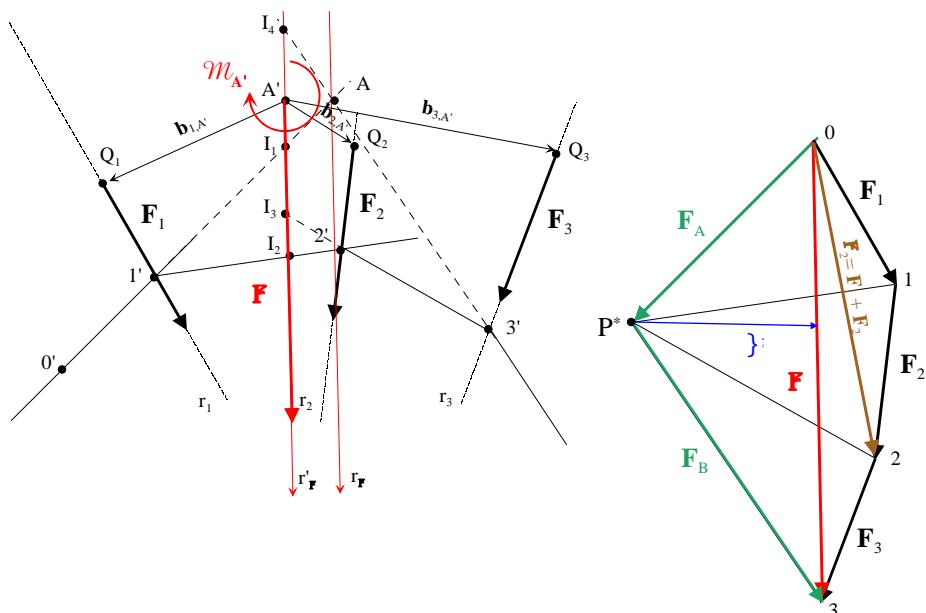
da cui, in generale, si ha

$$M_{j,A'}^F = \pm F_j \cdot b_{j,A'}^* = \pm \lambda^* I_j I_{j+1}$$

che esprime la relazione di diretta proporzionalità, tramite la distanza polare, del momento $M_{j,A}^F$ della j-esima forza rispetto al polo A' ed il segmento orientato $II_{j,j+1}$. Ricordando l'espressione del momento risultante del sistema di forze rispetto ad A', con il suo modulo, si ha l'intensità della coppia ricercata M_A .

$$\mathbf{M}_{A'}^F = \sum_{j=1..m} \mathbf{M}_{j,A'}^F = \sum_{j=1..m} \mathbf{b}_{j,A'} \times \mathbf{F}_j, \quad \quad \mathbf{M}_{A'}^F = \sum_{j=1..m} \pm F_j \cdot b_{j,A'}^* = \lambda^* \cdot \sum_{j=1..m} \pm I_j I_{j+1} = \pm \lambda^* \cdot I_1 I_{m+1}$$

in cui, come si può osservare, ancora il segno del momento risultante è appunto fornito dal segno del vettore $\mathbf{I}_l \mathbf{I}_{m+1}$ congiungente il primo punto di intersezione I_l con l'ultimo I_{m+1} .



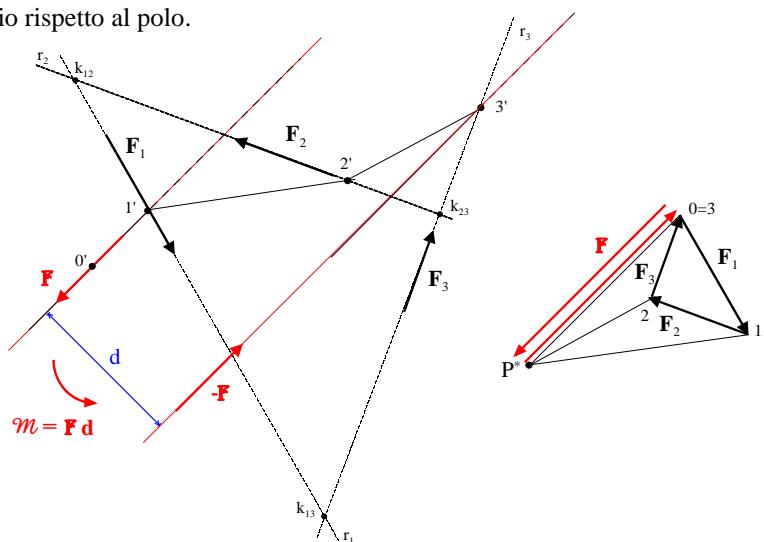
Poligono funicolare: Riduzione di un sistema di forze ad una coppia
(Condizione b)

Da quanto esposto nei paragrafi precedenti si evince che *condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di forze sia riducibile ad una coppia è che il poligono delle forze sia chiuso, ovvero che il risultante delle forze sia nullo.*

In tale evenienza, a patto che il momento risultante \overline{M}_A^F del sistema rispetto ad un qualsiasi polo A sia non nullo $\overline{M}_A^F \neq 0$, esso è invariante rispetto al polo, ovvero $\overline{M}_A^F = \overline{M}^F$, ed il sistema è riducibile alla coppia \mathcal{M} di intensità pari alla intensità del momento risultante $\mathcal{M} = \overline{M}^F$.

In Fig. è immediato verificare che, nel caso di un sistema costituito da tre forze, scelto come polo uno dei punti di intersezione delle rette di azione delle forze, k_{12}, k_{23}, k_{13} , il momento risultante è fornito (con il suo verso) dalla sola terza forza per il braccio rispetto al polo.

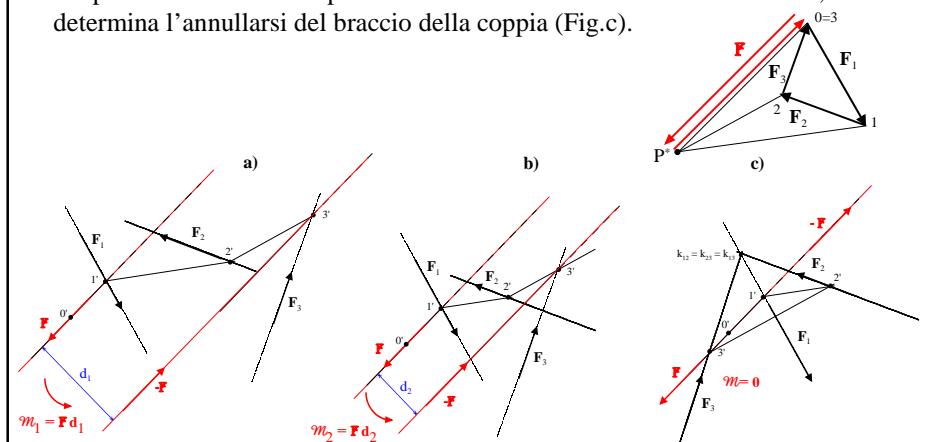
In Fig. è immediato verificare che, nel caso di un sistema costituito da tre forze, scelto come polo uno dei punti di intersezione delle rette di azione delle forze, k_{12}, k_{23}, k_{13} , il momento risultante è fornito (con il suo verso) dalla sola terza forza per il braccio rispetto al polo.



