

APPUNTI DEL CORSO DI FONDAMENTI DI GEOMETRIA ALGEBRICA E DIFFERENZIALE, MOD. 1

LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
UNIVERSITÀ FEDERICO II – A. A. 2011-2012
A. DE PARIS

Questi appunti integrano e supportano lo studio di argomenti selezionati dal testo [Lang, 1999], ai fini della preparazione dell'esame. Le parti del suddetto testo che fanno parte del programma d'esame sono citate, ma non ricopiate, e sono esposte a lezione insieme al materiale complementare qui contenuto. Ogni ulteriore spiegazione, esempio, esercizio, illustrazione, discussione svolti a lezione o nelle ore di studio guidato non sono richiesti ai fini dell'esame (anche se ovviamente si spera siano serviti da aiuto alla comprensione) ⁽¹⁾.

1. CATEGORIE

Conformemente agli standard di rigore attuali, i risultati che presentiamo sono ottenuti a partire da premesse (assiomi) logicamente formalizzabili, e dedotti secondo le regole della logica formale. Conformemente all'uso corrente, la formalizzazione non sarà esplicita, ma eseguibile in linea di principio. Come è noto, grosso modo il procedimento di formalizzazione (almeno per gli argomenti di Algebra, Analisi, Geometria e, in parte, Fisica Matematica) consisterebbe in

- Ricondurre, tramite le definizioni, le parole usate nel “gergo matematico” (ad es. gruppi, successioni, ecc.) a termini puramente insiemistici, e conseguentemente riscrivere i vari risultati, teoremi, ecc., come proposizioni riguardanti esclusivamente insiemi;
- formalizzare le proposizioni insiemistiche nel linguaggio della teoria ZFC, e riscrivere le dimostrazioni come successioni di formule ammesse nel linguaggio formale, che partano dagli assiomi di ZFC e che rispettino le regole rigidamente prescritte dalla logica formale.

La pratica con questo procedimento la si acquista ai primi anni del corso di laurea triennale, facendone esperienza con concetti e risultati di base, e la si affina (e in parte la si codifica) nel corso di Fondamenti di Matematica. Mano a mano che si va avanti, l'esigenza di aderire a questi canoni di rigore si fa sempre meno stretta. La capacità di procedere alla formalizzazione serve solo in caso di dubbi o

¹Il file pdf di questi appunti è navigabile (con lettori pdf compatibili): i riferimenti, anche se non evidenziati, funzionano come links. Gli appunti sono stati via via aggiornati durante lo svolgimento del corso, e hanno raggiunto forma pressoché definitiva poco dopo il termine dello stesso. La presente versione è uscita invece molto più tardi (Novembre 2014), ma differisce dalla precedente solo per pochi, lievi abbellimenti e correzioni; contestualmente si ringraziano tutti gli studenti che hanno aiutato con le loro osservazioni, ed in particolare Antonio D'Onofrio e Rossella Marro per aver rilevato un errore nel commento successivo all'osservazione 15.3 ed uno (ripetuto) nella dimostrazione della proposizione 4.2 dell'appendice a questi appunti (disponibile in un file separato).

contenziosi tra matematici (o tra studenti e professori all'esame), e di solito richiede che siano avviati solo i primissimi passi del procedimento sopra delineato.

Ad un certo livello, un'eccessiva tendenza a formalizzare il testo matematico comincia ad essere guardata con sospetto (certamente è un ostacolo ad una rapida acquisizione dei risultati avanzati). Dunque non dobbiamo aspettarci dai corsi della laurea magistrale lo stesso livello di dettaglio visti ai primi anni, e non possiamo aspettarci dal testo [Lang, 1999] lo stesso livello di dettaglio dei corsi della laurea magistrale. Tuttavia, in questi appunti scenderemo talvolta in qualche dettaglio di base, principalmente quando serve ad evitare ambiguità (di rilievo) dovute alle diverse impostazioni dei corsi seguiti nella triennale, o in presenza di alcuni passaggi di [Lang, 1999] che risultino eccessivamente avanzati rispetto ad un livello ragionevole per la laurea magistrale.

Per chiarire meglio il “di rilievo” comparso tra parentesi poco sopra, diciamo che, data per assodata la nozione di coppia ordinata (x, y) , non ci preoccupiamo di stabilire se una terna ordinata (a, b, c) è definita come $((a, b), c)$, come $(a, (b, c))$, o come funzione $\{0 \mapsto a, 1 \mapsto b, 2 \mapsto c\}$ (anche se quest'ultima è la preferita dal docente del corso). Questa è un'ambiguità non di rilievo.

Un'ambiguità che invece conviene sanare riguarda la nozione di *funzione* (o applicazione). Una funzione $A \rightarrow B$ si trova a volte definita come sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ (²) tale che $\forall a \in A \exists!(a, b) \in G$, altre volte come coppia $(A \times B, G)$ con $G \subseteq A \times B$ (grafico) (o, equivalentemente, come terna (A, B, G) , o anche (A, G, B)), con la stessa condizione su G . La differenza sta nel fatto che con la prima definizione, una funzione non ha un determinato codominio (nel senso di insieme di arrivo B , non nel senso di immagine $f(A)$), mentre con la seconda sì. Allora fissiamo una nostra scelta (che cercherà di essere la più adatta al testo [Lang, 1999], anche se addirittura non è detto che questo testo si preoccupi della distinzione).

Definizione (prerequisito) 1.1. *Assumiamo che applicazioni tra insiemi, tra gruppi, tra spazi topologici, ecc., siano uguali se e solo se hanno stesso dominio (compresa l'eventuale struttura di gruppo, spazio topologico, ecc.), stesso codominio e a ciascun elemento del (comune) dominio associano lo stesso elemento del codominio.*

La definizione ora data non intende stabilire un diverso concetto di uguaglianza tra funzioni: è solo una maniera sintetica per avvisare che, qualunque sia la definizione insiemistica che il lettore intende assumere, questa deve rispettare i requisiti ora richiesti. Il “prerequisito” tra parentesi vuol dire che si sta assumendo che il lettore abbia già incontrato una definizione adatta o, in caso contrario, sia in grado di adattare (a richiesta) la definizione che conosce.

Nel caso degli insiemi la definizione come coppia $(A \times B, G)$ (o come terna (A, B, G) , o anche (A, G, B)), con le solite condizioni su G , va bene (mentre il semplice grafico G non soddisfa i requisiti).

Nel caso di insiemi strutturati (gruppi, spazi topologici, ecc.) di solito le applicazioni vengono semplicemente considerate come applicazioni tra i sostegni. Per noi, al contrario, se (A, \perp) e (B, \top) sono gruppi, un omomorfismo non può essere

²Qui ovviamente stiamo dando per acquisita anche la definizione di prodotto cartesiano di insiemi. Non ci preoccupiamo di richiamarla o di fissarla. Faremo così anche per altri concetti di base. In caso di dubbi, si può chiedere al docente a lezione o in orario di ricevimento.

semplicemente definito come un'applicazione $A \rightarrow B$ tra i sostegni (compatibile con le operazioni), ma deve tener presente anche le eventuali differenti strutture. Ad esempio, potrà essere definito come una terna $((A, \perp), G, (B, \top))$ (soggetta alle condizioni di compatibilità con le strutture, oltre che alle solite condizioni su G).

È importante che il lettore tenga presente che l'effettiva scelta della definizione insiemistica ha pochissima importanza in questi contesti più avanzati ⁽³⁾. Addirittura il lettore, se ha intuitivamente chiaro il concetto di funzione che la definizione sopra data vuole suggerire, può evitare del tutto di fermarsi a riflettere su quale definizione insiemistica fissare (anche se è bene che si senta sicuro di poter soddisfare in tempi brevi un'eventuale richiesta in tal senso, in caso di necessità).

Il discorso ora fatto si assumerà tacitamente valido per tutte le definizioni del corso: talvolta queste saranno già precise (o pedanti, a seconda dei punti di vista), ma altre volte avranno lo stile rapido e un po' vago della definizione 1.1.

Dovendo parlare di categorie, un'altra distinzione su cui vogliamo soffermarci brevemente è quella tra insieme e classe. Diciamo innanzitutto che [Lang, 1999] sembra disinteressarsi completamente della questione. Ed in effetti molti testi introduttivi di varie discipline, quando hanno bisogno di presentare le categorie, certamente non usano lo stesso livello di dettagli tipico dei testi dei primi anni quando definiscono funzioni, relazioni, gruppi, ecc. Tuttavia, poiché è possibile che per qualcuno le nozioni apprese nel corso di laurea triennale non siano sufficienti ad intuire la via per una corretta formalizzazione, diamo qui qualche breve indicazione.

Di solito, la distinzione tra insieme e classe (propria) viene presentata nell'ambito della teoria NBG. Tuttavia, la prescrizione che una classe propria non possa appartenere ad un'altra classe è un po' troppo restrittiva per formalizzare le categorie. Per fortuna, si può rimanere nell'ambito standard ZFC. Riteniamo però sia comodo usare, al posto di "insieme", un altro termine per gli oggetti formalizzati da ZFC. Ad esempio, fissiamo il termine *collezione* ⁴.

Assioma 1.2. *Esiste una collezione V tale che:*

- $x \in X \in V \Rightarrow x \in V$;
- $\omega \in V$, dove ω indica il primo ordinale infinito (di von Neumann) ⁵;
- $X \in V \Rightarrow \mathcal{P}(X) \in V$;
- $X \in V \Rightarrow \bigcup_{x \in X} x \in V$;
- Se f è una funzione suriettiva $X \twoheadrightarrow A$ tale che $X \in V$ e $A \subseteq V$, allora $A \in V$.

Definizione 1.3. *Assumiamo fissata una collezione che soddisfa l'assioma 1.2; la chiamiamo universo e chiamiamo insiemi i suoi elementi. Una classe è una sotto-collezione dell'universo. Chiamiamo propria una classe che non sia un insieme.*

È utile osservare che gli insiemi così definiti costituiscono ancora un modello di ZFC. Quindi possiamo attribuire agli elementi di V il solito significato concreto di insieme. La classe V si può interpretare quindi come la classe di tutti gli insiemi

³Va anche detto che, d'altro canto, in certi casi una definizione formale ben scelta, oltre a semplificare di molto il lavoro, dischiude orizzonti inaspettati.

⁴In letteratura si può trovare anche il termine "conglomerato" con un significato simile, se non uguale, a quello che stiamo per dare alle nostre "collezioni".

⁵Gli ordinali (di von Neumann) finiti sono $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{0, 1, 2\} = \dots$, eccetera, e ω è l'insieme degli ordinali finiti (a proposito: il lettore, se vuole, può anche assumere per definizione $\aleph_0 = \omega$).

(universo di von Neumann), e le classi proprie, come V , sono collezioni che, come V , sono “particolarmente grandi”. Va detto che lo stratagemma dell’“unico universo” è dovuto a S. Mac Lane, e che nel (secondo noi autorevole) testo [MacLane, 1971] le nostre “collezioni” ed “insiemi” sono detti, rispettivamente, “insiemi” ed “insiemi piccoli”.

