Esercitazione di Matematica

Indice esercitazione

Funzioni reali di variabile reale

- Operazioni sui grafici di funzione
  - traslazione
  - riflessione
  - dilatazione-contrazione

Operazioni sui grafici di funzione

Conoscendo il grafico di una funzione $y = f(x)$, mediante semplici trasformazioni geometriche, è possibile ottenere il grafico delle funzioni seguenti:

- $y_1 = f(x) + a, \ \forall a \in R$
- $y_2 = f(x + a), \ \forall a \in R$
- $y_3 = k \cdot f(x), \ \forall k \in R$
- $y_4 = f(kx), \ \forall k \in R$
- $y_5 = \left| f(x) \right|$
- $y_6 = f(|x|)$

Operazioni sui grafici di funzione

In particolare, operazioni di questo tipo possono essere effettuate in sequenza, ottenendo così, a partire dal grafico delle funzioni elementari, i grafici di una grande varietà di nuove funzioni.

Illustriamo ora il significato di tali operazioni

Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

Consideriamo ad esempio la funzione $y = f(x)$.

Allora, conoscendo il suo grafico, vogliamo ottenere il grafico di

$$y_1 = f(x) + a\,, \quad \forall a \in R$$

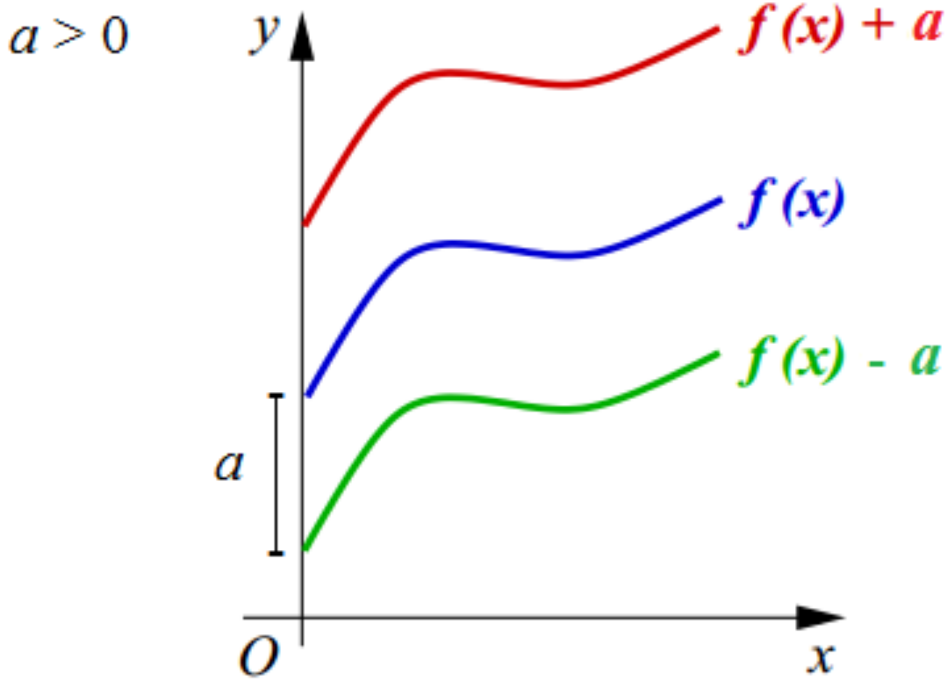
La funzione $y_1 = f(x) + a$ ha lo stesso dominio della funzione $y = f(x)$ e il suo grafico si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ applicando una *traslazione verticale* di a unità :

$(a > 0)$

- $y_1 = f(x) + a\,,$ *traslazione verticale verso l'alto di* a unità
- $y_1 = f(x) - a\,,$ *traslazione verticale verso il basso di* a unità

Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

- $y_1 = f(x) + a$, *traslazione verticale verso l'alto di* a unità
- $y_1 = f(x) - a$, *traslazione verticale verso il basso di* a unità

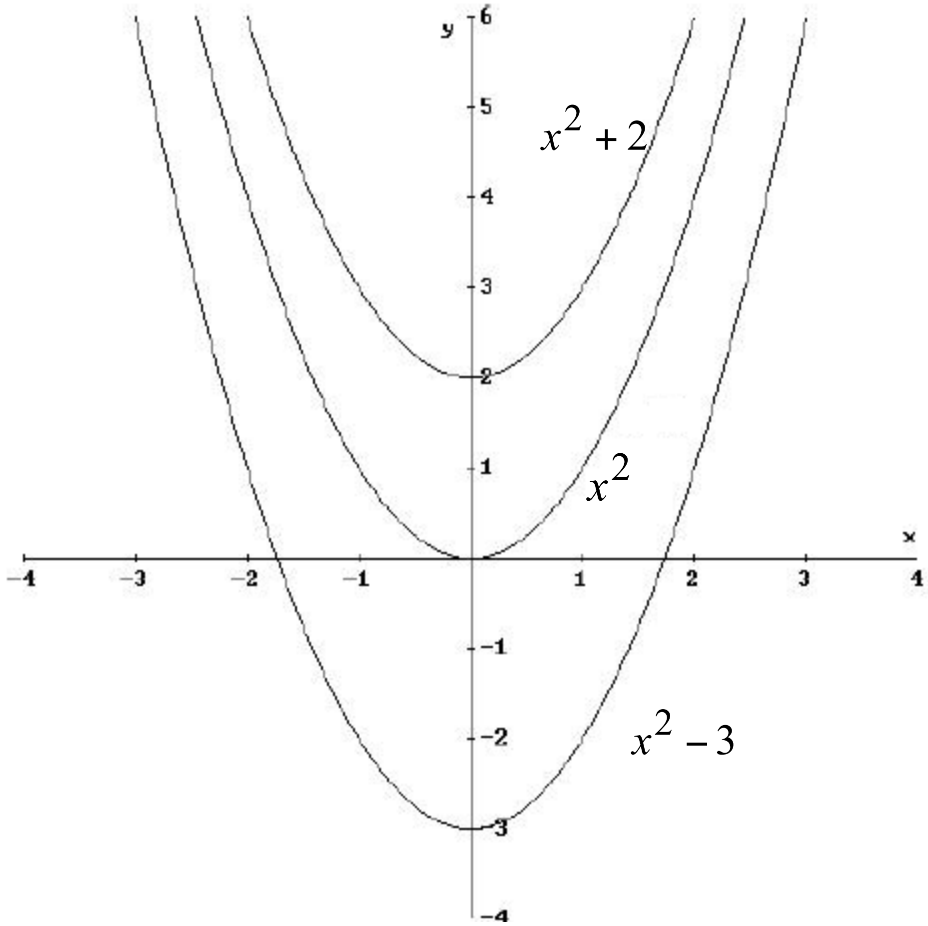


Infatti, la quantità a, viene aggiunta al valore della funzione f dopo che questo è stato calcolato (non viene aggiunta alla variabile)

Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

Esempio

- $y = x^2$
- $y_1 = x^2 + 2$
- $y_1 = x^2 - 3$



Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

Consideriamo ad esempio la funzione $y = f(x)$.