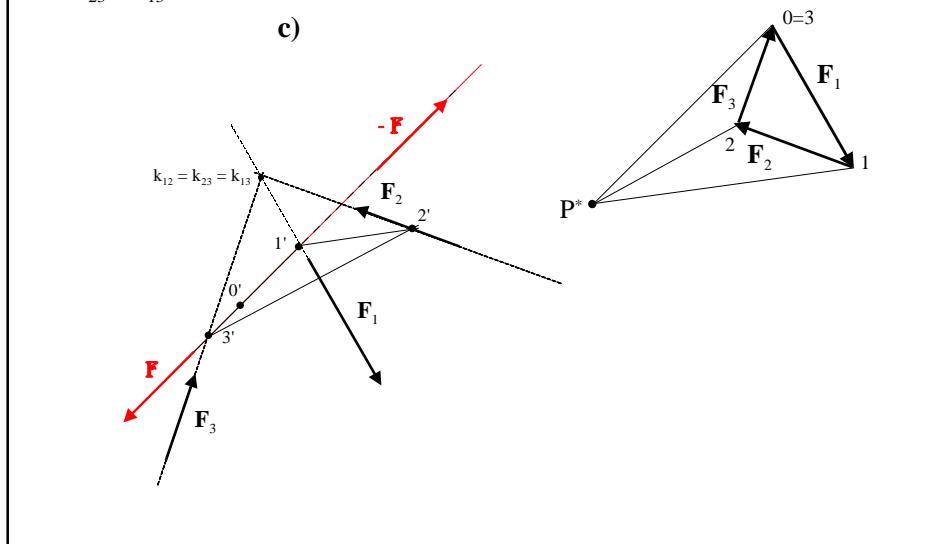
Poligono funicolare: Riduzione di un sistema di forze a zero
(Condizione c)

Da quanto esposto, si evince che *condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di forze sia riducibile a zero (condizione di equilibrio del sistema per cui il risultante ed il momento risultante sono nulli)* è che sia il poligono delle forze che il poligono funicolare siano chiusi.

La prima condizione implica che il risultante delle forze sia nullo, la seconda determina l'annullarsi del braccio della coppia (Fig.c).



La condizione di poligono funicolare chiuso (Fig.c) si verifica certamente laddove le forze del sistema hanno rette di azione tutte convergenti in un medesimo punto ($k_{12} = k_{23} = k_{13}$).



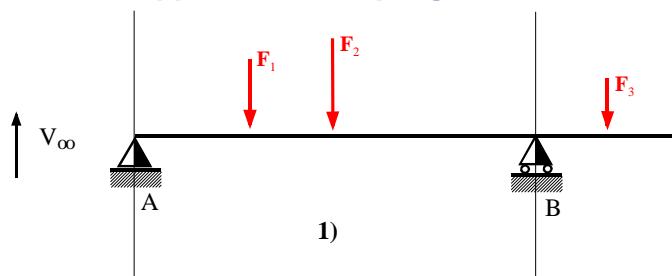
Applicazione del poligono funicolare

Il poligono funicolare è uno strumento che risulta utile, se non indispensabile in una molteplicità di applicazioni.

Esso è stato un indispensabile strumento di controllo della statica degli archi murari, a partire dal '700, epoca in cui, con i contributi del Couplet, De La Hire e Mascheroni, cominciò a trovare sistemazione definitiva la statica grafica.

E comunque, soccorre in tutte quelle applicazioni nelle quali gli ordinari metodi della statica grafica risultano insufficienti, come nel caso di strutture soggette a forze tutte parallele tra loro, come nell'esempio che segue.

Applicazione del poligono funicolare



La trave è soggetta a forze attive tutte verticali e quindi parallele tra loro.

La reazione R_B del carrello B è verticale.

Per ovvie considerazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, anche la reazione R_A dell'appoggio A è verticale.

Pertanto tutte le forze, attive e reattive, convergono nello stesso punto improprio V_∞

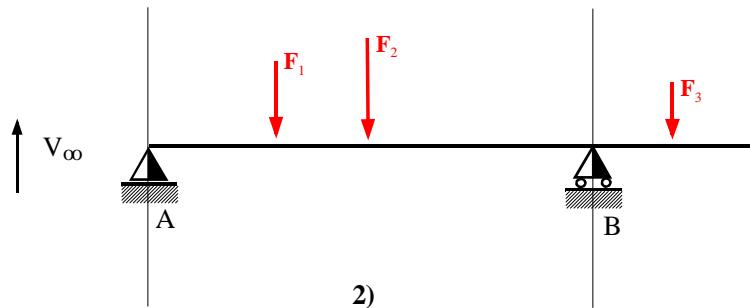
In questo caso, quando il punto di convergenza delle forze è improprio,

la condizione che il risultante di tutte le forze sia nullo non è sufficiente ad assicurare che sia verificato l'equilibrio alla rotazione.

La condizione che il risultante di tutte le forze sia nullo, infatti, quando le forze sono tutte parallele, assicura solo che il sistema è riducibile ad una coppia.

Ma, per l'equilibrio, occorre che tale coppia abbia braccio nullo.

Applicazione del poligono funicolare

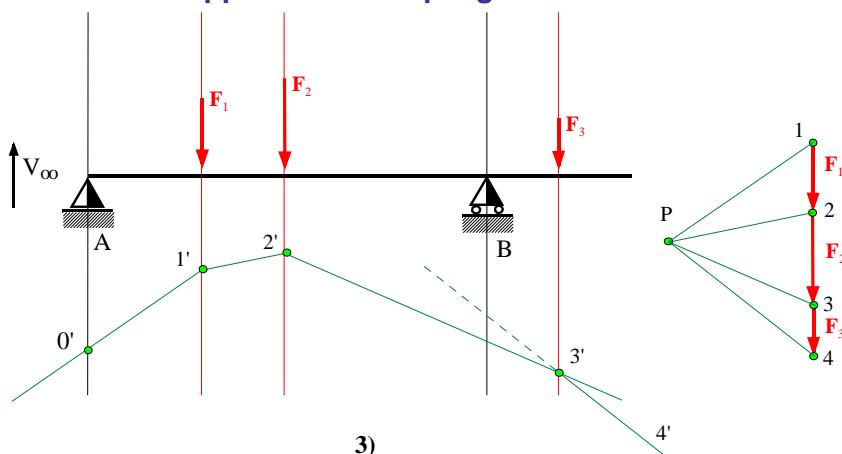


E pertanto le considerazioni abitualmente svolte, basate sulla convergenza di forze e reazioni in punti determinati, non sono in tal caso applicabili.

Si può però fare ricorso al procedimento del poligono funicolare, ricordando che per l'equivalenza a zero di un sistema di forze è necessario e sufficiente che:

- Il poligono delle forze sia chiuso;
- Il poligono funicolare sia chiuso.