Poiché le nostre collezioni rispettano ZFC, si possono applicare ad esse (ed in particolare alle classi) le solite costruzioni che conosciamo per gli insiemi (lo abbiamo in parte già fatto nell’enunciato dell’assioma 1.2). Non avremo problemi quindi a parlare, ad esempio, della collezione $\{V\}$, di coppie di classi (come collezioni), delle collezioni prodotto cartesiano di classi, ecc. Tuttavia, quando parleremo di gruppi, spazi topologici, ecc., se non diversamente indicato, li intenderemo col solito significato (cioè ristretto agli insiemi).

L’impostazione ora delineata consente di formalizzare la maggior parte delle costruzioni richieste per l’uso che comunemente si fa delle categorie. Non possiamo però garantire che di per sé sia sufficiente per formalizzare tutto il contenuto di [Lang, 1999], visto l’uso molto libero in questo testo di collezioni “grandi”. Tuttavia, la tecnica ora usata può essere adattata a situazioni più complicate, ed eventualmente corretta, senza eccessiva fatica (anche se forse richiede un po’ di pazienza; un’alternativa molto popolare è fornita dagli universi di Grothendieck, che rinunciamo però a descrivere). D’altra parte, ribadiamo che non è richiesto (anzi, in casi come questi è sconsigliato) di preoccuparsi di fissare esplicitamente tutte le definizioni che sarebbero necessarie per determinare una formalizzazione in ZFC.

Definizione 1.4. *Un diagramma che rappresenta applicazioni tra insiemi, come ad esempio*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array},$$

si dice commutativo se ogni volta che due sequenze di frecce consecutive e di verso concorde hanno lo stesso punto di partenza e lo stesso punto di arrivo, allora le corrispondenti composizioni di applicazioni coincidono. Nell’esempio di sopra, il diagramma è commutativo se e solo se $\psi \circ f = f' \circ \varphi$. Quando avremo definito i morfismi nelle categorie, la presente definizione si estenderà in modo ovvio a quella situazione.

A questo punto, studiare [Lang, 1999, cap. I, par. 1].

Esempio 1.5. *Insiemi, gruppi, gruppi abeliani, spazi vettoriali e spazi topologici forniscono esempi di categorie.*

Dato il carattere estremamente fondamentale del concetto di categoria, sebbene gli esempi sopra elencati siano quelli di nostro interesse immediato, ne esistono di ben diversi: ad esempio, un gruppo (o più in generale un monoide) può essere visto come una categoria con un solo oggetto e con morfismi dati dagli elementi del gruppo; un insieme con una relazione binaria riflessiva e transitiva può essere visto come una categoria in cui per ogni coppia (A, B) di oggetti c’è al più un morfismo $A \rightarrow B$.

Menzioniamo anche che esistono definizioni più “economiche” delle categorie, che considerano collezioni di soli morfismi (gli oggetti vengono identificati con le identità).

Definizione 1.6. Siano A, A' oggetti di una categoria \mathfrak{A} . Un prodotto di A per A' è un oggetto

$$A \times A' \in \mathfrak{A},$$

insieme a due morfismi

$$\pi \in \text{Mor}(A \times A', A), \quad \pi' \in \text{Mor}(A \times A', A'),$$

detti proiezioni, tali che

$$\forall X \in \mathfrak{A}, f \in \text{Mor}(X, A), f' \in \text{Mor}(X, A'), \exists! g \in \text{Mor}(X, A \times A') : \\ \pi \circ g = f, \quad \pi' \circ g = f'.$$

Il morfismo g si denota talvolta con (f, f') .

Analogha definizione si assume, più in generale, per il prodotto di una qualunque famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di oggetti.

Non sempre esiste un prodotto $A \times A'$.

Esempio 1.7. Nella categoria degli insiemi, il prodotto cartesiano $A \times A'$, con le proiezioni

$$\begin{array}{ccc} \pi : A \times A' & \rightarrow & A \\ (a, a') & \mapsto & a \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \pi' : A \times A' & \rightarrow & A' \\ (a, a') & \mapsto & a' \end{array},$$

è un prodotto, e si ha

$$(f, f')(x) = (f(x), f'(x)).$$

Esempio 1.8. La somma diretta di k -spazi vettoriali ha come sostegno il prodotto cartesiano dei sostegni, e le proiezioni sono lineari.

La somma diretta, insieme alle proiezioni, è un prodotto nella categoria dei k -spazi vettoriali.

Osservazione 1.9. Se $f : X \rightarrow A, f' : X' \rightarrow A'$ sono morfismi in una categoria, ed esistono prodotti $X \times X'$ e $A \times A'$, allora esiste un unico morfismo

$$g : X \times X' \rightarrow A \times A'$$

tale che

$$\pi_A \circ g = f \circ \pi_X \quad e \quad \pi_{A'} \circ g = f' \circ \pi_{X'}$$

(dove le π sono, ovviamente, le proiezioni): basta prendere $g = (f \circ \pi_X, f' \circ \pi_{X'})$.

Definizione 1.10. Nella situazione dell'osservazione 1.9 denoteremo il morfismo g con $f \times f'$.

Esempio 1.11. Nella categoria degli insiemi si ha

$$(f \times f')(x, x') = (f(x), f'(x')).$$

Osservazione 1.12. Siano A, A' oggetti di una categoria. Se Π_1 e Π_2 sono due prodotti di A e A' , allora esiste uno ed un solo isomorfismo $\varphi : \Pi_1 \xrightarrow{\sim} \Pi_2$ compatibile con le rispettive proiezioni, cioè

$$\pi_2 \circ \varphi = \pi_1, \quad \pi'_2 \circ \varphi = \pi'_1.$$

Il fatto che le differenti definizioni formali del prodotto cartesiano tra insiemi si corrispondano l'un l'altra può essere visto come un aspetto particolare dell'osservazione ora fatta.

Osservazione 1.13. *Se W_1, W_2 sono sottospazi di un k -spazio vettoriale V , ad intersezione nulla, allora la somma $W_1 + W_2$ è un loro prodotto nella categoria dei k -spazi vettoriali, differente dalla loro somma diretta (esterna).*

Non stupisce quindi, che quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ la somma $W_1 + W_2$ venga ancora detta *diretta* (interna) e denotata con $W_1 \oplus W_2$.

A causa dell'unicità del prodotto a meno di isomorfismi, spesso si parla “del” (invece di “un”) prodotto di due oggetti di una categoria.

Proposizione (prerequisito) 1.14. *Siano S, S' spazi topologici e π, π' le proiezioni del prodotto cartesiano $S \times S'$ dei rispettivi sostegni. Esiste una ed una sola topologia su $S \times S'$ che lo renda, con π, π' , un prodotto di S ed S' nella categoria degli spazi topologici.*

Esempio 1.15. *Siano A, A' oggetti di una categoria, che ammettano il prodotto $A \times A'$, e sia $\pi : A \times A' \rightarrow A$ la prima proiezione. Se $f : A \rightarrow A'$ è un qualunque morfismo, allora*

$$g_f := (\text{id}_A, f)$$

è una sezione della proiezione π .

Viceversa, ogni sezione g di π si può ottenere in questo modo da un morfismo $f : A \rightarrow A'$ (basta prendere $f = \pi' \circ g$, dove π' è l'altra proiezione).

Nel caso degli insiemi ovviamente $g_f(a) = (a, f(a))$, e la sua immagine è dunque proprio il grafico di f ; quindi, anche in una categoria qualunque, potremmo chiamare g_f il “(morfismo) grafico di f ”.

Esempio 1.16. *In una qualunque categoria,*

$$(X, Y) \mapsto \text{Mor}(X, Y)$$

dà luogo ad un funtore di due variabili, controvariante nella prima, covariante nella seconda e a valori nella categoria degli insiemi, se ad ogni coppia di morfismi $f : X' \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y'$ si associa il morfismo

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(X, Y) & \rightarrow & \text{Mor}(X', Y') \\ \varphi & \mapsto & g \circ \varphi \circ f \end{array},$$

che possiamo denotare (con leggero abuso) con $\text{Mor}(f, g)$.

Fissando la prima variabile X otteniamo un funtore covariante

$$Y \mapsto \text{Mor}(X, Y), \quad g \mapsto \text{Mor}(X, g) := \text{Mor}(\text{id}_X, g)$$

(quindi $\text{Mor}(X, g)(\varphi) = g \circ \varphi$).

Fissando la seconda variabile Y otteniamo un funtore controvariante

$$X \mapsto \text{Mor}(X, Y), \quad f \mapsto \text{Mor}(f, Y) := \text{Mor}(f, \text{id}_Y)$$

(quindi $\text{Mor}(f, Y)(\varphi) = \varphi \circ f$).

In moltissimi testi si usa la notazione Hom al posto di Mor . Per gruppi (in particolare, spazi vettoriali, moduli, ecc.) useremo di preferenza Hom .

Esercizio (facoltativo) 1.17. Verificare che se una categoria ammette prodotti finiti (cioè per ogni coppia di oggetti esiste un prodotto) fissandone uno per ogni coppia si ottiene un funtore di due variabili, e la scelta delle due proiezioni fornisce due trasformazioni naturali.

Esercizio (facoltativo) 1.18. Verificare che fissando per ogni k -spazio vettoriale V una base \mathcal{B}_V , si può definire un funtore della categoria dei k -spazi vettoriali in sé, assegnando ad ogni V lo spazio $\oplus_{\dim V} k \leq k^{\dim V}$ dato dai vettori numerici con un numero finito di componenti non nulle e ad ogni omomorfismo $V \rightarrow W$ l'omomorfismo $\oplus_{\dim V} k \rightarrow \oplus_{\dim W} k$ che “rappresenta φ rispetto alle basi fissate”. Verificare inoltre che assegnando ad ogni V l'isomorfismo $V \rightarrow \oplus_{\dim V} k$ di coordinazione rispetto a \mathcal{B}_V , si ottiene una trasformazione naturale.

2. RUDIMENTI SU SPAZI DI BANACH

Per lavorare con le varietà differenziabili, bisogna conoscere alcuni risultati fondamentali sulle funzioni differenziabili $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, che si studiano nel corso di Analisi 2 e che conviene fermarsi un po' a ricapitolare. Poiché ogni \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita è isomorfo ad un \mathbb{R}^n , l'uso degli \mathbb{R} -spazi finito-dimensionali è equivalente a quello degli \mathbb{R}^n , ed è più conforme all'intuizione geometrica. [Lang, 1999] preferisce rimuovere anche l'ipotesi di dimensione finita (rimpiazzandola con una molto meno restrittiva).

Definizione (prerequisito) 2.1. Assumiamo note le elementari definizioni di spazio metrico, spazio metrico completo, spazio vettoriale normato. Ricordiamo che uno spazio vettoriale normato che sia completo come spazio metrico ⁽⁶⁾, viene detto spazio di Banach. Stabiliamo che la notazione $B_r(x)$ si riferirà sempre alla palla aperta di centro x e raggio $r > 0$ in uno spazio metrico ⁽⁷⁾. La topologia naturale su uno spazio metrico è quella che ha per base la famiglia delle palle aperte.

Come è usuale, gli spazi metrici, ed in particolare gli spazi di Banach, saranno (tacitamente) considerati anche come spazi topologici.