Allora, conoscendo il suo grafico, vogliamo ottenere il grafico di

$$y_2 = f(x+a)$$

Il grafico della funzione $y_2 = f(x+a)$ si ottiene dal grafico

di $y = f(x)$ applicando una traslazione orizzontale di a unità:

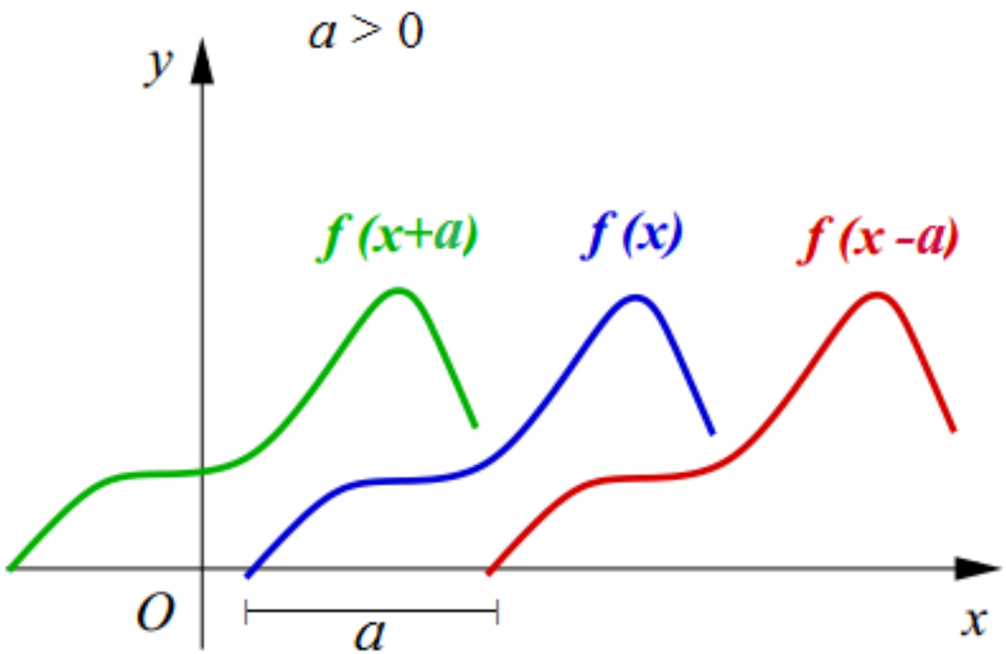
$(a > 0)$

- $y_1 = f(x+a)$, *traslazione orizzontale verso sinistra di* a unità
- $y_1 = f(x - a)$, *traslazione orizzontale verso destra di* a unità

Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

- $y_1 = f(x+a)$, *traslazione orizzontale verso sinistra di* a unità

- $y_1 = f(x - a)$, *traslazione orizzontale verso destra di* a unità

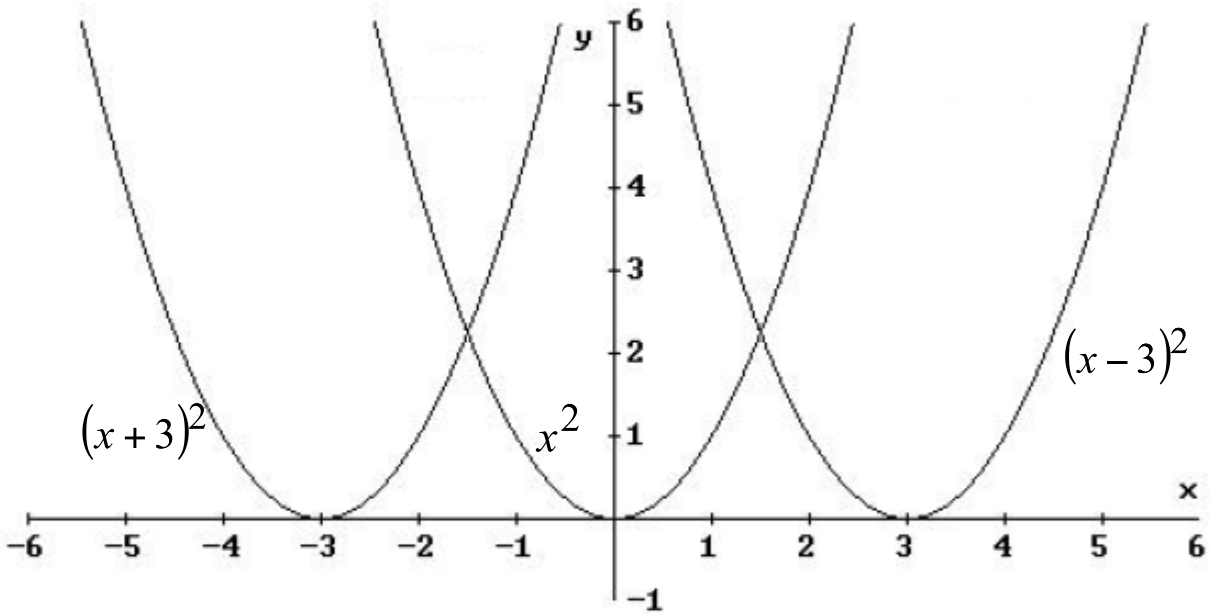


Infatti, la quantità a, viene aggiunta alla variabile

Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

Esempio

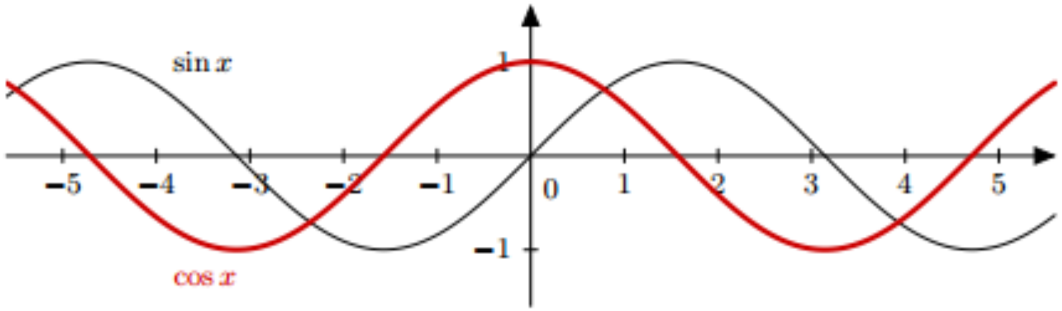
- $y = x^2$
- $y_1 = (x+3)^2$
- $y_1 = (x-3)^2$



Operazioni sui grafici di funzione: traslazione

Osservazione.

- $y = \sin x$
- $y = \cos x \ = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$



Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

Consideriamo ad esempio la funzione $y = f(x)$. Allora, conoscendo il suo grafico, vogliamo ottenere il grafico di

$$y_3 = k \cdot f(x), \ \forall k \in R$$

Il grafico della funzione $y_3 = kf(x)$ si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ effettuando un cambiamento di scala sull'asse delle y

Operazioni sui grafici di funzione: riflessione

$$y_3 = k \cdot f(x), \ \forall k \in R$$

Caso particolare: $k = -1$

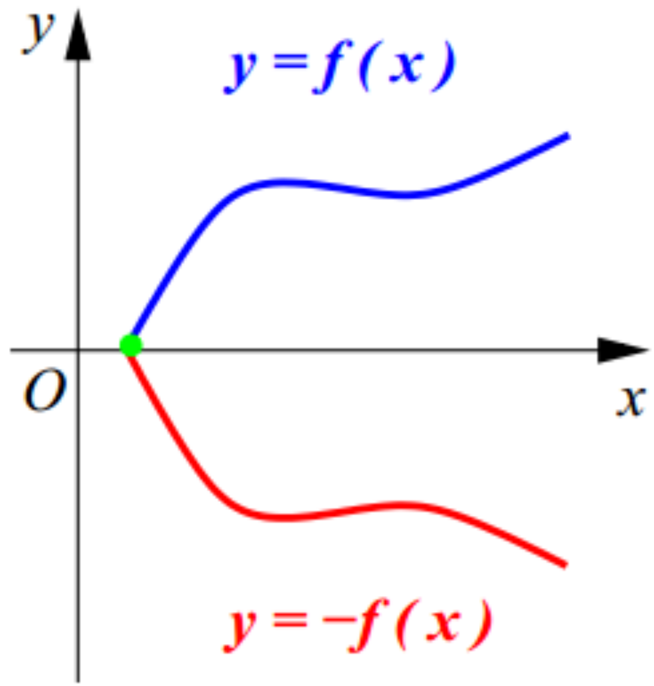
$$y_3 = -f(x)$$

Avviene una *riflessione* rispetto all'asse x:

il grafico è il *simmetrico di* $y=f(x)$ rispetto all'asse x.

Operazioni sui grafici di funzione: riflessione

$y_3 = -f(x)$: avviene una *riflessione* rispetto all'asse x e il grafico è il *simmetrico di* $y=f(x)$ rispetto all'asse x.