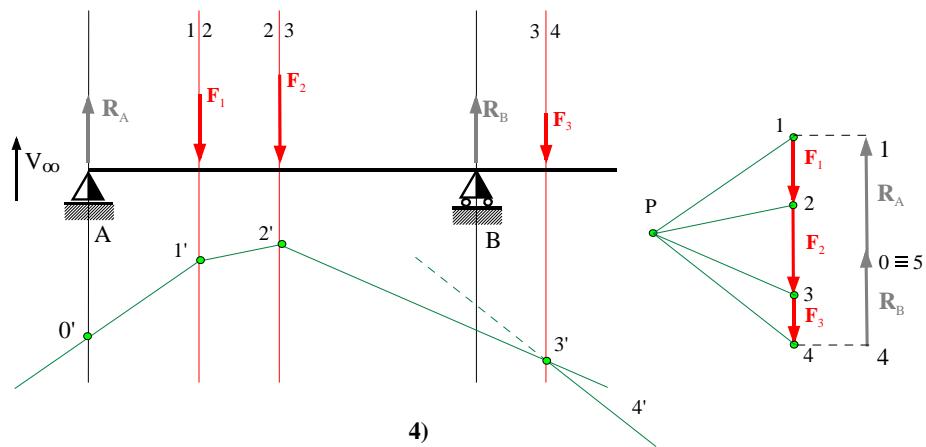
Applicazione del poligono funicolare



A tal fine si forma il poligono delle sole forze attive, e si costruisca il relativo poligono funicolare 1'2'3'4' con un qualsiasi polo P e con un qualsiasi punto di partenza. Si indichi con 0', la intersezione del primo lato del poligono funicolare con la verticale per A.

Si consideri che il sistema formato aggiungendo alle forze attive le reazioni (anche esse verticali) \mathbf{R}_A e \mathbf{R}_B deve essere equivalente a zero.

Applicazione del poligono funicolare

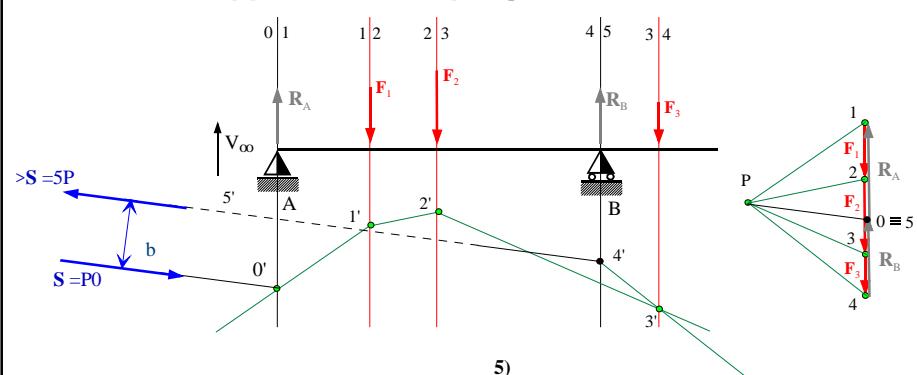


Si consideri che il sistema formato aggiungendo alle forze attive le reazioni (anche esse verticali) R_A e R_B deve essere equivalente a zero.

E pertanto la risultante $R_A + R_B$ deve essere uguale e contraria alla risultante delle forze attive $F_1 + F_2 + F_3$.

Indicando con 01 la reazione R_A e con 45 la reazione R_B , il poligono delle forze completo deve includere tali reazioni.

Applicazione del poligono funicolare

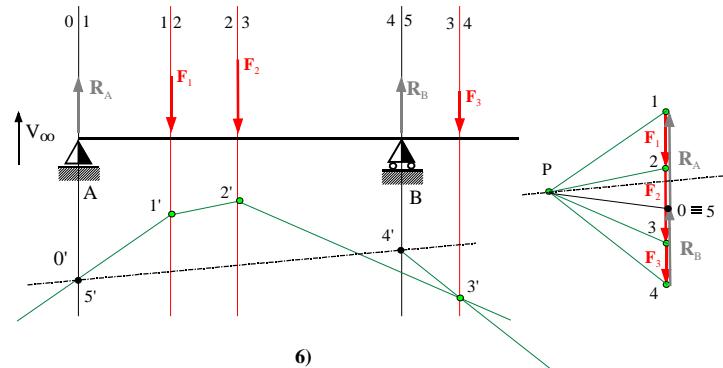


Indicando con 01 la reazione R_A e con 45 la reazione R_B , il poligono delle forze completo è quello indicato, ove però la posizione del punto 0 è arbitraria.

E infatti, completando il poligono funicolare, questo non risulta chiuso.

In altri termini, il sistema delle forze attive più le reazioni sarebbe in equilibrio alla traslazione (in quanto, comunque si scelga il punto 0, il poligono delle forze è chiuso), ma non in equilibrio alla rotazione in quanto sarebbe riducibile alla coppia, con braccio "b", formata dalle forze $S = P0$ e $>S = 5P$, prima e ultima proiettante del poligono delle forze.

Applicazione del poligono funicolare



E' evidente che lo squilibrio alla rotazione riscontrato dipende dalla arbitrarietà nella scelta del punto 0 sul poligono delle forze.

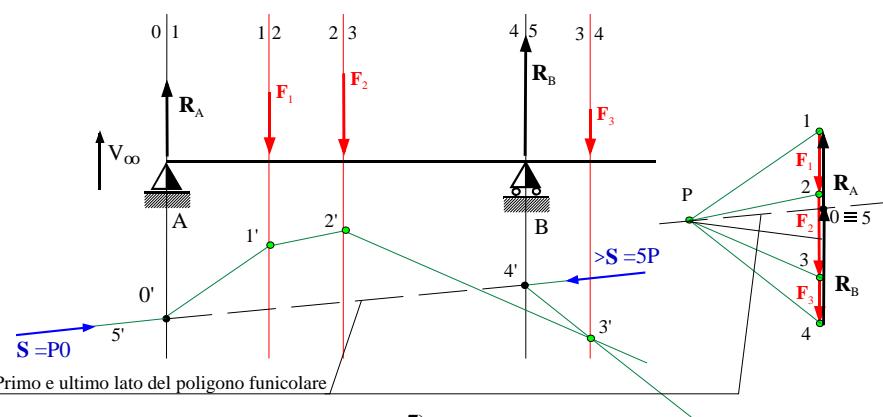
Tale errore è facilmente rimediabile, considerato che se il poligono funicolare deve risultare chiuso, primo e ultimo lato devono giacere sulla stessa retta. Dovendo il primo lato passare per 0' e l'ultimo passare per 4', l'unica possibilità è che primo e ultimo lato coincidano con la congiungente 0'4'.

Dovendo questa essere parallela alla congiungente P0, il punto 0 sul poligono delle forze viene identificato portando da P la parallela a 0'4', e intersecando con l'asse dove sono distese le forze e le reazioni.

In tal modo restano chiusi il poligono delle forze e il poligono funicolare, il sistema delle forze attive e reattive è equivalente a zero, e le reazioni R_A e R_B equilibrano le forze F_i .