Seguendo [Lang, 1999], svilupperemo i nostri richiami nel contesto degli spazi di Banach, ma dovremo rinunciare ad illustrarne le applicazioni (anche importanti) a concreti spazi di dimensione infinita: questa sarà per noi semplicemente una “strategia organizzativa” per richiamare i fondamenti del calcolo differenziale ed integrale negli spazi “euclidei”. Per una visione ampia ed equilibrata sulle tecniche di spazi di Banach si dovrà fare riferimento ai corsi superiori di Analisi. Trascuriamo quindi, volutamente, molti importanti (anche semplici) esempi in dimensione infinita.

Esempio 2.2. Se in un \mathbb{R} -spazio vettoriale V è assegnato un prodotto scalare definito positivo, \cdot , allora l'usuale norma

$$|x| := \sqrt{x \cdot x}$$

rende V uno spazio normato.

In particolare, la norma data dal prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n , spesso detta norma euclidea, rende \mathbb{R}^n uno spazio normato.

⁶Con la distanza $d(x, y) := |x - y|$.

⁷Assumiamo quindi sempre che il raggio è positivo. Molti invece ammettono anche la palla aperta vuota: attenzione che [Lang, 1999] potrebbe non adottare la stessa convenzione.

Esempio 2.3. In \mathbb{R}^n può anche essere definita la norma

$$|(x_1, \dots, x_n)| := \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} .$$

Osservazione 2.4. Se ricordiamo che \mathbb{R}^n può anche essere riguardato come l'insieme delle funzioni $\{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, l'esempio 2.3 si può considerare un caso particolare della seguente costruzione.

Sia \mathbf{E} uno spazio normato ed X un insieme. Diciamo che una funzione $f : X \rightarrow \mathbf{E}$ è limitata se

$$(1) \quad \exists K \geq 0 : \forall x \in X, \quad |f(x)| \leq K .$$

L'insieme delle funzioni limitate $X \rightarrow \mathbf{E}$ ha un'ovvia struttura di spazio vettoriale, e si può definire una norma prendendo come $|f|$ il minimo $K \geq 0$ che soddisfi (1), cioè $\sup_{x \in X} |f(x)|$ (se $X \neq \emptyset$)⁸.

Esercizio 2.5. Verificare che se \mathbf{E} è di Banach, anche lo spazio delle applicazioni limitate $X \rightarrow \mathbf{E}$ lo è.

Se X è a sua volta uno spazio normato ed f è lineare, allora, escluso il caso banale $f = 0$, f non può soddisfare (1). In questo caso, l'aggettivo "limitato" si usa con un altro significato, il seguente.

Definizione 2.6. Un'applicazione lineare $\lambda : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ tra spazi normati si dice limitata se

$$(2) \quad \exists K \geq 0 : \forall x \in X, \quad |\lambda(x)| \leq K |x| .$$

In tal caso, il minimo K che si può prendere in (2) è, per definizione, la norma $|\lambda|$.

Richiamiamo ora che (per le applicazioni lineari) la limitatezza equivale alla continuità, approfittando per generalizzare questo fatto anche alle applicazioni multilineari.

3. CONTINUITÀ DI APPLICAZIONI MULTILINEARI

In un qualunque spazio normato \mathbf{E} , vale

$$(3) \quad \forall \alpha, \beta > 0, \quad \alpha B_r(x) + \beta B_s(y) = B_{\alpha r + \beta s}(\alpha x + \beta y) .$$

Abbiamo in particolare le più agili formulette

$$x + B_r(0) = B_r(x) , \quad B_r(0) + B_s(0) = B_{r+s}(0) , \quad \alpha B_r(0) = B_{\alpha r}(0) ,$$

che qui di seguito è utile tenere presenti.

Osservazione 3.1. Sia $\mu : \mathbf{E}_1 \times \dots \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}$ un'applicazione multilineare tra spazi normati. Poiché

$$\mu(\alpha_1 X_1 \times \dots \times \alpha_n X_n) = \alpha_1 \dots \alpha_n \mu(X_1 \times \dots \times X_n) ,$$

con $X_i \subseteq \mathbf{E}_i$, abbiamo che, comunque fissato $K > 0$, vale l'equivalenza

$$\begin{aligned} \exists r_1, \dots, r_n : \mu(B_{r_1}(0) \times \dots \times B_{r_n}(0)) &\subseteq B_{K r_1 \dots r_n}(0) \\ \iff \forall r_1, \dots, r_n > 0, \mu(B_{r_1}(0) \times \dots \times B_{r_n}(0)) &\subseteq B_{K r_1 \dots r_n}(0) . \end{aligned}$$

Proposizione 3.2. Sia $\mu : \mathbf{E}_1 \times \dots \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}$ un'applicazione multilineare tra spazi normati. Sono equivalenti i seguenti fatti:

⁸Per $X = \emptyset$ va presa norma nulla per l'unico elemento $\emptyset \rightarrow \mathbf{E}$.

- μ è continua;
- μ è continua in $(0, \dots, 0)$;
- esiste $K \geq 0$ tale che

$$|\mu(x_1, \dots, x_n)| \leq K |x_1| \cdots |x_n| .$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $n > 0$, perché per $n = 0$ le condizioni in enunciato sono tutte banalmente vere ⁹.

Siccome i prodotti di palle aperte forniscono sistemi fondamentali d'intorni in $\mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_n$, abbiamo che la continuità equivale a

$$(4) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_n, \forall s > 0, \exists r_1, \dots, r_n : \\ \mu(B_{r_1}(x_1) \times \cdots \times B_{r_n}(x_n)) \subseteq B_s(\mu(x))$$

e la continuità in $(0, \dots, 0)$ equivale a

$$(5) \quad \forall s > 0, \exists r_1, \dots, r_n : \mu(B_{r_1}(0) \times \cdots \times B_{r_n}(0)) \subseteq B_s(0) .$$

È immediato verificare, per $K > 0$, che

$$|\mu(x_1, \dots, x_n)| \leq K |x_1| \cdots |x_n| \Rightarrow \mu(B_{r_1}(0) \times \cdots \times B_{r_n}(0)) \subseteq B_{Kr_1 \cdots r_n}(0)$$

e che ¹⁰

$$\mu(B_{r_1}(0) \times \cdots \times B_{r_n}(0)) \subseteq B_{Kr_1 \cdots r_n}(0) \Rightarrow |\mu(x_1, \dots, x_n)| \leq 2^n K |x_1| \cdots |x_n| .$$

Dunque la terza condizione in enunciato equivale a

$$(6) \quad \exists K > 0 : \forall r_1, \dots, r_n > 0, \mu(B_{r_1}(0) \times \cdots \times B_{r_n}(0)) \subseteq B_{Kr_1 \cdots r_n}(0) .$$

L'implicazione (4) \Rightarrow (5) è immediata e la (5) \Rightarrow (6) si ottiene subito dall'osservazione 3.1 ponendo $K := s/(r_1 \cdots r_n)$, con $s > 0$ a piacere. Per concludere basta dimostrare per induzione su n che (6) \Rightarrow (4). Possiamo anche prendere $n = 0$ per base, ed in tal caso la (4) è incondizionatamente verificata.

Fissiamo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_n$ ed $s > 0$, e poniamo

$$\mu_{x_1} := \mu \circ (x_1, \pi_{\mathbf{E}_2}, \dots, \pi_{\mathbf{E}_n}) : \mathbf{E}_2 \times \cdots \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}$$

(è un'“applicazione parziale” di μ : qui x_1 indica la rispettiva funzione costante e le π le proiezioni). La μ_{x_1} soddisfa ancora (6) (con $n-1$ al posto di n e con, diciamo, $(|x_1|+1)K$ al posto di K) quindi, per l'ipotesi d'induzione, esistono $r_2, \dots, r_n > 0$ tali che

$$\mu_{x_1}(B_{r_2}(x_2) \times \cdots \times B_{r_n}(x_n)) \subseteq B_{\frac{s}{2}}(\mu(x)) .$$

Preso il K fornito dalla (6) per μ e posto

$$r_1 := \frac{s}{2K(|x_2|+r_2) \cdots (|x_n|+r_n)} ,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} & \mu(B_{r_1}(x_1) \times \cdots \times B_{r_n}(x_n)) \\ & \subseteq \mu_{x_1}(B_{r_2}(x_2) \times \cdots \times B_{r_n}(x_n)) + \mu(B_{r_1}(0) \times B_{r_2}(x_2) \times \cdots \times B_{r_n}(x_n)) \\ & \subseteq \mu_{x_1}(B_{r_2}(x_2) \times \cdots \times B_{r_n}(x_n)) + \mu(B_{r_1}(0) \times B_{|x_2|+r_2}(0) \times \cdots \times B_{|x_n|+r_n}(0)) \\ & \subseteq B_{\frac{s}{2}}(\mu(x)) + B_{\frac{s}{2}}(0) = B_s(\mu(x)) , \end{aligned}$$

⁹Menzioniamo anche che per $n = 0$ è naturale interpretare $\mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_n = \{()\}$ e la condizione di multilinearità in modo che $\mu()$ non sia necessariamente 0.

¹⁰Qui siamo molto “spicci”: con pochissima fatica aggiuntiva si potrebbe eliminare il 2^n .

come si voleva. \square

La norma introdotta nella definizione 2.6 vale dunque per le applicazioni lineari e continue, e si generalizza immediatamente al caso multilineare.

Definizione 3.3. *Definiamo la norma di un'applicazione multilineare e continua tra spazi normati $\mu : \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}$, come il minimo K tale che valga*

$$|\mu(x_1, \dots, x_n)| \leq K |x_1| \cdots |x_n| .$$

Osservazione 3.4. *Dalla definizione di norma di un'applicazione lineare continua segue subito che*

$$|\lambda(x)| \leq |\lambda| |x|$$

e che

$$|\lambda \circ \lambda'| \leq |\lambda| |\lambda'|$$

(dove ovviamente λ, λ' sono applicazioni lineari continue tali che $\lambda \circ \lambda'$ sia definita).

Nella categoria degli spazi normati, con morfismi le applicazioni lineari e continue, il funtore Mor introdotto nell'esempio 1.16, può essere denotato con L ⁽¹¹⁾.

Proposizione 3.5. *Se $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ sono spazi normati, allora le applicazioni bilineari*

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{G}) ,$$

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} ,$$

date rispettivamente dalla composizione e dalla valutazione, sono continue.

Dimostrazione. Denotiamo con \mathbf{H} uno qualunque degli spazi $L(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ oppure \mathbf{E} , e con μ la mappa bilineare in questione. L'osservazione 3.4 fornisce

$$|\mu(\lambda, z)| \leq |\lambda| |z| , \quad \forall \lambda \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F}), z \in \mathbf{H} ,$$

e quindi l'asserto segue dalla proposizione 3.2. \square

La proposizione appena dimostrata è la proposizione 2.6 di [Lang, 1999, cap. I], estesa a spazi normati qualunque, ma ad esclusione del riferimento finale al caso multilineare ivi menzionato.

Osservazione 3.6. *Il fatto che lo spazio $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ (delle applicazioni lineari e continue $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$), con la norma stabilita nella definizione 2.6 (e 3.3), sia uno spazio normato suggerisce di considerare L come funtore a valori ancora nella categoria degli spazi normati, piuttosto che soltanto degli insiemi. Per far questo, bisogna verificare che l'azione sui morfismi effettivamente dia luogo ad applicazioni lineari e continue. Questa è una facile conseguenza della proposizione 3.5. Ovviamente, anche i funtori "parziali" $L(\mathbf{E}, \cdot)$ e $L(\cdot, \mathbf{F})$, si possono considerare a valori ancora nella categoria degli spazi normati.*

Tutti questi funtori si possono ovviamente restringere anche alla categoria degli spazi di Banach (anzi, se \mathbf{F} è di Banach, $L(\cdot, \mathbf{F})$ ci dà anche un funtore da spazi normati a spazi di Banach).