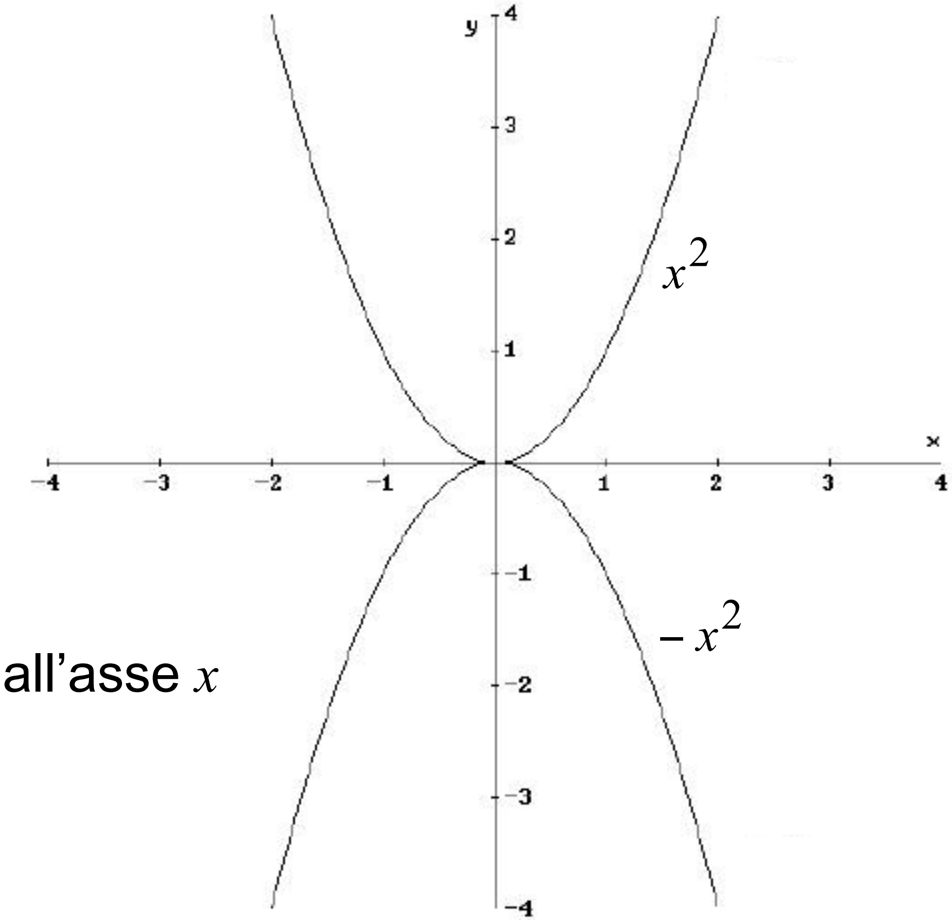


Osservazione: i punti di intersezione con l'asse x restano invariati

Operazioni sui grafici di funzione: riflessione

Esempio

- $y = x^2$
- $y = -x^2$



È avvenuta una riflessione rispetto all'asse x

Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

$$y_3 = k \cdot f(x), \ \forall k \in R$$

Il grafico si ottiene dal grafico di $y = f(x)$

dilatandosi o contraendosi nella direzione verticale

Caso: $k > 1$

dilatazione in direzione verticale: verso l'alto per le ordinate positive e verso il basso per quelle negative

Caso: $0 < k < 1$

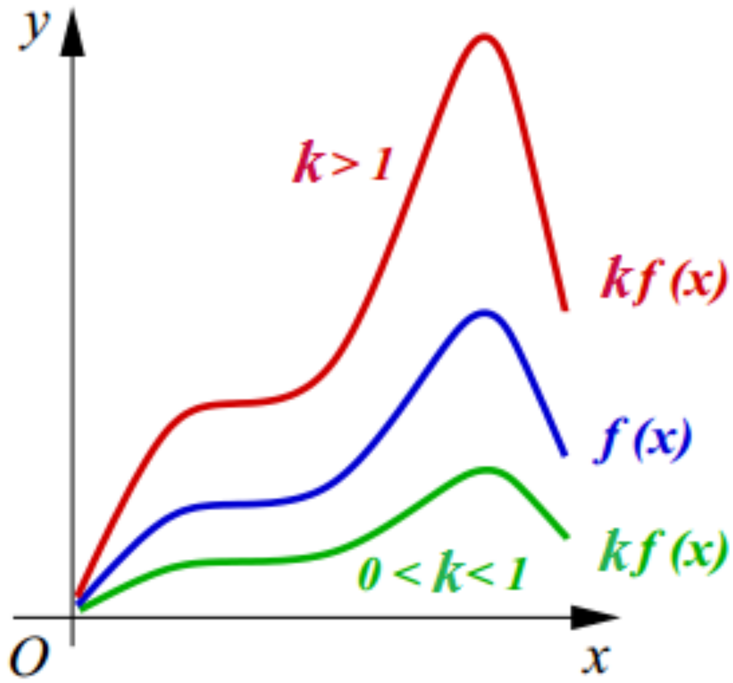
contrazione in direzione verticale: verso il basso per le ordinate positive e verso l'alto per quelle negative

Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

$$y_3 = k \cdot f(x)$$

Caso: $k > 1$: *dilatazione* verso l'alto delle ordinate positive e verso il basso di quelle negative

Caso: $0 < k < 1$: *contrazione* verso il basso delle ordinate positive e verso l'alto di quelle negative