6)

Applicazione del poligono funicolare



In tal modo restano chiusi il poligono delle forze e il poligono funicolare, il sistema delle forze attive e reattive forma una coppia di braccio nullo, ed è quindi equivalente a zero, e le reazioni R_A e R_B equilibrano compiutamente le forze F_i .

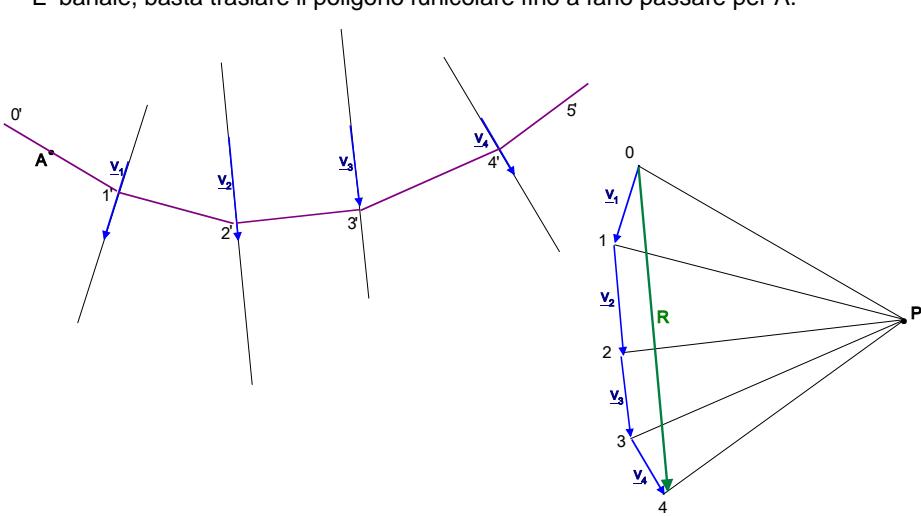
7)

Il Poligono Funicolare Parte II

Prof. Alessandro Baratta Lezioni di Scienza delle Costruzioni

Poligono Funicolare passante per 1 punto

E' banale, basta traslare il poligono funicolare fino a farlo passare per A.

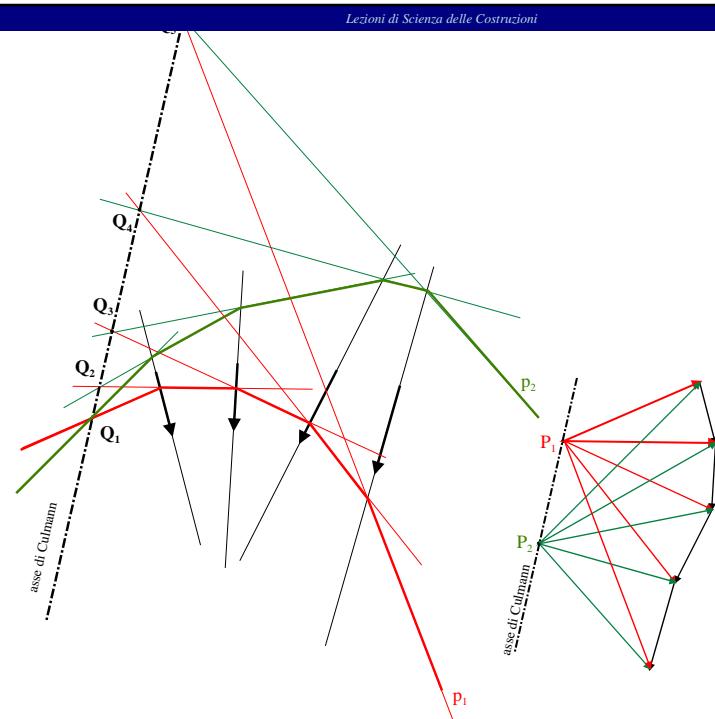


Teorema dello spostamento del polo

Si consideri un sistema di vettori, e si consideri il poligono p_1 che si ottiene da un qualsiasi polo P_1 .

Si consideri ora un nuovo polo P_2 e si consideri il nuovo poligono funicolare p_2 che così si ottiene.

Indipendentemente dai punti di partenza dei due poligoni funicolari, il lati omologhi si incontrano tutti in punti Q_1, \dots, Q_n che sono allineati su di una retta parallela alla congiungente i due poli P_1 e P_2 .

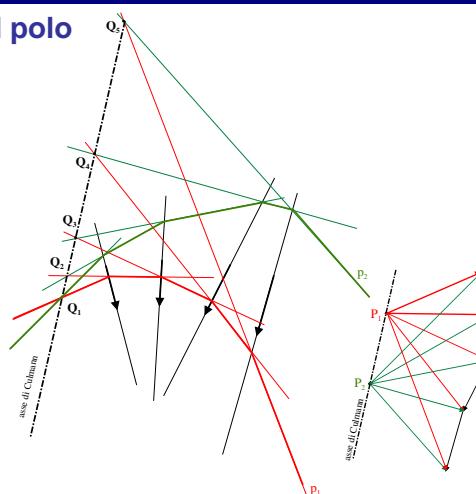


Teorema dello spostamento del polo (Teorema di Culmann)

Si consideri un sistema di vettori, e si consideri il poligono p_1 che si ottiene da un qualsiasi polo P_1 .

Si consideri ora un nuovo polo P_2 e si consideri il nuovo poligono funicolare p_2 che così si ottiene.

Indipendentemente dai punti di partenza dei due poligoni funicolari, il lati omologhi si incontrano tutti in punti Q_1, \dots, Q_n che sono allineati su di una retta parallela alla congiungente i due poli P_1 e P_2 .

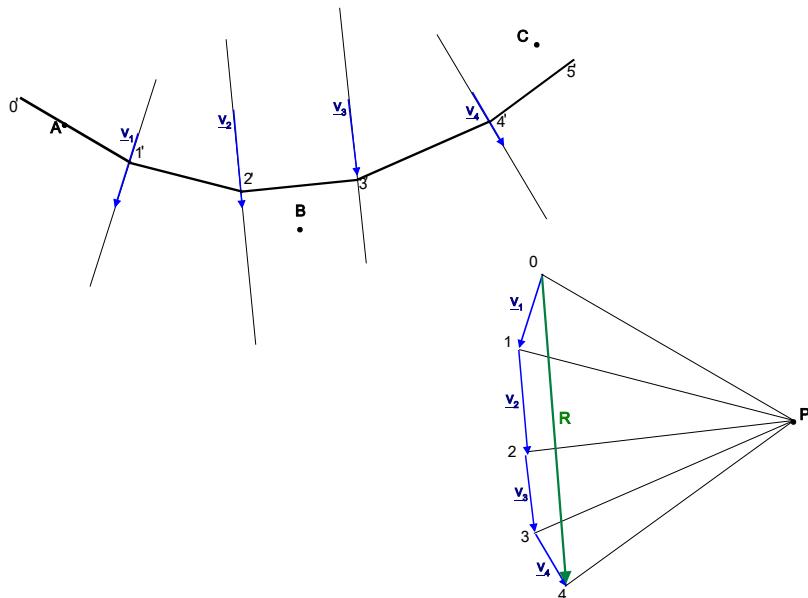


Dato un sistema piano di vettori, e costruiti due poligoni funicolari che connettono entrambi il dato sistema di vettori:

- a) i punti di intersezione dei lati omologhi sono allineati su una retta che prende il nome di "asse di Culmann";
- b) l'asse di Culmann è parallelo alla retta congiungente i due poli

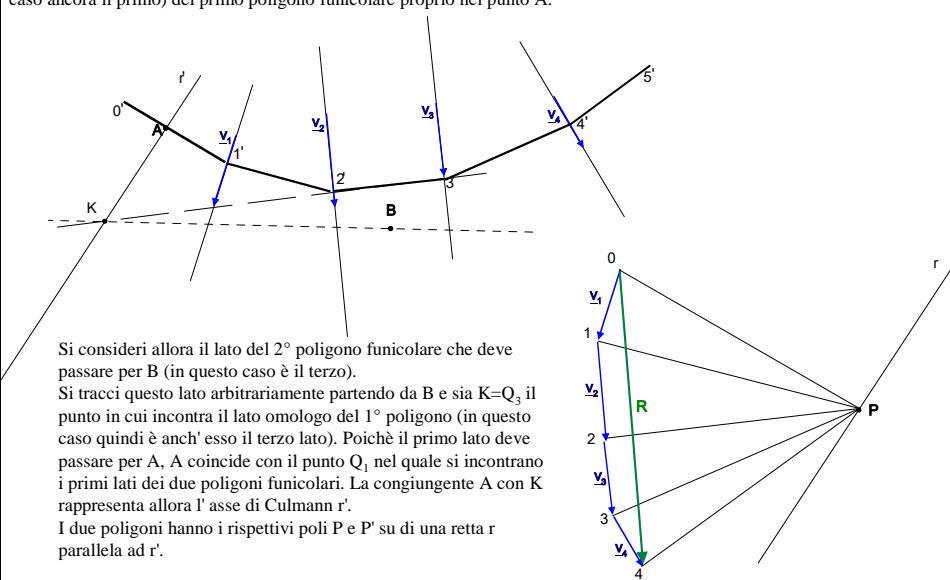
Poligono Funicolare passante per 2 punti: A e B

I° Passo: Si traccia un poligono funicolare con un polo qualsiasi passante per A



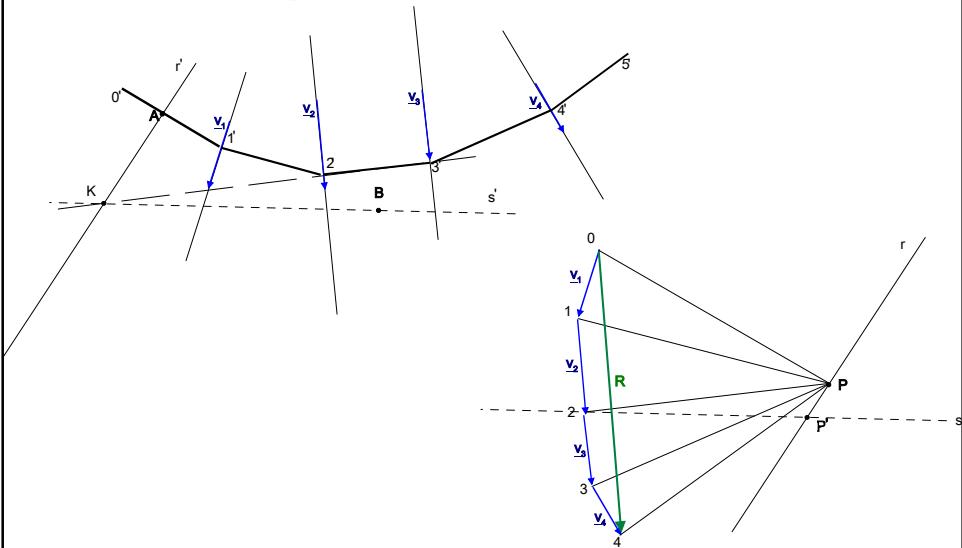
Poligono Funicolare passante per 2 punti

II° Passo: Si vuole tracciare un secondo poligono funicolare che oltre a passare per A passi anche per B. Si considera a tal fine che poiché tale poligono funicolare deve passare innanzitutto per A, il primo lato incontri il lato omologo (cioè in questo caso ancora il primo) del primo poligono funicolare proprio nel punto A.



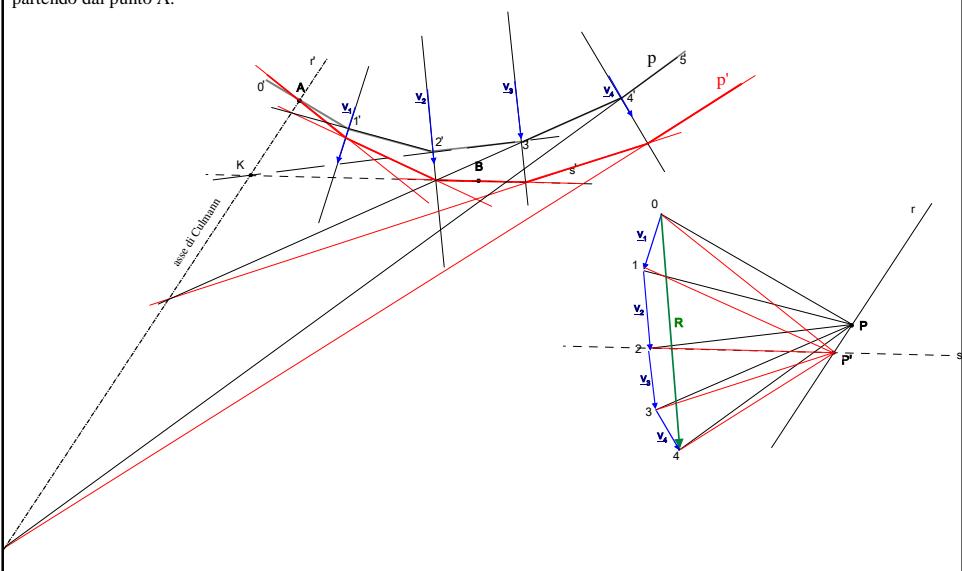
Poligono Funicolare passante per 2 punti

III° Passo: Poiché la retta BK rappresenta il terzo lato del poligono funicolare, questo deve connettere il vettore v_2 al vettore v_3 e pertanto deve essere parallela alla congiungente il nuovo polo P' con l'estremo 2 del vettore v_2 . Tracciando dal punto 2 la parallela a BK si ottiene una retta s su cui deve trovarsi il polo P' . Poiché P' deve trovarsi anche su r , il polo P' è determinato alla intersezione di s con r .