¹¹Anche se la notazione espone un po' al rischio di confusione con gli spazi L^p di Lebesgue, è abbastanza diffusa, e comunque è quella usata dal nostro testo di riferimento [Lang, 1999] (dove è anche estesa a spazi vettoriali topologici).

4. TERMINOLOGIA DI BASE PER SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

Osservazione 4.1. Se \mathbf{E} è uno spazio normato, siccome (3) ci assicura che

$$B_{\varepsilon/2}(x) + B_{\varepsilon/2}(y) = B_{\varepsilon}(x + y) ,$$

l'operazione di addizione

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$$

è continua.

Anche l'operazione di prodotto per scalari

$$\mathbb{R} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$$

è continua, per la proposizione 3.2.

Sarà utile ricordare, con [Lang, 1999], anche la definizione generale di *spazio vettoriale topologico* (di cui gli spazi normati sono un caso particolare).

Studiare [Lang, 1999, cap. I, par. 2, da “A topological vector space. . .” (terzo rigo dall’inizio del paragrafo), fino al commento dopo la proposizione 2.2 (“... splits in \mathbf{E} .”)].

Osservazione 4.2. Lo spazio $L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F})$ delle applicazioni multilineari e continue $\mathbf{E}_1 \times \dots \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}$ tra spazi normati, con la norma stabilita nella definizione 3.3, è uno spazio normato. Se \mathbf{F} è uno spazio di Banach, allora anche lo spazio $L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F})$ lo è.

Quando $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n, \mathbf{F}$ sono spazi normati, supporremo sempre $L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F})$ (ed in particolare $L^n(\mathbf{E}, \mathbf{F})$) tacitamente dotato della struttura di spazio normato sopra descritta. Lo stesso vale per i sottospazi $L_a^n(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ed $L_s^n(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ di $L^n(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Osservazione 4.3. Il grafico di un'applicazione continua tra spazi topologici, con codominio di Hausdorff, è sempre chiuso. Il viceversa non è vero (per avere un esempio, basta prolungare $1/x$ in 0 con un valore qualunque).

Osservazione 4.4. Un sottospazio di uno spazio metrico completo è completo se e solo se è chiuso.

Definizione 4.5. Su una somma diretta $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ di spazi normati definiamo la norma naturale ponendo

$$|(x_1, x_2)| := \max\{|x_1|, |x_2|\} .$$

Lo spazio $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ sarà implicitamente considerato come spazio normato rispetto a tale norma.

È bene sapere che su $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ ci sarebbero norme altrettanto naturali, ed equivalenti a quella ora stabilita, come ad esempio $|(x_1, x_2)| := |x_1| + |x_2|$.

Osservazione 4.6. La topologia naturale su una somma diretta $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ di spazi normati coincide con la topologia prodotto. Inoltre, $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ è uno spazio di Banach se e solo se \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 sono spazi di Banach.

Osservazione 4.7. Consideriamo le seguenti proposizioni.

1. $\text{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \subseteq L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ¹² è il sottoinsieme costituito dalle $\varphi \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ che sono biettive¹³.
2. Comunque si prendano sottospazi chiusi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, tra loro supplementari, di un qualunque \mathbf{E} , allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 &\rightarrow \mathbf{E} \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

è un isomorfismo toplineare¹⁴.

3. Se il grafico di una qualunque applicazione lineare $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ è chiuso, allora essa è continua.

Riguardo al punto 2 osserviamo che, anche se $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ non fossero chiusi, σ è lineare e continua (tra spazi normati) perché si ottiene come composizione

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 \hookrightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E},$$

dove la prima mappa è il prodotto delle mappe di inclusione, e la seconda è l'operazione di somma in \mathbf{E} . Inoltre σ è biettiva perché $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ sono supplementari in \mathbf{E} . Infine, il fatto che $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ sono chiusi assicura che sono spazi di Banach (vedi l'osservazione 4.4). Dunque punto 1 \Rightarrow punto 2.

Riguardo al punto 3, supponiamo che il grafico $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ di un'applicazione lineare φ sia chiuso, e osserviamo che è supplementare a $\mathbf{F}' := \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{F} \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$. Il punto 2 fornisce un isomorfismo toplineare $\mathbf{G} \times \mathbf{F}' \xrightarrow{\sim} \mathbf{E} \times \mathbf{F}$. La composizione di applicazioni lineari e continue

$$\mathbf{E} \xrightarrow{(-\text{id}, 0)} \mathbf{E} \times \mathbf{F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G} \times \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{F}' \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}$$

è proprio φ , che è dunque continua. Abbiamo così provato che punto 2 \Rightarrow punto 3.

Infine, sappiamo che il grafico \mathbf{G} di un'applicazione lineare e continua $\varphi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ è chiuso (osservazione 4.3). Se questa è biettiva, allora il grafico di φ^{-1} è l'immagine di \mathbf{G} tramite l'isomorfismo toplineare

$$\mathbf{E} \times \mathbf{F} \xrightarrow{(\pi_{\mathbf{F}}, \pi_{\mathbf{E}})} \mathbf{F} \times \mathbf{E}$$

(è un isomorfismo toplineare perché è inverso di sé stesso). Dunque anche φ^{-1} ha il grafico chiuso. Quindi punto 3 \Rightarrow punto 1.

In conclusione, le tre proposizioni sono equivalenti.

Il punto 3, stante l'osservazione 4.3, ci dà l'equivalenza tra continuità e chiusura del grafico (per applicazioni lineari tra spazi di Banach), ed è tradizionalmente chiamata “teorema del grafico chiuso”; per questo [Lang, 1999] dice che le altre sono “due aspetti del teorema del grafico chiuso”. Mentre la loro equivalenza è

¹²Ricordiamo che, conformemente a [Lang, 1999], in mancanza di indicazioni esplicite, $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \dots$ denotano spazi di Banach.

¹³In altre parole, un'applicazione lineare e continua tra spazi di Banach è un isomorfismo toplineare se e solo se è biettiva.

¹⁴È buona regola indicare con \oplus il prodotto di due spazi vettoriali (in particolare, quelli topologici), se lo si vuole considerare ancora come spazio vettoriale (topologico, nel caso). Quando abbiamo a che fare con spazi vettoriali topologici, è bene usare \times quando si vuole considerare solo la struttura topologica, e non quella vettoriale. In questo caso, però, abbiamo l'ambiguità tra somma diretta interna ed esterna. Per questo motivo, \times è utile a chiarire che la somma diretta considerata è quella esterna. L'enunciato, di per sé, afferma proprio che la somma diretta interna di sottospazi chiusi, dotata della topologia indotta dallo spazio ambiente, è ancora una somma diretta in TVS.

facile, la loro validità richiede un po' di lavoro. La si può ottenere come immediata conseguenza di un altro teorema tradizionale, detto "della funzione aperta" (la cui dimostrazione coinvolge a sua volta un tradizionale teorema di Baire). Poiché il nostro obiettivo è semplicemente richiamare la definizione e le proprietà elementari delle funzioni di classe C^p (già note dal corso di Analisi 2), in questo contesto un po' più generale, non avremmo un grande bisogno di questi risultati. Solo alla fine dei preliminari di analisi, in un caso abbastanza specifico ([Lang, 1999, cap. I, corollario 5.8], che dimosteremo alla fine del paragrafo 7) serve il punto 1. Per questo motivo, vediamo comunque qui una rapida versione della dimostrazione del teorema della funzione aperta.

Osservazione 4.8. *In uno spazio metrico, se $0 < r' < r$ allora $\overline{B_{r'}(x)} \subseteq B_r(x)$.*

Lemma 4.9. *Sia X uno spazio metrico, S un chiuso proprio ed $r > 0$. Allora esistono $x \in X$ ed $r_1 > 0$ tali che*

$$r_1 < r, \quad \overline{B_{r_1}(x)} \cap S = \emptyset$$

Dimostrazione. Poiché S è un chiuso proprio, c'è una $B_{r'}(x)$ disgiunta da S . Allora basta prendere $r_1 = \min\{r'/2, r/2\}$. \square

Lemma 4.10. *In uno spazio metrico X , detto S un chiuso che non contiene nessuna palla aperta, vale la seguente implicazione*

$$x \in X, r > 0 \implies \exists x' \in X, r' > 0 :$$

$$\overline{B_{r'}(x')} \subseteq \overline{B_r(x)}, \quad r' < r, \quad \overline{B_{r'}(x')} \cap S = \emptyset.$$

Dimostrazione. Applicando il lemma 4.9 al sottospazio $B_r(x)$ e al suo chiuso $S \cap B_r(x)$ troviamo x' ed $r'' < r$ tali che $\overline{B_{r''}(x')} \subseteq B_r(x) \setminus S$, dove B' indica una palla nel sottospazio. Denotata con ϱ la funzione distanza, prendendo $r' < \min\{r'', r - \varrho(x, x')\}$, si ha $\overline{B_{r'}(x')} = \overline{B_{r''}(x')}$ da cui subito l'asserto. \square

Proposizione 4.11. *Se uno spazio metrico completo è unione di una successione di chiusi, allora almeno uno di questi contiene una palla aperta.*

Dimostrazione. Sia

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n,$$

con gli S_n chiusi nello spazio metrico completo X , e supponiamo per assurdo che nessun S_n contenga palle aperte (in particolare, nessuno può coincidere con X).

Per il lemma 4.9, troviamo un $r_1 < 1/2$ e un $\overline{B_{r_1}(x_1)}$ disgiunto da S_1 . Applicando ripetutamente il lemma 4.10 troviamo una successione

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \supseteq \cdots \supseteq \overline{B_{r_n}(x_n)} \supseteq \cdots$$

tale che, $\forall n, \overline{B_{r_n}(x_n)} \cap S_n = \emptyset$ ed $r_n < 1/2^n$.

Questo implica subito che la successione $x_1, \dots, x_n, \dots \in X$ è di Cauchy, e dunque converge ad un $x \in \overline{B_{r_n}(x_n)} \forall n$. Siccome le $\overline{B_{r_n}(x_n)}$ sono disgiunte dagli S_n , x non appartiene a nessuno di essi, in contrasto con il fatto che X è ricoperto dagli S_n . \square

Osservazione 4.12. *Teniamo presente che in un qualunque spazio vettoriale topologico le traslazioni ($x \mapsto x + \bar{x}$) e le omotetie ($x \mapsto \alpha x$) sono continue. Sia $\varphi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ lineare tra spazi normati, $x \in \mathbf{E}$, $y = \varphi(x)$, $\alpha > 0$. Abbiamo le equivalenze*

$$(7) \quad \overline{\varphi(\mathbf{B}_r(x))} \supseteq \mathbf{B}_s(y) \iff \overline{\varphi(\mathbf{B}_r(\mathbf{0}))} \supseteq \mathbf{B}_s(\mathbf{0}) ,$$

$$(8) \quad \overline{\varphi(\mathbf{B}_r(\mathbf{0}))} \supseteq \mathbf{B}_s(\mathbf{0}) \iff \overline{\varphi(\mathbf{B}_{\alpha r}(\mathbf{0}))} \supseteq \mathbf{B}_{\alpha s}(\mathbf{0}) .$$

Proposizione 4.13. *Sia $\varphi \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ suriettiva¹⁵. Allora esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\varphi(\mathbf{B}_1(\mathbf{0})) \supseteq \mathbf{B}_\delta(\mathbf{0}) .$$

Dimostrazione. Poiché φ è suriettiva, allora ovviamente

$$\mathbf{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(\mathbf{B}_n(\mathbf{0})) ,$$

e a maggior ragione la cosa vale per le chiusure $S_n := \overline{\varphi(\mathbf{B}_n(\mathbf{0}))}$. Dunque la proposizione 4.11 assicura che esiste una $S_{\bar{n}}$ che contiene una $\mathbf{B}_s(y)$.