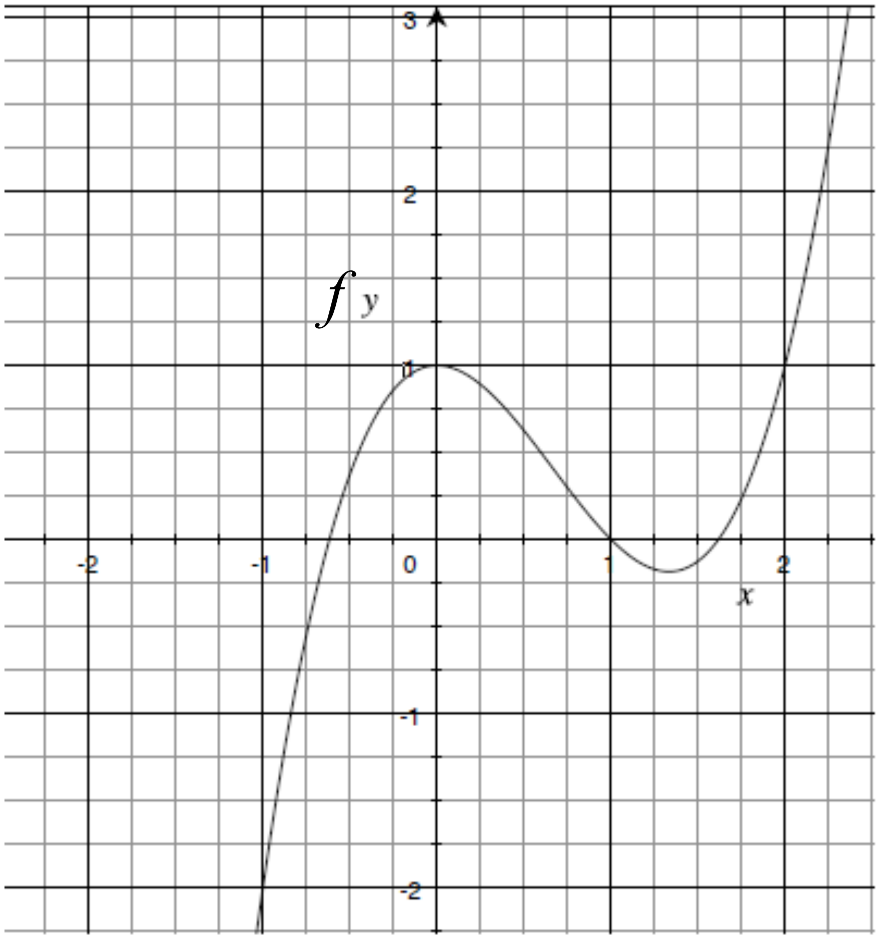


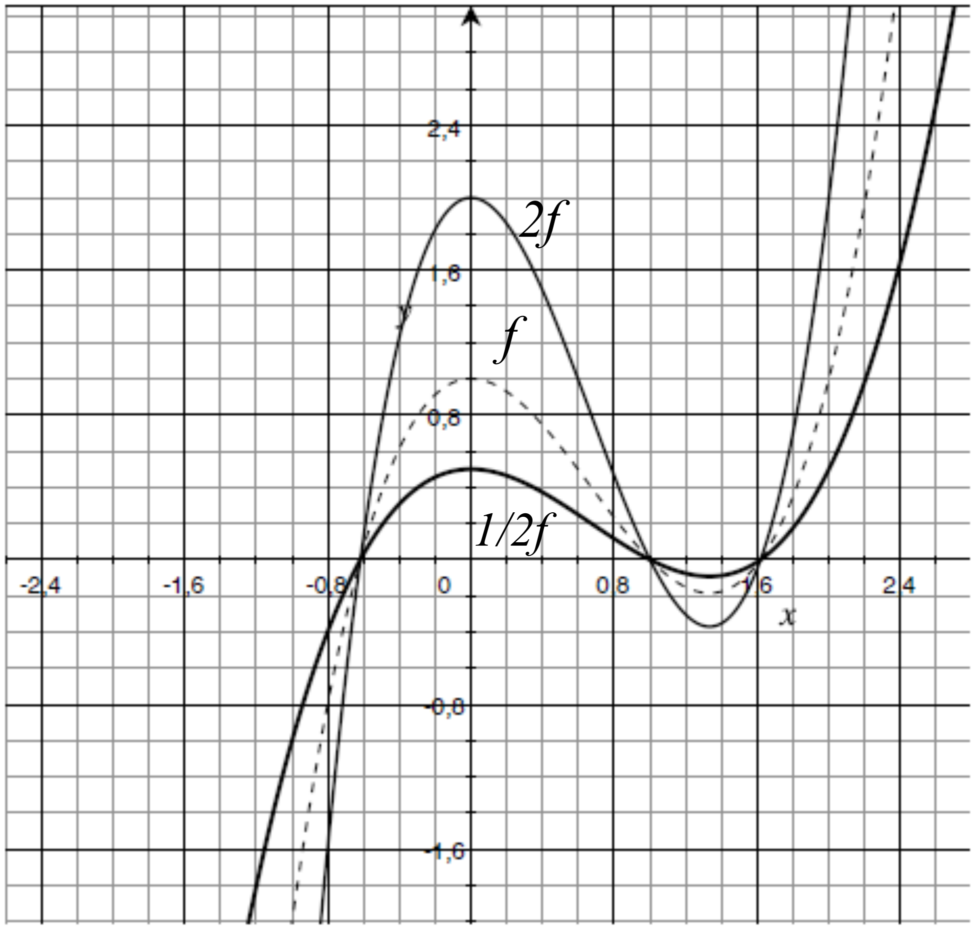
Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

Caso: $k > 1$: *dilatazione verticale*

Caso: $0 < k < 1$: *contrazione verticale*

Le funzioni f, $2f$ e $\frac{1}{2}f$





Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

$$y_3 = k \cdot f(x), \ \forall k \in R$$

Il grafico si ottiene dal grafico di $y = f(x)$

dilatandosi o contraendosi nella direzione verticale

Caso: $k < 0$

Avviene prima una riflessione rispetto all'asse x

e poi una dilatazione o contrazione in direzione verticale

Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

Consideriamo ad esempio la funzione $y = f(x)$.

Allora, conoscendo il suo grafico, vogliamo ottenere il grafico di

$$y_4 = f(kx), \ \forall k \in R$$

Il grafico della funzione $y_4 = f(kx)$ si ottiene dal grafico di

$y = f(x)$ effettuando un cambiamento di scala sull'asse delle x.

Operazioni sui grafici di funzione: riflessione

$$y_4 = f(kx), \ \forall k \in R$$

Caso particolare: $k = -1$

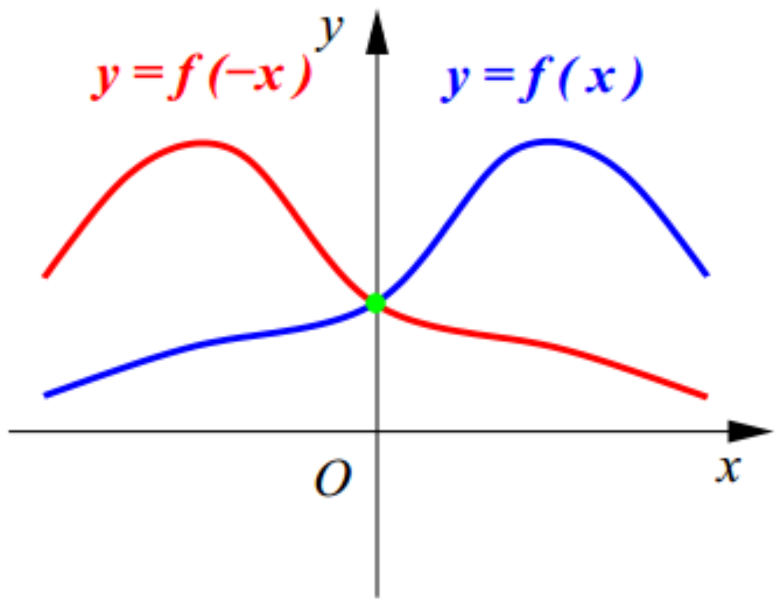
$$y_4 = f(-x)$$

Avviene una *riflessione* rispetto all'asse y:

il grafico è il *simmetrico* di $y=f(x)$ rispetto all'asse y

Operazioni sui grafici di funzione: riflessione

$y_4 = f(-x)$: avviene una *riflessione* rispetto all'asse y e il grafico è il *simmetrico* di $y=f(x)$ rispetto all'asse y

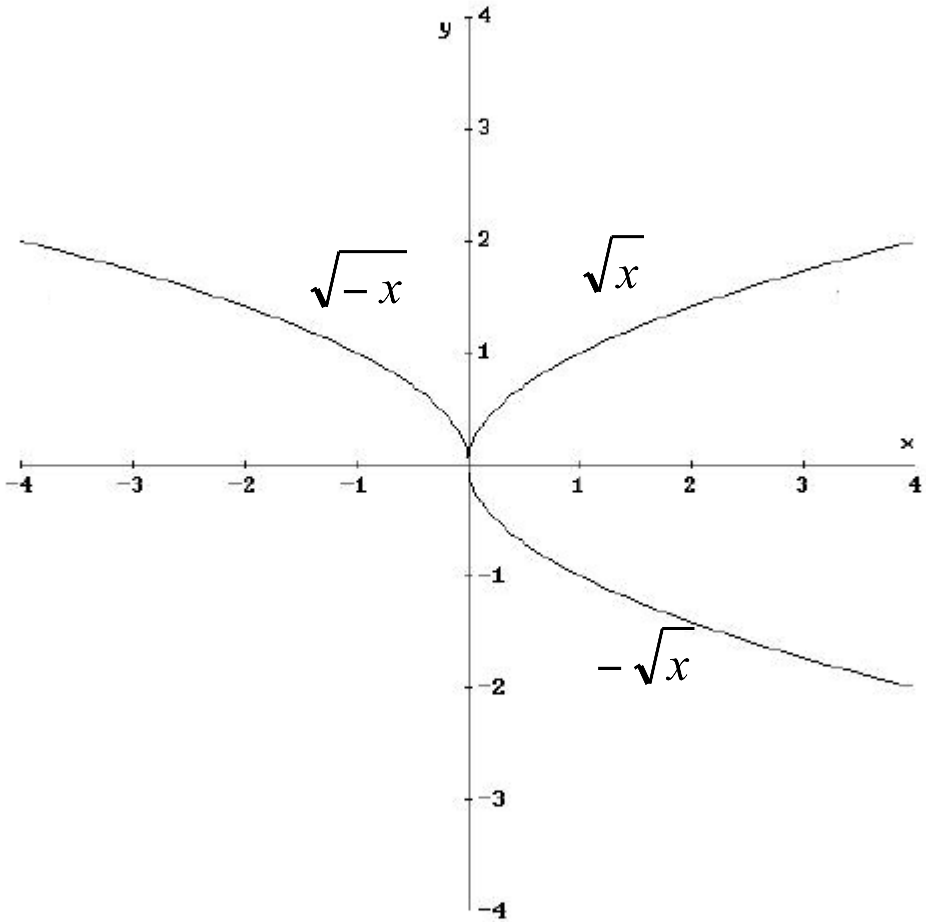


Osservazione: i punti di intersezione con l'asse y restano invariati

Operazioni sui grafici di funzione: riflessione

Esempio

- $y = \sqrt{x}$
- $y = \sqrt{-x}, \quad \text{con}\, x \le 0$
- $y = -\sqrt{x}$



Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

$$y_4 = f(kx),\ \forall k \in R$$

Il grafico si ottiene dal grafico di $y = f(x)$

dilatandosi o contraendosi nella direzione orizzontale

Caso: $k > 1$

kx cresce più rapidamente di x e quindi il grafico è simile ma più *contratto* in direzione orizzontale