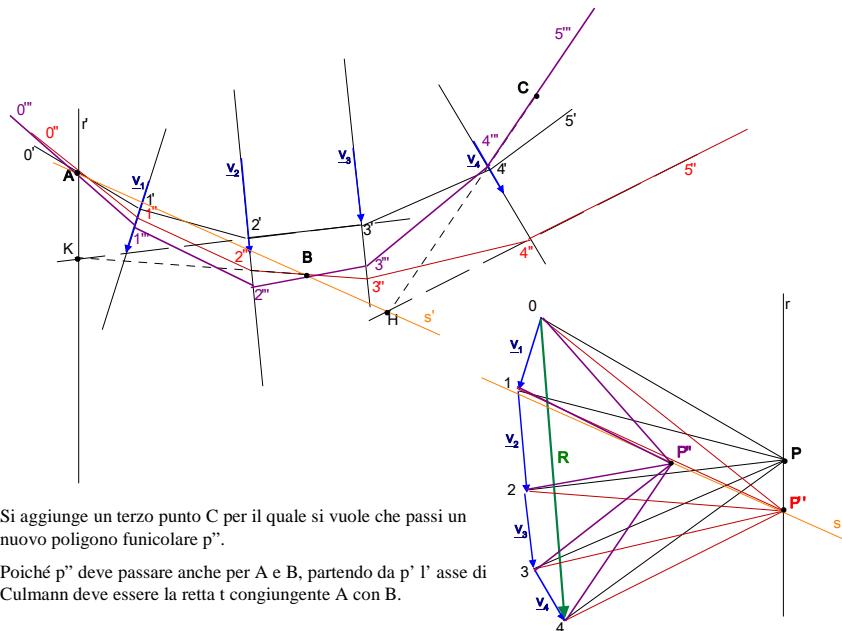


Poligono Funicolare passante per 2 punti

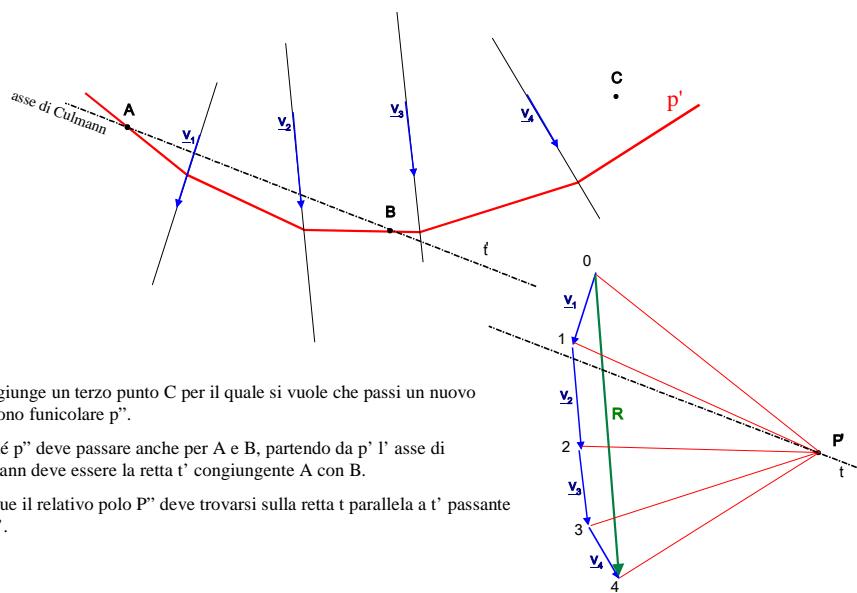
IV° Passo: A questo punto il poligono p' è individuato. Dato il polo P' basta disegnare il poligono funicolare di polo P' partendo dal punto A.



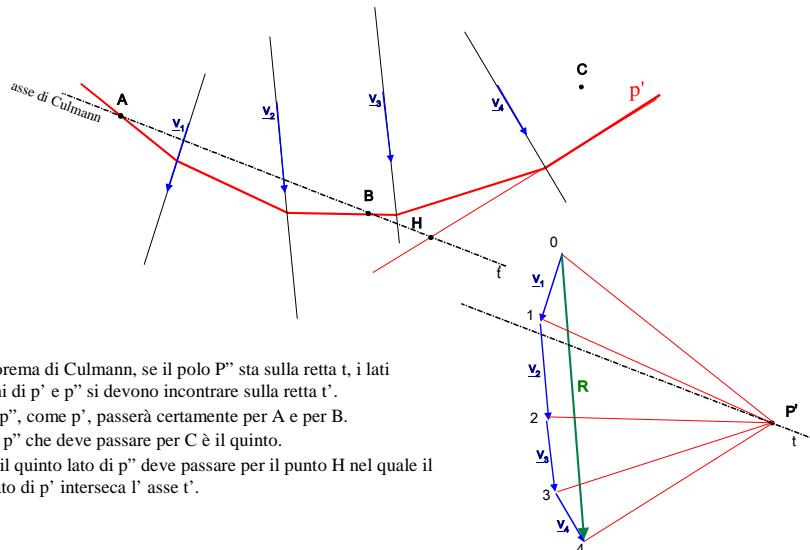
Poligono Funicolare passante per 3 punti: A, B e C



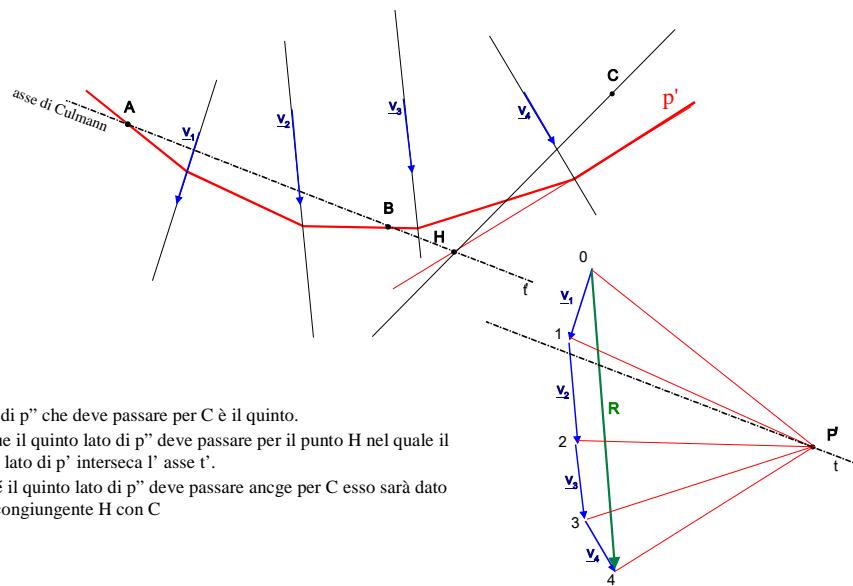
Poligono Funicolare passante per 3 punti