Grazie alla suriettività si può scegliere x tale che $y = \varphi(x)$, e non è difficile trovare una $\mathbf{B}_r(x) \supseteq \mathbf{B}_{\bar{n}}(\mathbf{0})$. Usando la (7) otteniamo che

$$(9) \quad \overline{\varphi(\mathbf{B}_r(\mathbf{0}))} \supseteq \mathbf{B}_s(\mathbf{0}) .$$

Preso un qualunque $z \in \mathbf{B}_s(\mathbf{0})$, per la (9) abbiamo

$$\mathbf{B}_{\frac{s}{2}}(z) \cap \varphi(\mathbf{B}_r(\mathbf{0})) \neq \emptyset ,$$

quindi troviamo $x_1 \in \mathbf{B}_r(\mathbf{0})$ tale che, posto $z_1 = z - \varphi(x_1)$,

$$z_1 \in \mathbf{B}_{\frac{s}{2}}(\mathbf{0}) .$$

La (8) (con $\alpha = 1/2$) e la (9) forniscono

$$\overline{\varphi(\mathbf{B}_{\frac{r}{2}}(\mathbf{0}))} \supseteq \mathbf{B}_{\frac{s}{2}}(\mathbf{0}) .$$

Iterando il ragionamento, otteniamo due successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tali che

$$x_n \in \mathbf{B}_{\frac{r}{2^n-1}}(\mathbf{0}) , \quad z_n \in \mathbf{B}_{\frac{s}{2^n}}(\mathbf{0}) ,$$

e

$$z_n = z - \varphi(x_1) - \cdots - \varphi(x_n) .$$

Dunque la successione delle somme $s_n := x_1 + \cdots + x_n$ è di Cauchy, e la successione $\varphi(s_n)$ converge a z . Si ricava facilmente che $x := \lim_n s_n$ appartiene a $\mathbf{B}_{2r}(\mathbf{0})$ e ha per immagine z . Ma poiché z era un qualunque punto di $\mathbf{B}_s(\mathbf{0})$, abbiamo provato che

$$\varphi(\mathbf{B}_{2r}(\mathbf{0})) \supseteq \mathbf{B}_s(\mathbf{0}) .$$

Per concludere, basta porre $\delta := s/2r$. \square

Ricordiamo che un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici si dice *aperta* se per ogni aperto $A \subseteq X$, $f(A)$ è aperto in Y .

Corollario 4.14. *Se $\varphi \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ è suriettiva, allora è aperta.*

¹⁵Quindi, in base alle convenzioni introdotte in [Lang, 1999], \mathbf{E}, \mathbf{F} sono spazi di Banach e φ è lineare e continua (oltre che suriettiva).

Dimostrazione. Sia W aperto in \mathbf{E} ed $y = \varphi(x)$ per un $x \in W$. Poiché W è aperto, troviamo una $B_r(x) \subseteq W$. Per la proposizione 4.13, troviamo δ tale che $\varphi(B_r(x)) \supseteq B_{r\delta}(y)$. Dunque $\varphi(W) \supseteq B_{r\delta}(y)$, cioè y è interno a $\varphi(W)$. Essendo y qualunque in $\varphi(W)$, questo prova che $\varphi(W)$ è aperto, ed essendo W aperto qualunque in \mathbf{E} , concludiamo che φ è aperta. \square

Corollario 4.15. *Le tre proposizioni equivalenti viste nel corso dell'osservazione 4.7 sono vere.*

Dimostrazione. Il punto 1 è immediata conseguenza del corollario 4.14. \square

5. SPAZI FINITO-DIMENSIONALI

Definizione 5.1. *Sia V un k -spazio vettoriale. L'insieme delle forme lineari $V \rightarrow k$, dotato della sua naturale struttura di k -spazio vettoriale, si dice duale di V . Nel contesto degli spazi vettoriali topologici, però, per duale (topologico) si intende lo spazio costituito solo dalle applicazioni lineari e continue $V \rightarrow \mathbb{R}$ ⁽¹⁶⁾, usando talvolta la dicitura duale algebrico per il duale in senso generale. Useremo la notazione V^\vee per il duale.*

Definizione 5.2. *Sia X un insieme, Y uno spazio topologico ed \mathcal{F} un insieme di funzioni $X \rightarrow Y$. La topologia meno fine su X tra tutte quelle tali che le funzioni in \mathcal{F} sono tutte continue, si dice topologia iniziale (o topologia debole) rispetto ad \mathcal{F} .*

Osservazione 5.3. *La topologia prodotto è la topologia iniziale rispetto alle proiezioni.*

Se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale, possiamo considerare le seguenti topologie:

- la topologia indotta dalla topologia prodotto tramite un omomorfismo coordinato $V \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ ($\alpha = \dim V$ numero cardinale, eventualmente infinito);
- la topologia indotta da una norma;
- la topologia iniziale rispetto a V^\vee .

Queste topologie non sono in generale la stessa, anche se ci sono forti collegamenti tra loro (ad esempio, è ovvio che la prima è contenuta nella terza). Inoltre, una topologia del secondo tipo può dipendere dalla norma scelta¹⁷.

In dimensione finita, si può dimostrare abbastanza presto che tutte queste topologie coincidono (in particolare, tutte le norme inducono la stessa topologia), ma noi non faremo uso di questo risultato. È bene però sapere che gli \mathbb{R} -spazi finito-dimensionali sono spazi “banachabili” in maniera sostanzialmente unica, e che quindi per loro si potrebbe rinunciare alla presenza (anche se solo implicita) di una norma.

Comunque, visto che per qualcuna delle nozioni generali che introdurremo sarà utile mantenere una certa aderenza a quanto noto dal corso di Analisi 2 nel caso degli spazi \mathbb{R}^n , su questi supporremo implicitamente fissata la norma euclidea (vedi l'esempio 2.2).

¹⁶ $V \rightarrow \mathbb{C}$ nel caso di spazi complessi, che però non stiamo per ora considerando.

¹⁷In dimensione infinita hanno più interesse le topologie del secondo tipo, e, in subordine, la terza con V spazio normato e V^\vee quindi inteso come duale topologico rispetto alla seconda.

6. APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI E DERIVATE

La definizione di limite di una funzione (di una o più variabili reali) si estende in maniera ovvia agli spazi topologici, come segue.

Definizione 6.1. *Siano X, Y spazi topologici, $E \subseteq X$, $x_0 \in D(E)$ (derivato di E) ed $f : E \rightarrow Y$ un'applicazione qualunque. Allora un limite $l \in Y$ di f in x_0 è definito da*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = l \quad : \iff \quad \forall I_l \exists I_{x_0} : f(I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \subseteq I_l \quad (18),$$

dove I_l e I_{x_0} denotano intorni di l ed x_0 , rispettivamente.

Se Y è di Hausdorff, vale ovviamente l'unicità del limite (cioè c'è *al più* un limite di f in x_0). Bisogna stare un po' attenti al fatto che la ricerca del limite di f in x_0 prescinde del tutto dall'eventuale valore di f in x_0 .

Nel caso degli spazi normati, $\lim_{x \rightarrow x_0} f$ viene talvolta denotato con

$$\lim_{|x-x_0| \rightarrow 0} f$$

($\lim_{|x| \rightarrow 0} f$ se $x_0 = 0$).

Facciamo tre osservazioni tecniche che potranno essere utili per giustificare più in dettaglio alcune affermazioni che stiamo per incontrare in [Lang, 1999].

Osservazione 6.2. *Sia \mathbf{E} uno spazio normato ed $o : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, con I_0 intorno di 0 in \mathbb{R} , una funzione tale che*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Allora, fissato $\delta > 0$,

$$\psi(x) := \frac{\left| o\left(\frac{2|x|}{\delta}\right) \right|}{|x|}, \quad \psi(0) := 0,$$

definisce una funzione ψ su un intorno di 0 in \mathbf{E} tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0.$$

Sia poi $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{F}$, con U_0 intorno di 0 in \mathbf{E} ed \mathbf{F} spazio normato, tale che

$$\varphi(t B_\delta(0)) \subseteq o(t) B_1(0), \forall t.$$

Allora si ha

$$|\varphi(x)| \leq |x| \psi(x).$$

¹⁸Qui $f(I_{x_0} \setminus \{x_0\})$ potrebbe essere più precisamente descritto come $f(E \cap I_{x_0} \setminus \{x_0\})$. Nel seguito potrà anche capitare di comporre applicazioni senza preoccuparsi dell'“aggancio” tra dominio e codominio. In pratica, nei contesti vicini all'analisi, si preferirebbe una definizione di funzione che tenga conto solo della regola di assegnazione (ad esempio la definizione data col solo grafico). Il dominio (campo di esistenza) viene di conseguenza, ed il codominio non sarebbe fissato. Nella nostra impostazione, trattiamo questo come un abuso di notazione, consistente nel non specificare le opportune restrizioni delle funzioni coinvolte (o degli insiemi coinvolti, come nel presente caso di $f(I_{x_0} \setminus \{x_0\})$).

Osservazione 6.3. Sia \mathbf{E} uno spazio normato e $\psi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, con U_0 intorno di 0 in \mathbf{E} , una funzione tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0 .$$

Allora

$$h(t) := t \sup \psi(B_{|t|}(0) \setminus \{0\}) , \quad h(0) = 0 ,$$

definisce una funzione h su un intorno di 0 in \mathbb{R} tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t} = 0 .$$

Sia poi $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{F}$, con \mathbf{F} spazio normato, tale che

$$|\varphi(x)| \leq |x| \psi(x) .$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $o := 2h/\varepsilon$ ⁽¹⁹⁾, si ha

$$\varphi(tB_1(0)) \subseteq o(t)B_\varepsilon(0) .$$

Infine, ricordiamo che spesso proposizioni topologiche coinvolgenti intorni rimangono equivalenti quando le si “restringa” ad intorni di un fissato sistema fondamentale.

Studiare [Lang, 1999, cap. I, par. 3, primi dodici righe (fino cioè a “... $\lim \psi(x) = 0$ as $|x| \rightarrow 0$.”)].

Osservazione 6.4. Sia W un intorno convesso di 0 in uno spazio vettoriale topologico e siano $r, s \geq 0$. Dalla convessità segue subito che

1. $rW + sW = (r + s)W$;
2. $r \leq s \Rightarrow rW \subseteq sW$.