Caso: $0 < k < 1$

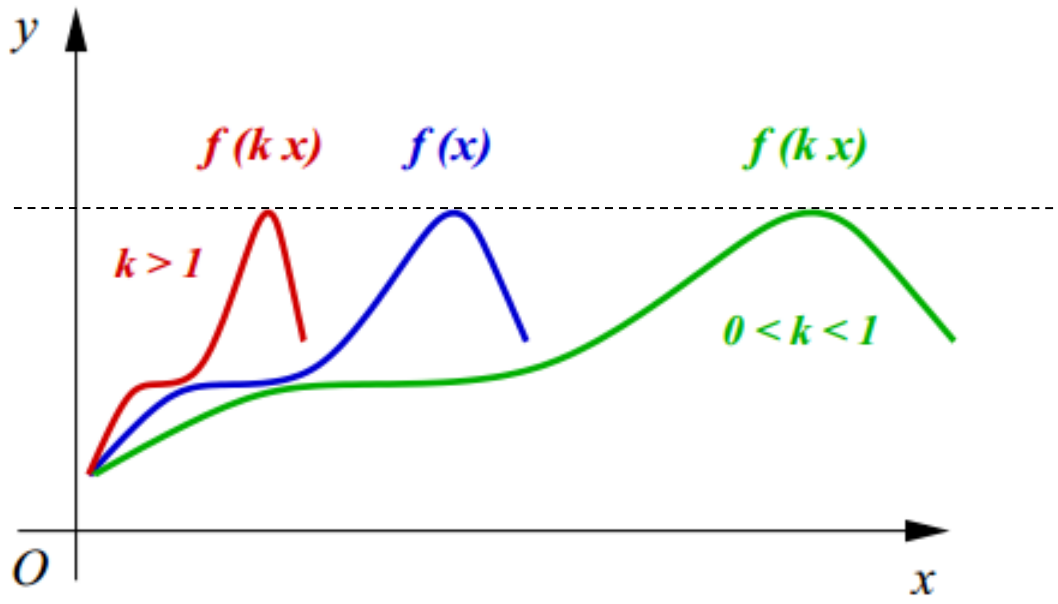
il grafico apparirà *dilatato* in direzione orizzontale

Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

$$y_4 = f(kx)$$

Caso: $k > 1$: contrazione in direzione orizzontale

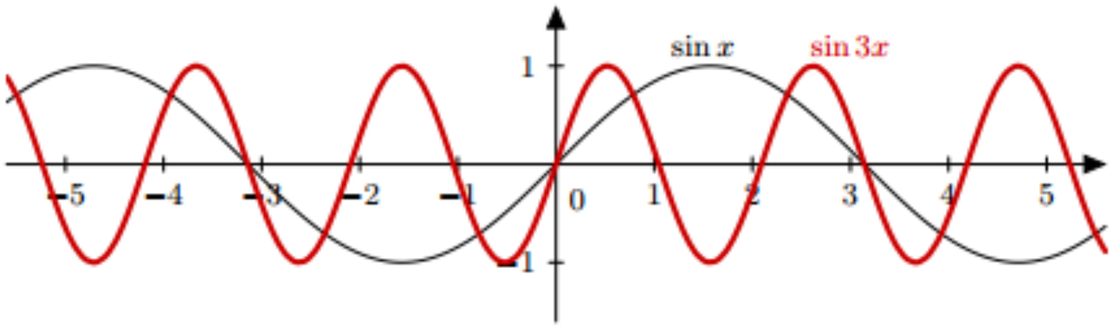
Caso: $0 < k < 1$: dilatazione in direzione orizzontale



Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

Esempio

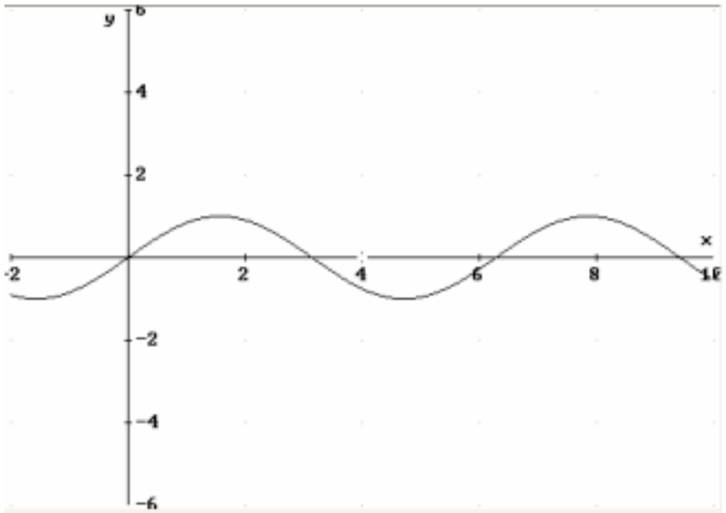
- $y = \sin x$
- $y = \sin 3x$

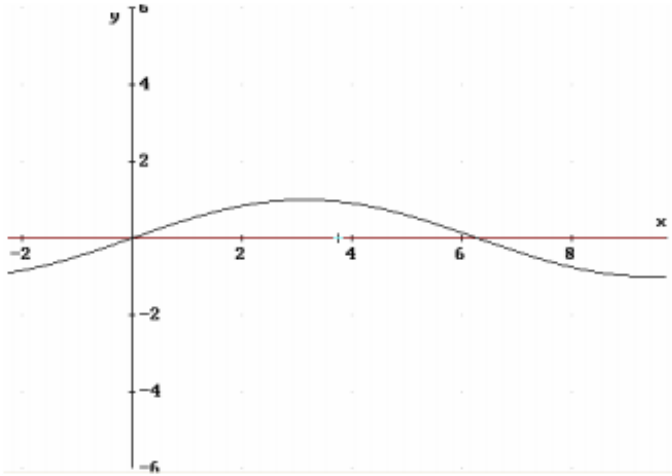


Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

Esempio

- $y = \sin x$
- $y = \sin \frac{1}{2} x$





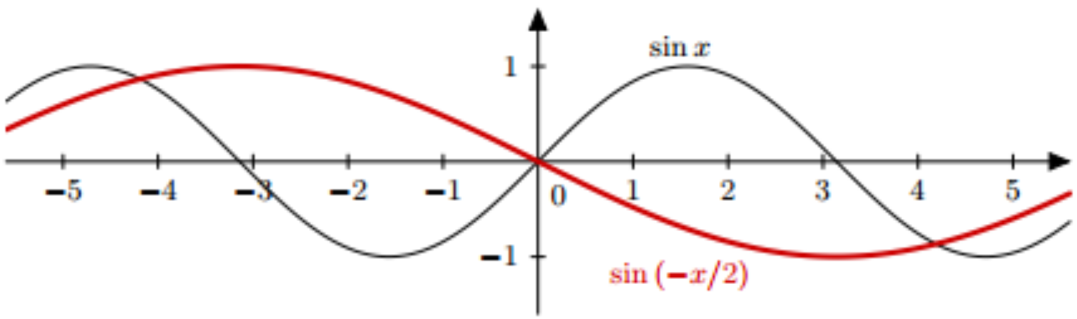
Operazioni sui grafici di funzione: dilatazione/contrazione

$$y_4 = f(kx), \ \forall k \in R$$

Caso: $k < 0$

Oltre ad una contrazione o dilatazione in direzione orizzontale, ci sarà anche una riflessione rispetto all'asse y

- $y = \sin x$
- $y = \sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)$



Operazioni sui grafici di funzione

Consideriamo ad esempio la funzione $y = f(x)$.