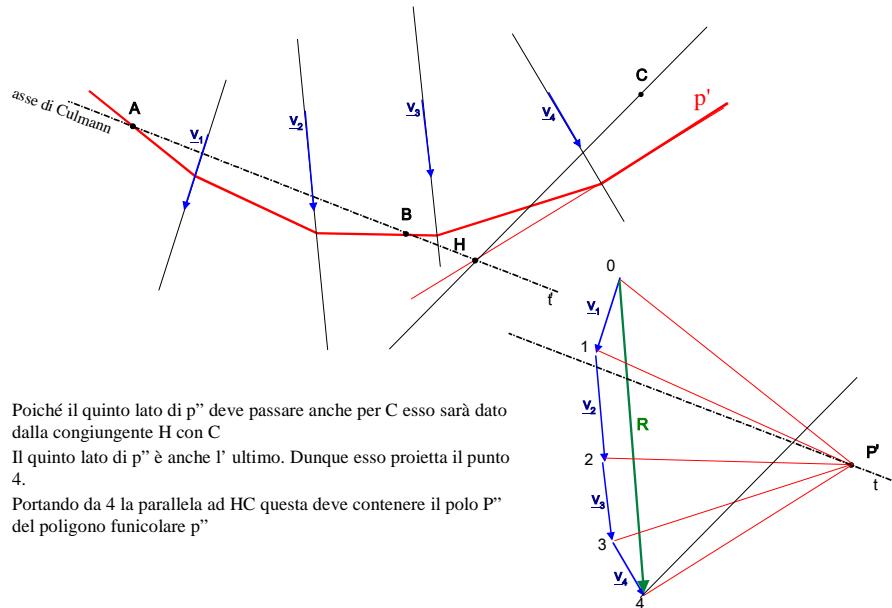
Polygono Funicolare passante per 3 punti



Polygono Funicolare passante per 3 punti

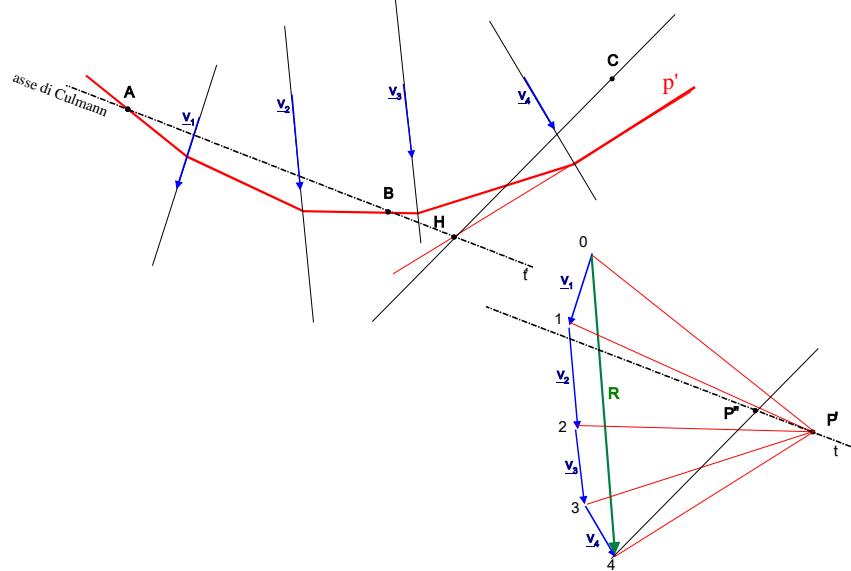


Poligono Funicolare passante per 3 punti

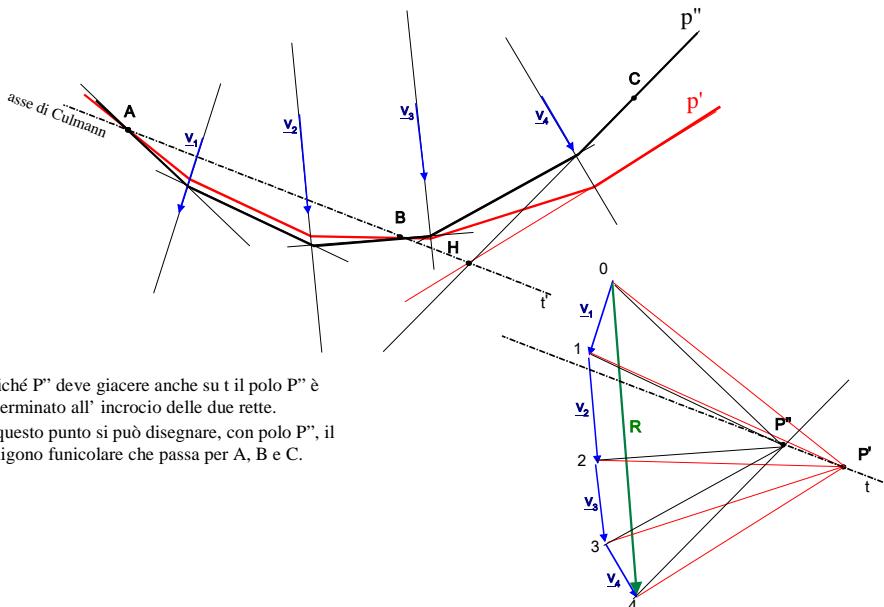


Poligono Funicolare passante per 3 punti

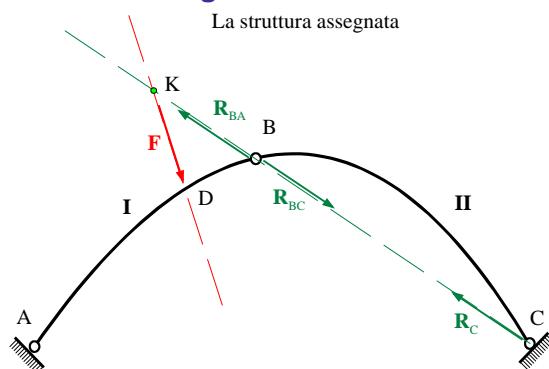
Portando da 4 la parallela ad HC questa deve contenere il polo P'' del poligono funicolare p''
Poiché P'' deve giacere anche su t il polo P'' è determinato all' incrocio delle due rette.



Poligono Funicolare passante per 3 punti



Ricerca grafica delle reazioni vincolari



1)

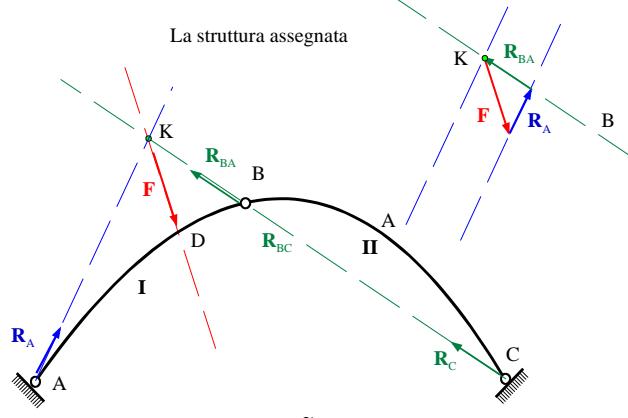
La struttura è soggetta a forze attive solo sul tratto AB. Sia \mathbf{F} la forza attiva (o la risultante delle forze attive) agente su AB.

Le reazioni vincolari in questo caso sono facilmente identificabili.

Infatti, per l'equilibrio del tratto BC le due reazioni R_{BC} e R_C devono essere direttamente opposte. E quindi devono entrambe giacere sulla congiungente BC, che è la loro comune retta di azione.