Sebbene la seconda proprietà si ottenga immediatamente dalla prima, è bene menzionare che una semplice verifica diretta della seconda non usa “tutta” la convessità, ma solo il fatto che W contiene tutti i segmenti di estremi 0 ed $x \in W$ (cosa che si potrebbe esprimere dicendo che W è “intorno stellato” di 0). Anzi, il punto 1 (per ogni $r, s \geq 0$) equivale alla convessità di W , ed il punto 2 alla proprietà di essere stellato rispetto a 0.

Osservazione 6.5. Se W è un intorno di 0, per la continuità dell’operazione di moltiplicazione per scalari, anche $-W$ è un intorno di 0. L’intersezione $W' := W \cap -W$ è dunque un intorno di 0 contenuto in W . Quindi gli intorni W' costituiscono un sistema fondamentale di intorni di 0, e poiché per un tale intorno si ha $-W' = W'$, abbiamo che

$$o(t)W' = |o(t)|W' .$$

Dunque nella condizione di tangenza a 0 è lecito assumere $o(t) \geq 0$ (anche per intorni qualunque).

Usando la locale convessità, si vede che somma di funzioni tangenti a 0 è ancora tangente a 0, come segue.

¹⁹Anche qui, come in situazioni simili incontrate in precedenza, si potrebbe tranquillamente prendere $o := h/\varepsilon$; ma abbondare può rendere un po’ più agevole la verifica.

Osservazione 6.6. Siano $\alpha_1, \alpha_2 : U_0 \rightarrow U$ applicazioni tangenti a 0. Preso un intorno W di 0 in U , per la continuità dell'operazione di addizione possiamo trovare intorni convessi W_1, W_2 di 0 in U tali che $W_1 + W_2 \subseteq W$. Siccome α_1, α_2 sono tangenti a 0, esistono intorni V_1, V_2 di 0 in U_0 tali che

$$\alpha_1(tV_1) \subseteq o_1(t)W_1, \quad \alpha_2(tV_2) \subseteq o_2(t)W_2,$$

e possiamo assumere le due $o(t)$ non negative (osservazione 6.5).

Prendendo $V := V_1 \cap V_2$ e $o(t) := \max\{o_1(t), o_2(t)\}$ e tenendo presente l'osservazione 6.4, punto 2, otteniamo

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(tV) \subseteq o_1(t)W_1 + o_2(t)W_2 \subseteq o(t)(W_1 + W_2) \subseteq o(t)W.$$

Dunque $\alpha_1 + \alpha_2$ è tangente a 0.

Un modo alternativo (più rapido) sarebbe stato quello di porre $o := o_1 + o_2$ ed usare il (più forte) punto 1 dell'osservazione 6.4.

È invece banale verificare che per $c \in \mathbb{R}$ ed α tangente a 0, l'applicazione $c\alpha$ è ancora tangente a 0 (basta prendere $co(t)$ nella condizione di tangenza a 0).

Osservazione 6.7. Sia $\lambda : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali topologici, e supponiamo che $\lambda(x) \neq 0$ per un $x \in \mathbf{E}$. Per la condizione di Hausdorff su \mathbf{F} , esiste un intorno W di 0 in \mathbf{F} tale che $\lambda(x) \notin W$. Poiché

$$\mathbb{R} \xrightarrow{(\text{id}, x)} \mathbb{R} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$

è continua, per ogni intorno V di 0 in \mathbf{E} c'è un intorno J_0 di 0 in \mathbb{R} tale che $J_0 \cdot x \subseteq V$. Se $o : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, con I_0 intorno di 0 in \mathbb{R} , è una qualunque funzione tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0,$$

possiamo trovare un $t > 0$ tale che $o(t)/t \in J_0$. Se $o(t) \neq 0$ abbiamo che $y := (o(t)/t)x \in V$ e $\lambda(ty) = o(t)\lambda(x) \notin o(t)W$. Se $o(t) = 0$, allora scelto $s \in J_0 - \{0\}$ si ha $z := sx \in V$ e $\lambda(tz) \notin \{0\} = o(t)W$. In ogni caso, non si può avere $\lambda(tV) \subseteq o(t)W$.

Continuare [Lang, 1999, cap. I, par. 3] (a partire quindi da “Let \mathbf{E}, \mathbf{F} be...”) fino all'enunciato della proposizione 3.1.

Osservazione 6.8. Presi spazi vettoriali topologici \mathbf{E}, \mathbf{F} , sia $\varphi : U \rightarrow \mathbf{F}$, una funzione tangente a 0 e supponiamo che $y := \varphi(0) \neq 0$.

Per le condizioni di Hausdorff e locale convessità, possiamo trovare un intorno convesso W di 0 in \mathbf{F} tale che $y \notin W$. Ma sappiamo che esiste un intorno V di 0 tale che $\varphi(tV) \subseteq o(t)W$, con $o(t) \geq 0$ (osservazione 6.5), e scegliendo (come è sempre possibile) un \bar{t} tale che $0 \leq o(\bar{t}) \leq 1$ otteniamo che $y \in \varphi(\bar{t}V) \subseteq o(\bar{t})W \subseteq W$ (per l'osservazione 6.4), mentre avevamo detto che $y \notin W$. Concludiamo che $\varphi(0) = 0$.

Ancora applicando la definizione tangenza in 0, da $\varphi(0) = 0$ segue subito che φ è continua in 0.

La restrizione in [Lang, 1999] della nozione di differenziabilità a funzioni (globalmente) continue è forse un po' eccessiva.

Definizione 6.9. Assumiamo valida la definizione di differenziabilità di f in x_0 anche per f non continue.

Osservazione 6.10. *Dall'osservazione 6.8 segue che una funzione differenziabile in x_0 è ivi continua.*

Al di là delle osservazioni un po' pedanti, intuitivamente abbiamo definito la derivata di f in un punto x_0 (quando c'è) come quell'applicazione lineare continua che meglio approssima f in intorno piccoli di x_0 . Per una tale applicazione, il termine tradizionale è “differenziale” (che ritroveremo in un contesto più generale più avanti). Un altro nome è “derivata totale”, che però si usa anche in situazioni un po' diverse, anche se strettamente collegate a questa.

Osservazione 6.11. *È immediato verificare le seguenti regole (per funzioni tra aperti di spazi vettoriali topologici):*

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$);
3. f costante $\Rightarrow f' = 0$;
4. λ lineare e continua $\Rightarrow \lambda'(x_0) = \lambda$ (cioè, λ' è la “funzione costante λ ”).

Osservazione 6.12. *Nella categoria dei k -spazi vettoriali abbiamo un isomorfismo naturale*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(k, V) & \xrightarrow{\sim} & V \\ \varphi & \mapsto & \varphi(1) \end{array} .$$

In particolare, per TVS c'è un isomorfismo naturale $L(\mathbb{R}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}$ (almeno di \mathbb{R} -spazi vettoriali; nella sottocategoria degli spazi normati è anche un isomorfismo toplineare).

Nel caso dunque di funzioni di una variabile reale a valori in uno spazio vettoriale topologico, cioè $f : U \rightarrow \mathbf{E}$ con $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto, la derivata $f'(x_0)$ (quando esiste) può essere naturalmente identificata con un elemento di \mathbf{E} (e quindi f' con una funzione ancora a valori in \mathbf{E}).

Al fine di dimostrare la regola della catena, premettiamo un semplice fatto.

Osservazione 6.13. *Per un'applicazione $\alpha : U \rightarrow U'$ tra aperti di spazi vettoriali topologici, consideriamo la seguente condizione:*

$$(10) \quad \exists L > 0 : \forall W \exists V, I_0 : \alpha(tV) \subseteq LtW, \forall t \in I_0 ,$$

con W intorno di 0 in U' , V intorno di 0 in U e I_0 intorno di 0 in \mathbb{R} .

Si vede facilmente che:

- α lineare e continua $\Rightarrow \alpha$ soddisfa (10);
- α tangente a 0 $\Rightarrow \alpha$ soddisfa (10);
- α_1, α_2 soddisfano (10) $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2$ soddisfa (10);
- α soddisfa (10), β tangente a 0
 $\Rightarrow \alpha \circ \beta$ e $\beta \circ \alpha$ (quando definite) tangenti a 0.

Dimostriamo ora la regola della catena ([Lang, 1999, cap. I, proposizione 3.1]).

Dimostrazione. Per semplificare le notazioni, poniamo

$$y_0 := f(x_0) , \quad \lambda := f'(x_0) , \quad \mu := g'(y_0) .$$

Per definizione di derivata, esistono applicazioni φ, ψ tangenti a 0 tali che

$$f(x_0 + h) = y_0 + \lambda(h) + \varphi(h) , \quad g(y_0 + k) = g(y_0) + \mu(k) + \psi(k) ,$$

per h, k in opportuni intorno degli 0.

Dunque

$$(11) \quad g(f(x_0 + h)) = g(y_0) + \mu((\lambda + \varphi)(h)) + \psi((\lambda + \varphi)(h)) \\ = g(y_0) + (\mu \circ \lambda)(h) + (\mu \circ \varphi)(h) + (\psi \circ (\lambda + \varphi))(h)$$

(sempre in un intorno di 0). Per le osservazioni 6.13 e 6.6, la somma

$$r := \mu \circ \varphi + \psi \circ (\lambda + \varphi)$$

è tangente a 0, e (11) si può scrivere

$$g(f(x_0 + h)) = g(y_0) + (\mu \circ \lambda)(h) + r(h) .$$

Ciò significa, per definizione di derivata, che

$$(g \circ f)'(x_0) = \mu \circ \lambda = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) ,$$

come volevamo. □

7. MAPPE C^p

Studiare [Lang, 1999, pag. 9, da “The rest of this section. . .” alla Remark esclusa, ed escluso il riferimento (verso la fine) all’identificazione con $L^p(\mathbf{E}, \mathbf{F})$]

Riguardo a [Lang, 1999, cap. I, proposizione 2.4], ci limitiamo ad osservare che un elemento

$$\lambda \in L(\mathbf{E}, L(\mathbf{E}, \dots, L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \dots))$$

(“ p volte”) corrisponde naturalmente alla forma multilineare

$$\mathbf{E} \times \dots \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}, \quad (x^1, \dots, x^p) \mapsto \lambda(x^1) \dots (x^p) .$$

In base a ciò, di solito la derivata p -esima in un punto viene considerata come una forma p -lineare. Il classico teorema di Schwarz sull’inversione dell’ordine delle derivate corrisponde all’affermazione che questa forma è simmetrica ([Lang, 1999, proposizione 3.3]), ma noi non useremo questo fatto. Almeno in dimensione finita, le forme simmetriche sono in corrispondenza naturale con polinomi omogenei, e quindi la derivata p -esima può anche essere vista come un tale polinomio.