Allora, conoscendo il suo grafico, vogliamo ottenere il grafico di

$$y_5 = \left| f(x) \right|$$

A tale proposito, ricordiamo che

$$\left| f(x) \right| = \begin{cases} f(x), & se \ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x), & se \ \ f(x) < 0 \end{cases}$$

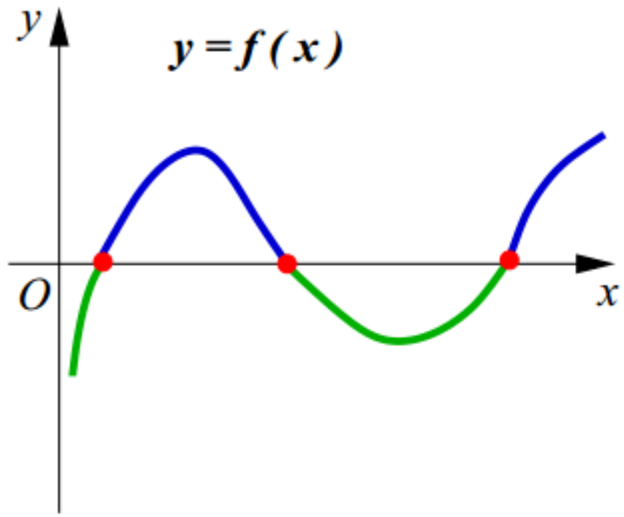
Quindi, il grafico della funzione $y_5 = |f(x)|$

si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ “ribaltando” simmetricamente rispetto all’asse x la parte di grafico di f che si trova nel semipiano inferiore e lasciando inalterato il resto.

Operazioni sui grafici di funzione

$$y_5 = \left| f(x) \right|$$

Si ribalta simmetricamente rispetto all'asse x la parte di grafico di f che si trova nel semipiano inferiore rispetto all'asse x e si lascia inalterato il resto del grafico

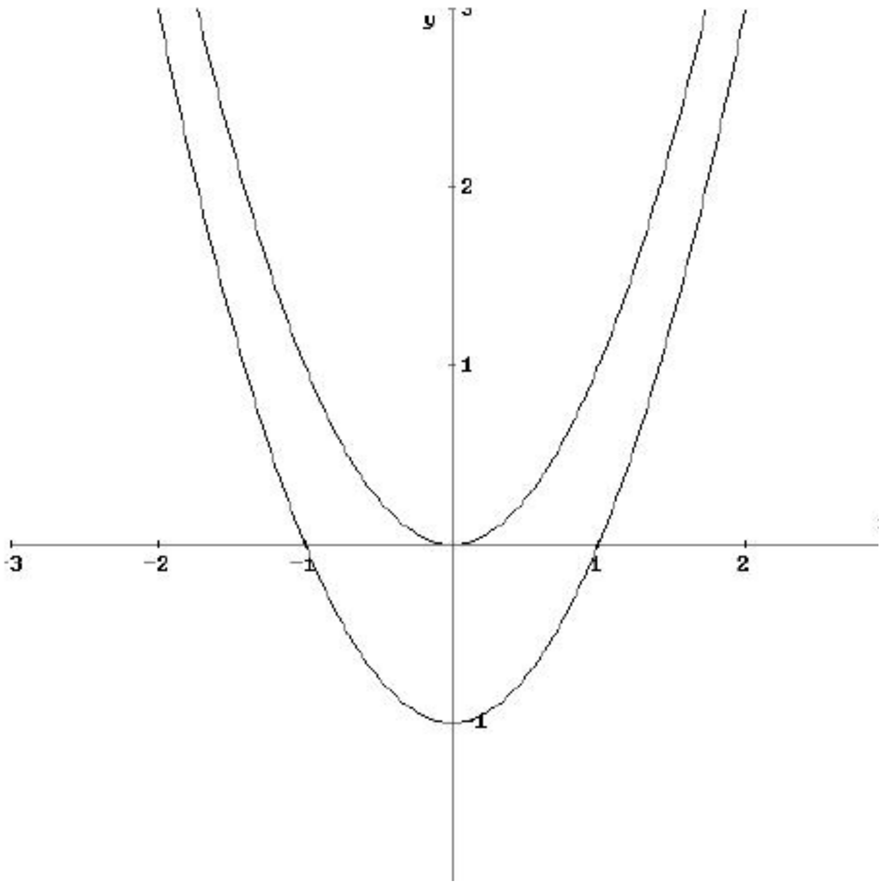


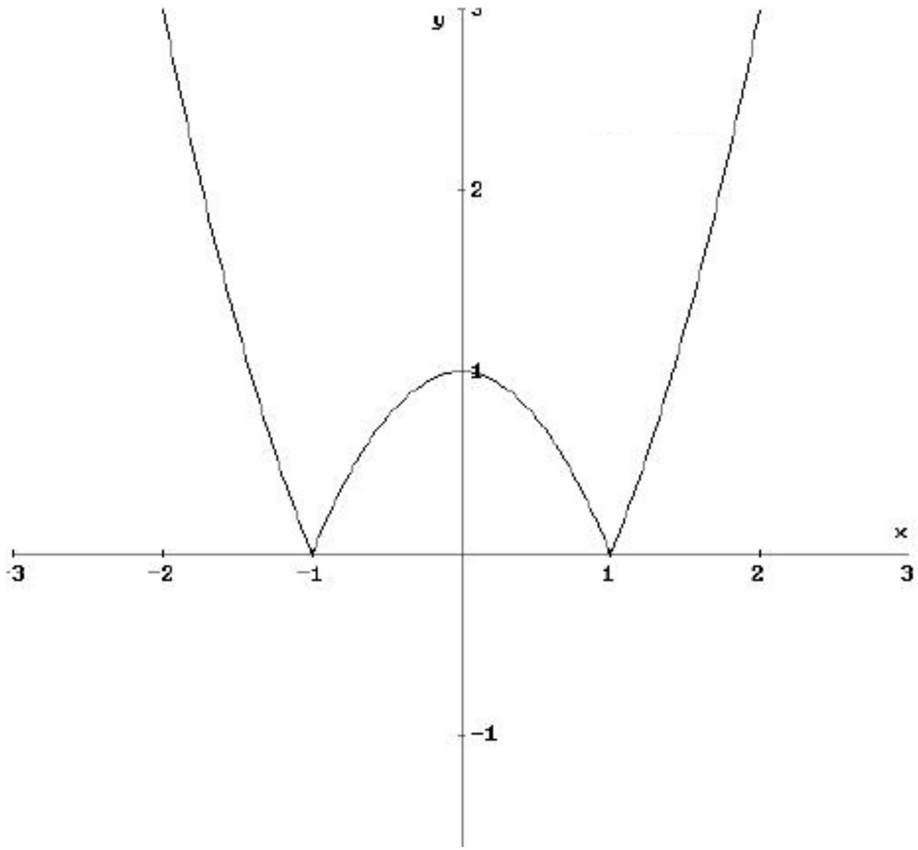
Osservazione: gli zeri della funzione restano inalterati

Operazioni sui grafici di funzione

Esempio

- $y = x^2$
- $y = x^2 - 2$
- $y = \left| x^2 - 2 \right|$





Funzione valore assoluto: esercizio

Esempio. Rappresentare graficamente la seguente funzione

$$f(x) = |x-2|$$

Soluzione. Esplicitando il valore assoluto, la funzione può essere riscritta come segue

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{se } x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$f(x)$ è una funzione il cui grafico coincide

- con la retta di equazione $y = x - 2$ se $x \geq 2$,

- con la retta di equazione $y = -x+2$ se $x<2$

Operazioni sui grafici di funzione

Consideriamo ad esempio la funzione $y = f(x)$.