Per l' equilibrio del tratto AB, si considera che tale tratto è soggetto a 3 forze: La reazione $\mathbf{R}_{BA} = -\mathbf{R}_{BC}$, la forza \mathbf{F} , e la reazione \mathbf{R}_A che è applicata in A. Per l' equilibrio alla rotazione le 3 forze devono passare per uno stesso punto. Tale punto non può essere altro che il punto di intersezione K della retta di azione di \mathbf{R}_{BA} con la retta di azione di \mathbf{F} .

Ricerca grafica delle reazioni vincolari



Per l' equilibrio alla rotazione le 3 forze agenti sul tratto AB devono passare per uno stesso punto. Tale punto non può essere altro che il punto di intersezione K della retta di azione di R_{BA} con la retta di azione di F .

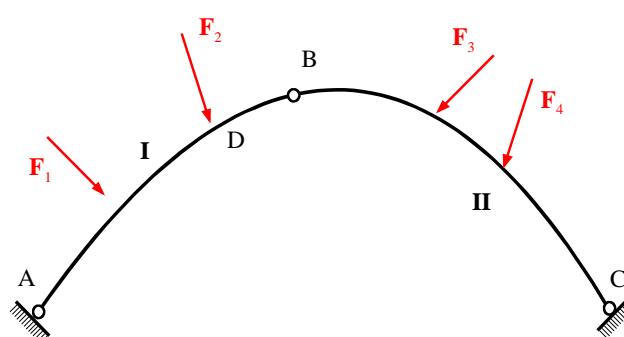
E pertanto la retta di azione di R_A è la congiungente AK. Con il che resta assicurato l' equilibrio alla rotazione del tratto AB.

Per l' equilibrio alla traslazione del medesimo tratto, deve essere chiuso il poligono delle forze R_{BA} , F , R_A , agenti su tale tratto. Il che consente di identificare R_A e R_{BA} , decomponendo F secondo le direzioni AK e BK.

Nota R_{BA} , Essendo $R_{BC} = -R_{BA}$ e $R_C = -R_{BC}$, restano risolte tutte le reazioni, esterne e interne.

Applicazione del poligono funicolare per 3 punti

La struttura assegnata: I due tratti sono entrambi carichi



1)

In questo caso il tratto BC è caricato e le reazioni R_{BC} e R_C non hanno la stessa retta di azione, nè questa può essere identificata sulla base delle condizioni di equilibrio di un unico tratto.

In altri termini, il sistema delle equazioni di equilibrio non è scindibile in sottosistemi.

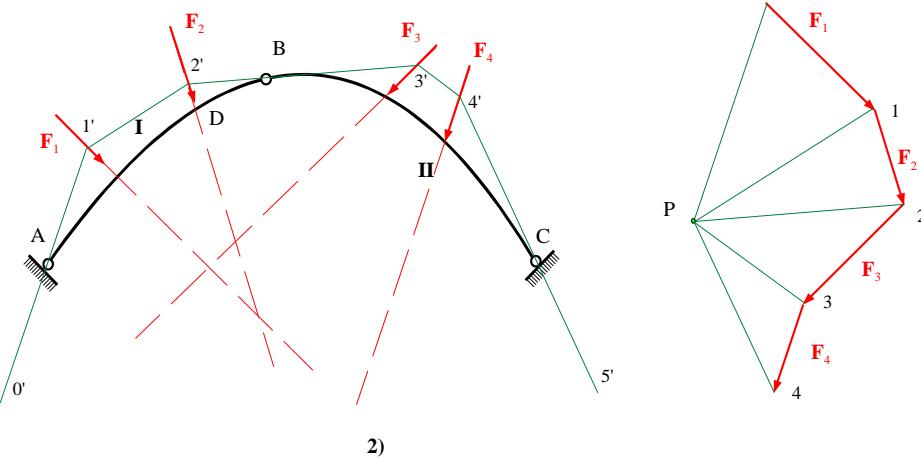
La soluzione può essere solo ottenuta tramite la soluzione simultanea di tutte le condizioni di equilibrio.

Lo strumento grafico che soccorre a tale scopo è il poligono funicolare.

Applicazione del poligono funicolare per 3 punti

La struttura assegnata: I due tratti sono entrambi carichi

Poligono funicolare per A, B, C

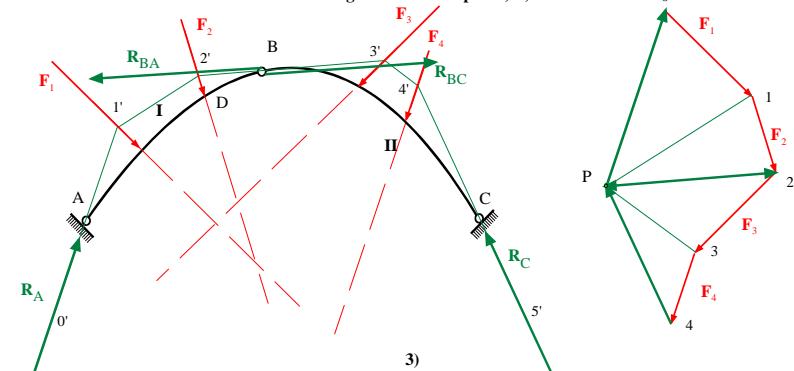


Si costruisca il poligono funicolare delle forze \mathbf{F}_i passante per i punti A, B, C

Applicazione del poligono funicolare per 3 punti

La struttura assegnata: I due tratti sono entrambi carichi

Poligono funicolare per A, B, C



Costruito il poligono funicolare delle forze \mathbf{F}_i passante per le 3 cerniere A, B, C, le forze esterne restano individuate dalle reazioni $\mathbf{P}0$ e $4\mathbf{P}$, applicate a primo e ultimo lato del poligono funicolare, che pertanto coincidono con \mathbf{R}_A e \mathbf{R}_B .

La interazione nella cerniera B si identifica con la forza $\mathbf{P}2$, applicata al terzo lato del poligono funicolare, che è il lato passante per la cerniera B. E infatti, se si considera il poligono $\mathbf{P}0+01+12+2\mathbf{P}$, che è il poligono delle forze \mathbf{R}_A , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{R}_{BA} , questo risulta chiuso dimostrando che il tratto I è in equilibrio alla traslazione.

D'altra parte, \mathbf{R}_A e \mathbf{R}_{BA} sono il primo e ultimo lato del poligono funicolare $0'1'2'3'$ che connette le forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . E quindi il tratto I è in equilibrio anche rispetto alla rotazione.

Analogamente si ragiona per il tratto II. Il poligono $\mathbf{P}2+3+4+4\mathbf{P}$, che è il poligono delle forze \mathbf{R}_{BC} , \mathbf{F}_3 , \mathbf{F}_4 , \mathbf{R}_C , è chiuso, e quindi il tratto II è in equilibrio alla traslazione. D'altra canto \mathbf{R}_{BC} e \mathbf{R}_C sono il primo e ultimo lato del poligono funicolare $2'3'4'5'$ che connette le forze \mathbf{F}_3 e \mathbf{F}_4 . E quindi il tratto II è in equilibrio anche rispetto alla rotazione.