Esercizio (facoltativo) 7.1. *Dimostrare che nella categoria dei k -spazi vettoriali, l’ovvia applicazione $\text{Hom}(V_1, (\text{Hom}(V_2, W))) \rightarrow \text{Bil}(V_1, V_2; W)$ (spazio delle forme k -bilineari $V_1 \times V_2 \rightarrow W$) è un isomorfismo naturale di funtori di tre variabili.*

Lemma 7.2. *Sia $f : U \rightarrow V$ una funzione di classe C^p , con $U \subseteq \mathbf{E}$ e $V \subseteq \mathbf{F}$ aperti, e sia $\lambda \in L(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Allora $\lambda \circ f$ ⁽²⁰⁾ è di classe C^p .*

Dimostrazione. Per induzione su p . La base d’induzione $p = 0$ è immediata. Se f è di classe C^p , con $p \geq 1$, allora per la regola della catena e l’osservazione 6.11, punto 4, abbiamo

$$(\lambda \circ f)' = L(\mathbf{E}, \lambda) \circ f'$$

(vedi l’osservazione 3.6). Poiché $L(\mathbf{E}, \lambda)$ è lineare e continua ed f' è di classe C^{p-1} , per l’ipotesi d’induzione abbiamo che $(\lambda \circ f)'$ è di classe C^{p-1} . Dunque $\lambda \circ f$ è di classe C^p , come si voleva. □

²⁰Ad essere pedanti, dovremmo scrivere $\lambda \upharpoonright_V \circ f$.

Osservazione 7.3. Presi spazi vettoriali topologici $\mathbf{E}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ ed U intorno di 0 in \mathbf{E} , siano $\alpha_1 : U \rightarrow \mathbf{F}_1$, $\alpha_2 : U \rightarrow \mathbf{F}_2$ tangenti a zero. Dato un intorno $W := W_1 \times W_2$ di $(0, 0)$ in $\mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2$, con W_1, W_2 convessi, esistono intorni di 0 , $V_1, V_2 \subseteq \mathbf{E}$, e funzioni $o_1(t), o_2(t)$ tali che

$$\alpha_1(tV_1) \subseteq o_1(t)W_1, \quad \alpha_2(tV_2) \subseteq o_2(t)W_2;$$

e possiamo assumere $o_1(t), o_2(t) \geq 0$ (osservazione 6.5). Prendendo $V := V_1 \cap V_2$ e $o(t) := \max\{o_1(t), o_2(t)\}$ otteniamo

$$(\alpha_1, \alpha_2)(tV) \subseteq o(t)W.$$

Dunque (α_1, α_2) è tangente a 0 .

Da ciò si ricava facilmente che una funzione $(f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2$ ($U \subseteq \mathbf{E}$ aperto) è differenziabile in x_0 se f_1 e f_2 lo sono, e che in tal caso possiamo identificare $(f_1, f_2)'$ e (f'_1, f'_2) per composizione con l'isomorfismo naturale

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2) \xrightarrow{\sim} L(\mathbf{E}, \mathbf{F}_1) \oplus L(\mathbf{E}, \mathbf{F}_2).$$

L'osservazione si estende immediatamente al caso di più fattori.

Proposizione 7.4. Sia $U \subseteq \mathbf{E}$ aperto. Un'applicazione $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbf{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{F}_n$ è di classe C^p se e solo se ciascuna delle f_i lo è.

Dimostrazione. Se f è di classe C^p , siccome le proiezioni di $\mathbf{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{F}_n$ sono lineari e continue, le f_i sono di classe C^p per il lemma 7.2.

Dimostriamo l'implicazione inversa per induzione su p . Per $p = 0$ è la proprietà universale del prodotto topologico. Se $p \geq 1$, l'osservazione 7.3 fornisce

$$f' = \tau^{-1} \circ (f'_1, \dots, f'_n),$$

con $\tau : L(\mathbf{E}, \mathbf{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{F}_n) \xrightarrow{\sim} L(\mathbf{E}, \mathbf{F}_1) \oplus \dots \oplus L(\mathbf{E}, \mathbf{F}_n)$. Siccome le f'_i sono di classe C^{p-1} per ipotesi, l'ipotesi d'induzione assicura che (f'_1, \dots, f'_n) è di classe C^{p-1} . Poiché τ^{-1} è lineare e continuo (di norma 1), ancora per il lemma 7.2, abbiamo che f' è di classe C^{p-1} . Dunque f è di classe C^p , come si voleva. \square

Osservazione 7.5. Sia $\mu : \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \rightarrow \mathbf{F}$ bilineare e continua, e studiamone la differenziabilità come funzione $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2 \rightarrow \mathbf{F}$. Innanzitutto, è facile rendersi conto che è tangente a 0 . Abbiamo inoltre

$$\mu(x_0 + h, y_0 + k) = \mu(x_0, y_0) + \mu(x_0, k) + \mu(h, y_0) + \mu(h, k).$$

Quindi

$$\mu'(x_0, y_0)(h, k) = \mu(x_0, k) + \mu(h, y_0).$$

Questo implica facilmente che μ' è lineare e continua. Tenendo presente l'osservazione 6.11, otteniamo che μ è di classe C^p per ogni p .

In quanto appena visto abbiamo derogato dalla prassi secondo cui, generalmente, non conviene considerare il dominio di un'applicazione multilineare come uno spazio vettoriale, ma solo come un prodotto.

Proposizione 7.6. Siano $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow W$ di classe C^p , con $U \subseteq \mathbf{E}$, $V \subseteq \mathbf{F}$ e $W \subseteq \mathbf{G}$ aperti (di spazi di Banach). Allora $g \circ f$ è di classe C^p .

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su p . Il caso $p = 0$ è immediato.

Sia dunque $p > 0$ e consideriamo l'applicazione bilineare e continua

$$\mu : L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \oplus L(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{G}), \quad (\lambda, \lambda') \mapsto \lambda' \circ \lambda$$

(proposizione 3.5).

Per la regola della catena abbiamo

$$(g \circ f)' = \mu \circ (f', g' \circ f).$$

Siccome f, g sono di classe C^p , f', g' sono di classe C^{p-1} . Per l'ipotesi d'induzione, la proposizione 7.4 e l'osservazione 7.5, abbiamo che $(g \circ f)'$ è di classe C^{p-1} . Dunque $g \circ f$ è di classe C^p , come volevamo. \square

Abbiamo appena dimostrato [Lang, 1999, proposizione 3.2]. Ora, studiare

[Lang, 1999, cap. I, parti intermedie tra le proposizioni 3.2 e 3.5, cioè **tutte le proposizioni escluse.**]

Osservazione 7.7. *Se $f : U \rightarrow V$ è una funzione tra aperti di spazi di Banach e per ogni U_i in un ricoprimento di aperti di U la restrizione $f \upharpoonright_{U_i}$ è un morfismo, allora f è un morfismo.*

In termini succinti, abbiamo osservato che i C^p -morfismi hanno “carattere locale”. Segue subito anche quello che può essere chiamato “lemma di incollamento per gli aperti”: se morfismi definiti su aperti che ricoprono U coincidono sulle intersezioni, allora sono restrizioni di un morfismo definito su tutto U , univocamente determinato (detto il loro “incollamento”).

Ora, studiare

[Lang, 1999, cap. I, proposizione 3.10].

Dimostriamo questa proposizione, in una forma leggermente più generale.

Dimostrazione.

Supporremo qui che U sia aperto in un qualunque spazio di Banach \mathbf{H} (lo spazio \mathbf{E} è coinvolto in altre parti degli enunciati).

- (i): Sia $\text{ev} : L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ l'applicazione di valutazione (vedi la proposizione 3.5), che l'osservazione 7.5 assicura essere un morfismo. Basta osservare che l'applicazione in questione è semplicemente $\text{ev} \circ (f \times \text{id}_{\mathbf{E}})$ e tenere presente l'osservazione 1.9 e la proposizione 7.4.
- (ii): Stavolta si considera la mappa di composizione $\gamma : L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{G})$ (vedi ancora la proposizione 3.5), e si osserva che l'applicazione in questione è $\gamma \circ (f, g)$.
- (iii):²¹ Qui usiamo l'operazione $\mu : \mathbb{R} \times L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ di moltiplicazione per scalari, che è comunque bilineare e continua. La mappa in questione è $\mu \circ (f, g)$.
- (iv):²² Ora abbiamo a che fare con $\sigma \circ (f, g)$, dove $\sigma : L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ l'operazione di addizione. L'unica novità è che σ è lineare, non bilineare; ma è comunque un morfismo.

\square

²¹Qui l'asserto in realtà vale per qualunque spazio di Banach, non solo per uno spazio di applicazioni lineari e continue.

²²Anche qui la cosa è ovviamente vera per ogni spazio, non solo per quelli del tipo $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

8. INTEGRALE IN UNA VARIABILE

Per l'integrale, rinunciamo a richiamare le definizioni di base in maniera completa. L'unica novità, volendo operare nel contesto degli spazi di Banach, sarebbe che (mentre il codominio non crea problemi) il dominio delle funzioni deve essere supposto di dimensione finita (cfr. [Lang, 1999, preambolo del cap. XV, pag. 397]). Ci limitiamo allo stretto necessario per questo corso, e cioè alla definizione dell'integrale di una funzione definita su un intervallo chiuso ed a valori in uno spazio di Banach.

[Lang, 1999, cap. I, par. 4, fino a "the **integral** of f ." (fine pag. 12), esclusa la parentesi "(its measure in the standard Lebesgue measure)": la lunghezza di un intervallo è il valore assoluto della differenza tra gli estremi.]

9. ALCUNE DESCRIZIONI LOCALI IN BASE ALLA DERIVATA IN UN PUNTO

[Lang, 1999, cap. I, enunciati dei teoremi 5.2 e 5.9 (tenendo presente che $p \geq 1$).]

Assumiamo note dal corso di sistemi dinamici le dimostrazioni dei suddetti teoremi (detti *della funzione inversa* e *della funzione implicita*). I lettori che non abbiano incontrato queste dimostrazioni nel loro corso di studi, sono invitati a prenderne almeno visione (anche se non saranno richieste all'esame). Gli enunciati di [Lang, 1999] sono un po' meno dettagliati, e si ottengono immediatamente da quelli noti. Per il teorema della funzione inversa, è comunque molto semplice dedurre l'enunciato dettagliato da quello in [Lang, 1999], che dunque è una forma equivalente del teorema. La forma del teorema della funzione implicita in [Lang, 1999] è invece leggermente più debole (perché richiede la continuità della derivata di f , mentre per avere la continuità di g basta solo la continuità e la continuità della derivata parziale di f). Ricordiamo anche che il teorema della funzione inversa si ottiene facilmente dal teorema della funzione implicita, e menzioniamo che, nella forma di [Lang, 1999], è anche il secondo a dedursi facilmente dal primo.

Questi due teoremi sono un esempio di un fenomeno abbastanza comune: spesso una proprietà che è vera per la derivata (differenziale) in un punto, è vera in un intorno del punto (anche se spesso, come nella presente situazione, c'è bisogno di qualche ipotesi aggiuntiva).

[Lang, 1999, cap. I, enunciato del corollario 5.5.]

Proponiamo qui una dimostrazione diversa da quella riportata in [Lang, 1999] (il lettore, se vuole, può anche studiare quella in sostituzione di questa). In ciò che segue, chiameremo un'*inversa locale* di un isomorfismo locale f la mappa inversa di un isomorfismo restrizione di f .