Allora, conoscendo il suo grafico, vogliamo ottenere il grafico di

$$y_6 = f(|x|)$$

A tale proposito, ricordiamo che $|x| = x \quad se \;\; x \geq 0$

Quindi, il grafico della funzione $y_6 = f(|x|)$

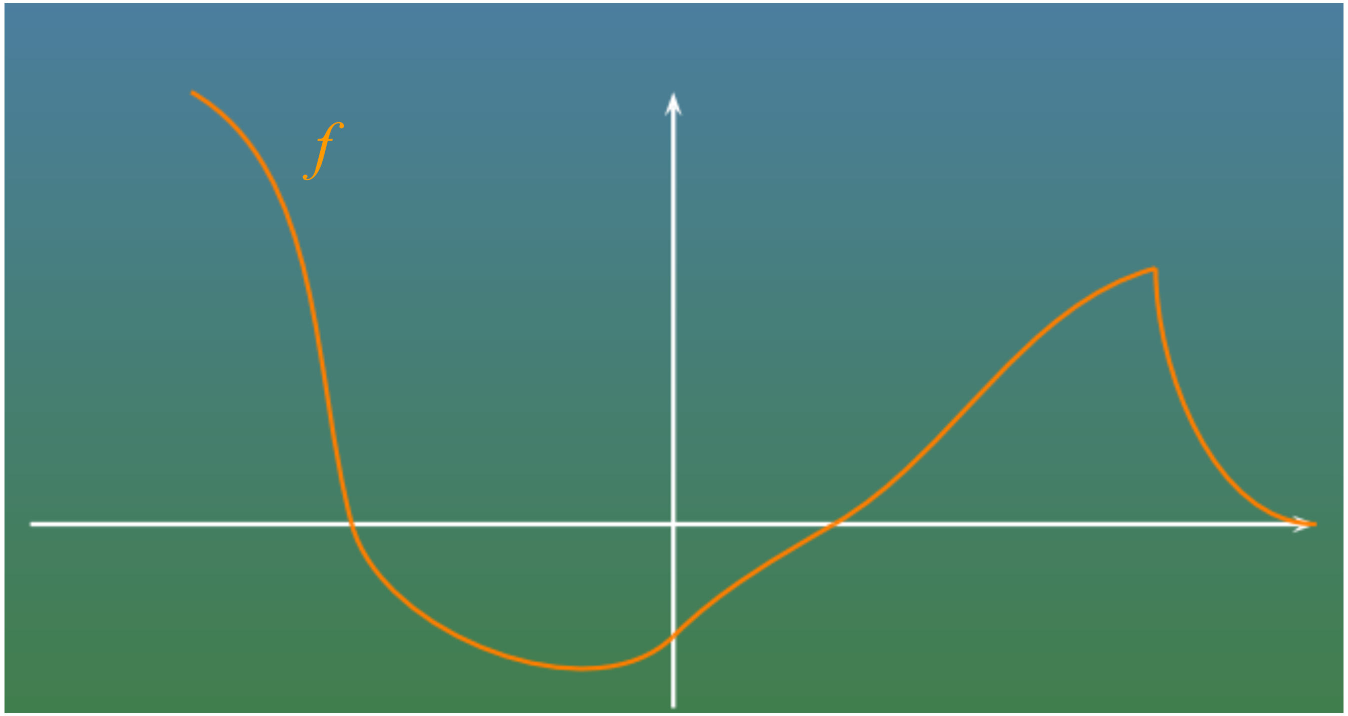
si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ lasciandolo inalterato nella parte del semipiano delle x positive e ribaltando tale parte rispetto all'asse y

Infatti, $|-x| = |x| \Rightarrow y_6$ è simmetrica rispetto all'asse delle y

Operazioni sui grafici di funzione

$$y_6 = f(|x|)$$

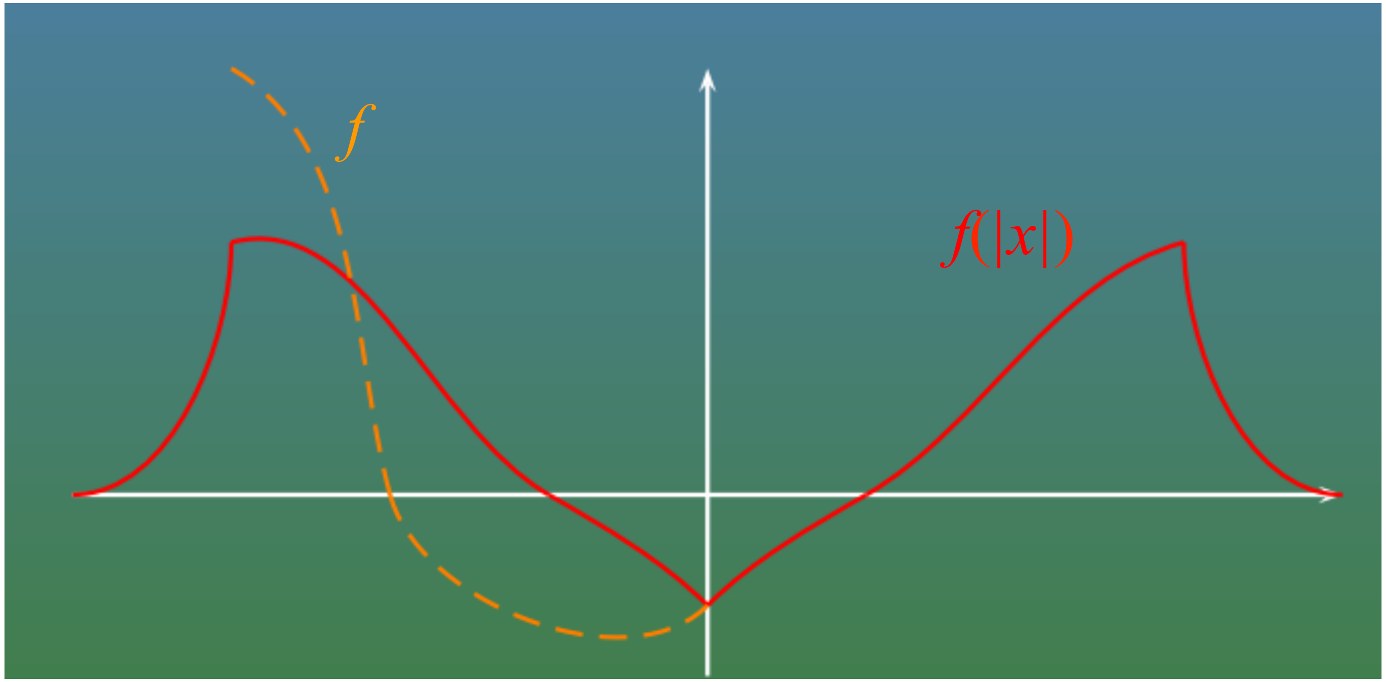
si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ lasciandolo inalterato nella parte del semipiano delle x positive e ribaltando tale parte rispetto all'asse y



Operazioni sui grafici di funzione

$$y_6 = f(|x|)$$

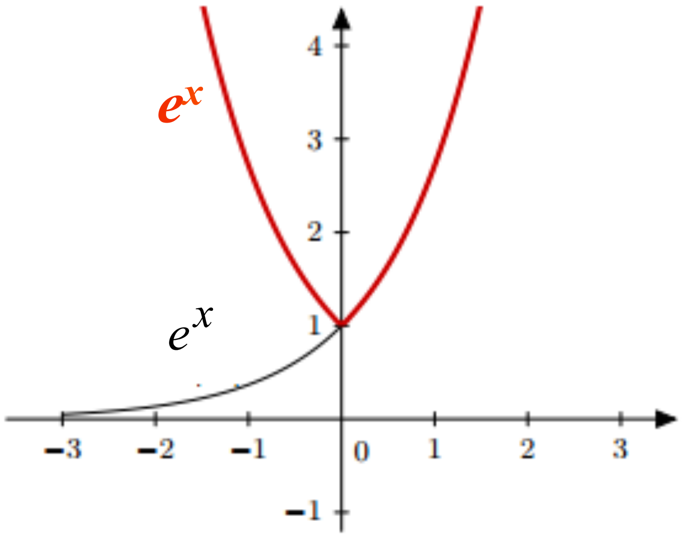
si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ lasciandolo inalterato nella parte del semipiano delle x positive e ribaltando tale parte rispetto all'asse y



