

Problema 1

Si considerino le 4 cifre (da 0 a 9) della combinazione di una cassaforte.
Calcolare la probabilità che:

- 1) tutte le cifre siano diverse (evento E_1);
- 2) vi siano almeno due cifre uguali (evento E_2);
- 3) vi siano esattamente due cifre uguali (evento E_3);
- 4) vi siano due coppie di cifre uguali (evento E_4);
- 5) vi siano esattamente due cifre uguali non consecutive (evento E_5).

Soluzione.

Il numero di casi possibili equiprobabili è dato da $D'_{10,4}=10^4$.

1) I casi favorevoli sono $D_{10,4}=10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7=5040$, quindi $Pr[E_1]=\frac{5040}{10^4}=0.504$.

2) $Pr[E_2]=1-Pr[E_1]=1-0.504=0.496$ (i casi favorevoli sono $10^4-5040=4960$).

3) La cifra che si ripete due volte può essere scelta in 10 modi diversi. Le posizioni in cui si può trovare sono $C_{4,2}=6$ ($XX--$; $X-X-$; $X--X$; $-XX-$; $-X-X$; $--XX$).

La terza e la quarta cifra possono poi essere scelte in 9 e in 8 modi diversi. I casi favorevoli sono quindi $10 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8=4320$.

$$Pr[E_3]=\frac{4320}{10^4}=0.432.$$

4) Le due differenti cifre che si ripetono due volte possono essere scelte in $C_{10,2}=\frac{10 \cdot 9}{2}=45$ modi diversi. Le posizioni possibili sono sei (le stesse elencate nella risposta precedente). I casi favorevoli sono quindi $45 \cdot 6=270$.

$$Pr[E_4]=\frac{270}{10^4}=0.027.$$

5) Si ragiona come nella risposta 3), ora però le posizioni possibili per la cifra che si ripete sono soltanto 3 ($X-X-$; $X--X$; $-X-X$), i casi favorevoli sono pertanto $10 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 8=2160$.

$$Pr[E_5]=\frac{2160}{10^4}=0.216.$$

Problema 2

Si consideri un numero di 4 cifre (in base 10).

Calcolare la probabilità che:

- 1) tutte le cifre siano diverse (evento E_1);
- 2) vi siano almeno due cifre uguali (evento E_2);
- 3) vi siano esattamente due cifre uguali (evento E_3);
- 4) vi siano due coppie di cifre uguali (evento E_4);
- 5) vi siano esattamente due cifre uguali non consecutive (evento E_5).

Soluzione.

Rispetto al problema precedente c'è la differenza che il numero non può avere la cifra 0 al primo posto. Il numero di casi possibili equiprobabili è dato quindi da $9 \cdot D'_{10,3}=9 \cdot 10^3=9000$.

1) I casi favorevoli sono $9 \cdot D_{9,3}=9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7=4536$, quindi $Pr[E_1]=\frac{4536}{9000}=0.504$.

2) $Pr[E_2]=1-Pr[E_1]=1-0.504=0.496$ (i casi favorevoli sono $9000-4536=4464$).

3) Scomponiamo l'evento E_3 in tre eventi incompatibili:

$A = \{\text{La cifra che si ripete è } 0\}$;

$B = \{\text{La cifra che si ripete non è } 0 \text{ e si trova al primo posto}\}$

$C = \{\text{La cifra che si ripete non è } 0 \text{ e non si trova al primo posto}\}$

I casi favorevoli all'evento A sono $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$ (3 posizioni possibili per la coppia 0,0 e 9 e 8 modi per scegliere le altre due cifre).

I casi favorevoli all'evento B sono $9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 8 = 1944$ (9 coppie possibili, 3 posizioni possibili per la coppia, 9 e 8 modi per scegliere le altre due cifre).

I casi favorevoli all'evento C sono $9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8 = 1728$ (9 coppie possibili, 3 posizioni possibili per la coppia, 8 modi per scegliere la cifra al primo posto e 8 modi per scegliere l'altra).

I casi favorevoli all'evento E_3 sono quindi $216 + 1944 + 1728 = 3888$.

$$Pr(E_3) = \frac{3888}{9000} = 0.432.$$

4) Scomponiamo l'evento E_4 in due eventi incompatibili:

$A = \{\text{Le due cifre diverse che si ripetono sono diverse da } 0\}$;

$B = \{\text{Una delle cifre che si ripete è } 0\}$

I casi favorevoli all'evento A sono $36 \cdot 6 = 216$ ($C_{9,2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ modi per scegliere le due cifre e 6 disposizioni possibili).

I casi favorevoli all'evento B sono $9 \cdot 3 = 27$ (9 modi per scegliere la seconda cifra che si ripete, 3 disposizioni possibili).

I casi favorevoli all'evento E_4 sono quindi $216 + 27 = 243$.

$$Pr(E_4) = \frac{243}{9000} = 0.027.$$

5) Come per la risposta 3) scomponiamo l'evento E_5 in tre eventi incompatibili:

$A = \{\text{La cifra che si ripete è } 0\}$;

$B = \{\text{La cifra che si ripete non è } 0 \text{ e si trova al primo posto}\}$

$C = \{\text{La cifra che si ripete non è } 0 \text{ e non si trova al primo posto}\}$

I casi favorevoli all'evento A sono $9 \cdot 8 = 72$ (la coppia 0,0 può essere solo in una posizione e 9 e 8 sono i modi per scegliere le altre due cifre).

I casi favorevoli all'evento B sono $9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 = 1296$ (9 coppie possibili, 2 posizioni possibili per la coppia, 9 e 8 modi per scegliere le altre due cifre).

I casi favorevoli all'evento C sono $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ (9 coppie possibili, una sola posizione possibile per la coppia, 8 modi per scegliere la cifra al primo posto e 8 modi per scegliere l'altra).

I casi favorevoli all'evento E_5 sono quindi $72 + 1296 + 576 = 1944$.

$$Pr(E_5) = \frac{1944}{9000} = 0.216.$$

Osservazione.

I risultati dei due problemi sono uguali perché per tutti gli eventi considerati e per lo spazio campionario, passando dal primo al secondo problema, si ha una riduzione della numerosità pari a un decimo.

Se si considera invece l'evento $E_6 = \{\text{la somma delle cifre è maggiore o uguale a } 35\}$ tale evento è costituito, sia nel primo che nel secondo problema, dagli allineamenti $\{(9,9,9,9); (9,9,9,8); (9,9,8,9); (9,8,9,9); (8,9,9,9)\}$, si ha pertanto, rispettivamente,

$$Pr(E_6) = \frac{5}{10000} = 0.0005 \text{ e } Pr(E_6) = \frac{5}{9000} = 0.000555556.$$