Operazioni sui grafici di funzione

Esempio

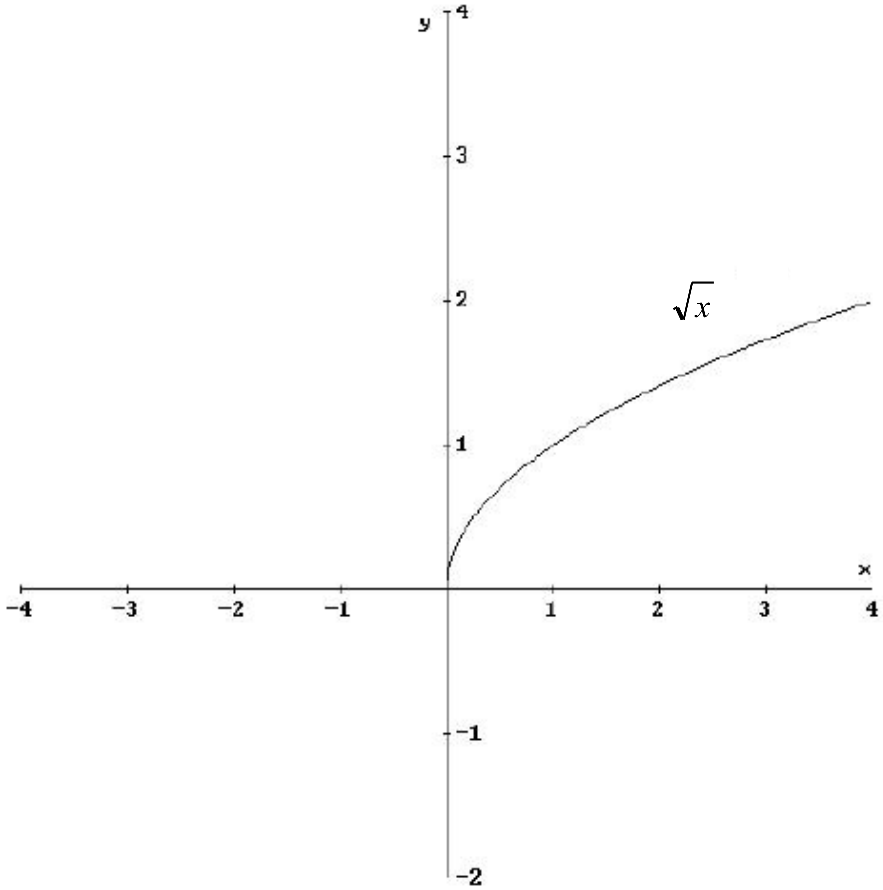
- $y = e^x$
- $y = e^{|x|}$

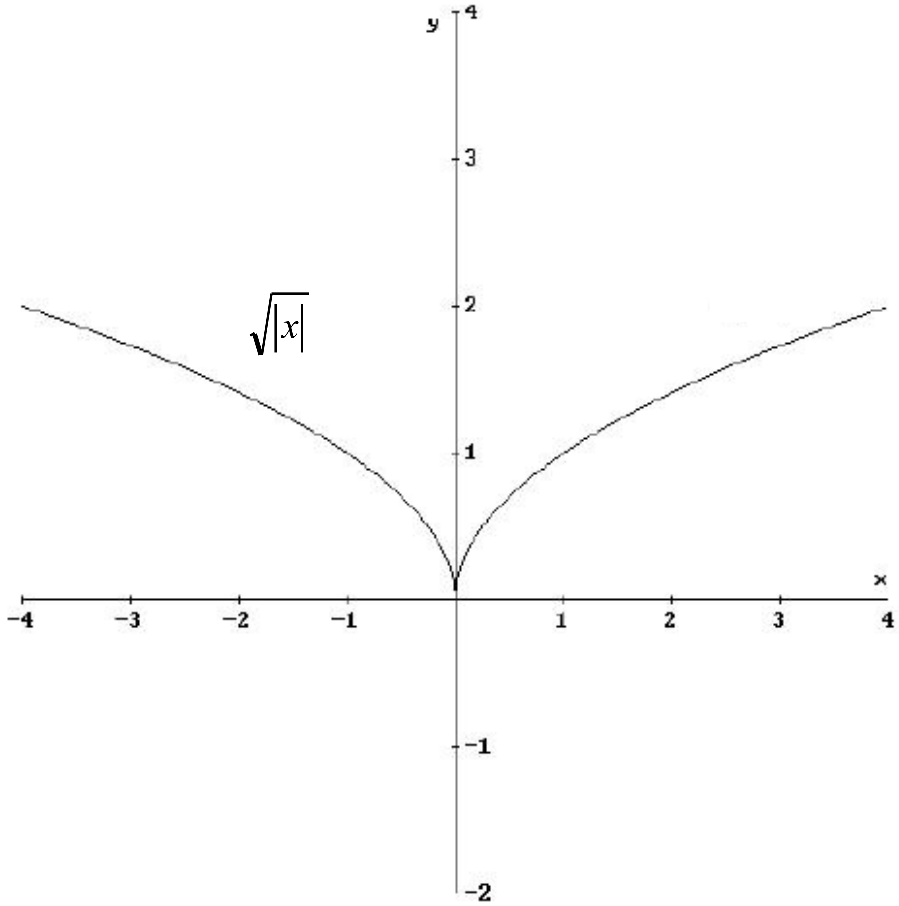


Operazioni sui grafici di funzione

Esempio

- $y = \sqrt{x}$
- $y = \sqrt{|x|}$





Operazioni sui grafici di funzione

Esercizio. Tracciare il grafico delle funzioni:

1) $y = 1 - \left| x^2 - 1 \right|$

2) $y = e^{|x|}$

3) $y = \left| |2x - 1| - 1 \right|$

4) $y = \left| x^3 - 2 \right| + 1$

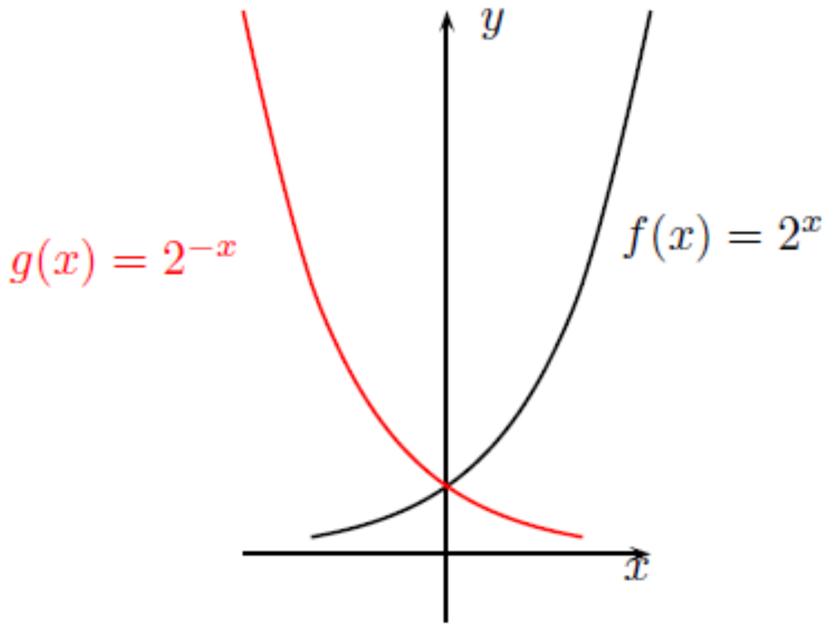
5) $y = \left| |x| - 2 \right|$

6) $y = \left| \log_2 (x + 1) \right|$

Operazioni sui grafici di funzione

Esercizio. Tracciare il grafico delle funzioni:

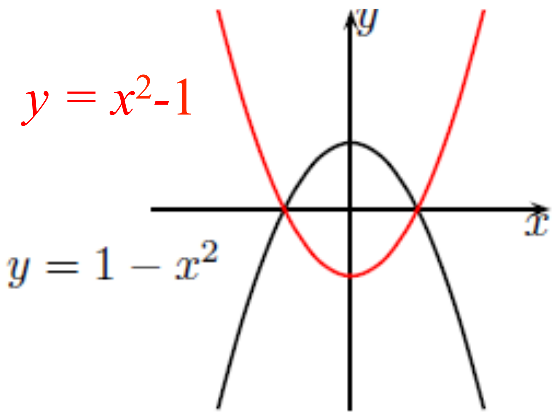
- $y = 2^x$
- $y = 2^{-x}$



Operazioni sui grafici di funzione

Esercizio. Tracciare il grafico delle funzioni:

- $y = x^2 - 1$
- $y = -\left(x^2 - 1\right) = 1 - x^2$



Operazioni sui grafici di funzione

Esercizio. Tracciare il grafico delle funzioni:

- $y = 1 - x^2$
- $y = \left|1 - x^2\right|$