Dimostrazione. Scrivendo $f = (f_1, f_2)$, l'ipotesi implica subito che $f'_1(x_0)$ è un isomorfismo toplineare. Per il teorema della funzione inversa, f_1 ammette un'inversa locale, che denotiamo con $f_1^{-1} : V \rightarrow U_1$, con V intorno aperto di 0 in \mathbf{F}_1 ed U_1 intorno aperto di x_0 in U . Basta allora prendere l'isomorfismo

$$g := \text{id} - (0, f_2 \circ f_1^{-1} \circ \pi_1) : \begin{array}{ccc} V \times \mathbf{F}_2 & \rightarrow & V \times \mathbf{F}_2 \\ (y_1, y_2) & \mapsto & (y_1, y_2 - f_2(f_1^{-1}(y_1))) \end{array} \subseteq \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2$$

(l'inverso è $\text{id} + (0, f_2 \circ f_1^{-1} \circ \pi_1)$). □

[Lang, 1999, cap. I, dal corollario 5.6 all'enunciato del corollario 5.7.]

Anche per il corollario 5.7 modifichiamo (leggermente) la dimostrazione che si trova in [Lang, 1999], lasciando al lettore facoltà di scegliere tra questa e l'originale.

Dimostrazione. Posto $\varphi := (\pi_1, f) : U \rightarrow \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{F}$ abbiamo

$$\varphi'(a_1, a_2) = (\pi_1, f'(a_1, a_2)) : \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2 \rightarrow \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{F} .$$

Ponendo, per semplicità di notazione, $\lambda_1 := D_1 f(a_1, a_2)$, $\lambda_2 := D_2 f(a_1, a_2)$ abbiamo

$$\varphi'(a_1, a_2)(h_1, h_2) = (h_1, \lambda_1(h_1) + \lambda_2(h_2))$$

(²³). Dette p_1, p_2 le proiezioni di $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{F}$, poiché λ_2 è un isomorfismo toplineare per ipotesi, possiamo considerare l'applicazione

$$\psi := \left(p_1, \lambda_2^{-1} \circ p_2 - \lambda_2^{-1} \circ \lambda_1 \circ p_1 \right) : \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$$

(che è quindi lineare e continua). Poiché

$$\psi(k_1, k_2) = \left(k_1, \lambda_2^{-1}(k_2) - \lambda_2^{-1}(\lambda_1(k_1)) \right) ,$$

basta qualche calcolo per verificare che ψ è inversa di $\varphi'(a_1, a_2)$.

Applicando il teorema della funzione inversa, otteniamo un'inversa locale h di φ , e possiamo assumere che il suo dominio sia del tipo $V_1 \times V_2$ (semplicemente operando una restrizione). Continuando a denotare con p_1, p_2 le proiezioni di $V_1 \times V_2 \subseteq \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{F}$, abbiamo

$$(p_1, p_2) = \text{id} = \varphi \circ h = (\pi_1, f) \circ h = (\pi_1 \circ h, f \circ h) .$$

In particolare $f \circ h = p_2$, il che dimostra l'asserto. \square

[Lang, 1999, cap. I, corollario 5.8.]

Osservazione 9.1. *Il fatto che [Lang, 1999, cap. 1, corollario 5.8] sia una riformulazione di [Lang, 1999, cap. 1, corollario 5.7] è quasi automatico, ma richiede il punto 1 dell'osservazione 4.7, che a sua volta è conseguenza del teorema della funzione aperta (cfr. corollario 4.15).*

Il ricorso al teorema della funzione aperta poteva essere evitato introducendo una nozione di “epimorfismo che spezza”, duale di quella di monomorfismo che spezza data dopo [Lang, 1999, cap. 1, corollario 5.6] (in tal modo si sarebbe ottenuta una formulazione più generale, anche se più debole, del corollario; d'altro canto, indebolire la formulazione poteva comportare dei rischi, nel caso il corollario fosse poi utilizzato in risultati successivi).

²³Qui abbiamo usato il fatto che la derivata “totale” è la “somma” delle derivate parziali, di semplice verifica. Infatti $D_1 f(a_1, a_2) = D(f \circ (\text{id}, a_2))(a_1) \stackrel{\text{reg. catena}}{=} Df(a_1, a_2) \circ (\text{id}, 0)$; ed analogamente $D_2 f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2) \circ (0, \text{id})$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) &= Df(a_1, a_2) \left((\text{id}, 0)(h_1) + (0, \text{id})(h_2) \right) \\ &= Df(a_1, a_2) \left((\text{id}, 0)(h_1) \right) + Df(a_1, a_2) \left((0, \text{id})(h_2) \right) \\ &= D_1 f(a_1, a_2)(h_1) + D_2 f(a_1, a_2)(h_2) . \end{aligned}$$

10. VARIETÀ DIFFERENZIABILI

[Lang, 1999, cap. II, par. 1 fino a “both open and closed.” (pag. 23, rigo 16).]

Osservazione 10.1. *Se la topologia indotta su un insieme X da un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{I \in \mathcal{I}}$ lo rende uno spazio connesso, allora tutti gli \mathbf{E}_i , con i tale che $U_i \neq \emptyset$, sono toplinearmemente isomorfi, e la famiglia delle (U_i, φ_i) con $U_i \neq \emptyset$ è ovviamente ancora un atlante.*

Notiamo poi che quando tutti gli \mathbf{E}_i di un atlante sono tra loro toplinearmemente isomorfi, allora preso un qualunque \mathbf{E} ad essi toplinearmemente isomorfo e sostituendo ogni φ_i con una composizione $U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbf{E}_i \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}$, si ottiene un \mathbf{E} -atlante.

Si può facilmente osservare che l' \mathbf{E} -atlante ora considerato lascia invariata la topologia; ma si ha di più. Infatti, un atlante su un insieme X consente, tramite le carte, di “tradurre” su X vari concetti e risultati di analisi. Atlanti diversi in generale danno luogo a “traduzioni” diverse, ma in certi casi (come appunto questo) la traduzione è sostanzialmente la stessa. Formalizziamo ora questa idea, introducendo, con [Lang, 1999], la nozione di compatibilità.

[Lang, 1999, cap. II, par. 1 da “Suppose that...” (pag. 23, rigo 19) fino a “... dimensional.” (a 10 righe dalla fine di pag. 23).]

Fino ad avviso contrario, per le “manifolds” di [Lang, 1999] useremo il termine “varietà” (nella parte di geometria algebrica del corso, per varietà si intenderà una varietà algebrica su un campo qualunque).

Per carta su una varietà si intende una carta che appartenga a qualcuno degli atlanti della C^p -struttura²⁴. Poiché atlanti equivalenti inducono la stessa topologia, una varietà è sempre tacitamente considerata anche uno spazio topologico²⁵.

Esempio 10.2. *Su un qualunque spazio di Banach \mathbf{E} c'è una struttura canonica di varietà: la classe di equivalenza dell'atlante $\{(\mathbf{E}, \text{id})\}$.*

Altri esempi di varietà si otterranno come sottovarietà di spazi di Banach (una volta data la definizione di sottovarietà). Di fatto, quasi tutte le varietà di interesse in geometria differenziale sono sottovarietà di spazi finito-dimensionali²⁶. Tuttavia, come ci si può rendere conto dai corsi che trattano un po' di geometria differenziale

²⁴Se consideriamo l'insieme di tutte le carte, otteniamo ancora un atlante della C^p -struttura. Definendo gli atlanti come insiemi di carte e non come famiglie con indici, l'atlante ora menzionato è ovviamente massimale rispetto all'inclusione. In molti testi una C^p -struttura è definita come un C^p -atlante massimale, piuttosto che come classe di equivalenza di atlanti. Le impostazioni forse più diffuse trattano solo quelle che per [Lang, 1999] sono le (C^p-) varietà n -dimensionali di Hausdorff e a base numerabile; una dicitura per esteso molto comune è “varietà differenziabili (di classe C^p)”. Per le C^∞ -varietà è anche molto usato il termine “varietà lisce” (smooth manifolds).

²⁵In molti testi, la topologia fa parte della definizione (e gli atlanti vengono definiti tenendone conto).

²⁶addirittura, un teorema di Whitney ci assicura che ogni C^p -varietà n -dimensionale, di Hausdorff a base numerabile — e secondo la terminologia forse più diffusa ogni varietà è di questo tipo — se $n, p \geq 1$, è diffeomorfa (cioè isomorfa nella categoria delle C^p -varietà, che stiamo per costruire) ad una sottovarietà di uno spazio di dimensione $2n$. Nash ha dimostrato un analogo teorema per varietà riemanniane (che per il momento possiamo sommariamente descrivere come varietà dotate di una metrica localmente approssimabile con prodotti scalari definiti positivi).

elementare ²⁷, il modo forse più efficace per studiare tali sottovarietà è quello di usare rappresentazioni parametriche locali: già solo questo basterebbe a giustificare l'introduzione del linguaggio tecnico basato su carte e atlanti.

Un'assunzione fondamentale della relatività generale è che lo spazio-tempo (l'insieme degli eventi, dove per evento si intende un dato punto ad un dato istante) sia proprio una varietà 4-dimensionale, che pensare immersa in uno spazio vettoriale "ambiente" risulterebbe quantomeno artificioso ²⁸. Inoltre, le famose geometrie non-euclidee sono efficacemente descrivibili come 2-varietà, ed anche per loro risulta artificiale l'immersione in uno spazio ambiente (eccettuata forse la geometria sferica, se la si vuole includere tra le non-euclidee). Gli spazi delle configurazioni e delle fasi di sistemi meccanici sono poi altri esempi di varietà di cui è spesso inutilmente ingombrante fissare un'immersione in uno spazio ambiente. Infine, il punto di vista "intrinseco" chiarisce meglio alcuni risultati importanti, come il famoso theoremata egregium di Gauss, aprendo un'agevole strada per utili generalizzazioni.

[Lang, 1999, cap. II, par. 1, continuare (da "In this case...") fino al rigo "and (V, ψ) at $f(x)$ such that $f(U) \subset V$." (cioè fino ad 11 righe dalla fine di pag. 24).]

Osservazione 10.3. *Sia f un C^0 -morfismo di varietà. Presa per ciascun $x \in X$ una carta (U_x, φ) in x ed una carta (V, ψ) tali che $f(U_x) \subseteq V$, allora $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_x) \rightarrow \psi(V)$ è un C^0 -morfismo di aperti di spazi di Banach, cioè è continua. Poiché poi φ e ψ inducono omeomorfismi $U \leftrightarrow \varphi(U)$ e $V \leftrightarrow \psi(V)$, abbiamo che la restrizione $U \rightarrow V$ di f è continua. Questo implica che f è continua (è l'analogo dell'osservazione 7.7 per applicazioni continue tra spazi topologici, di facile dimostrazione). Ancor più facilmente si verifica che, viceversa, una mappa continua è un C^0 -morfismo. In conclusione, i C^0 -morfismi sono esattamente le mappe continue.*

Poiché poi se $q \leq p$ allora, ovviamente, un C^p -morfismo è anche un C^q -morfismo, abbiamo che i C^p -morfismi sono tutti continui.

[Lang, 1999, cap. II, par. 1, continuare (da "It is clear...") fino alla fine di pag. 24 (cioè fino a "the map $\psi f \varphi^{-1}$ ".).]

Osservazione 10.4. *L'osservazione 7.7 (carattere locale) si estende facilmente al caso in cui f è un'applicazione tra varietà.*

11. SOTTOVARIETÀ, IMMERSIONI E SOMMERSIONI

[Lang, 1999, cap. II, par. 2, fino a "closed submanifold." (pag. 26, rigo 18), senza preoccuparsi di dettagliare l'ultima affermazione del primo capoverso: "any open interval is locally closed in the plane.", e senza verificare l'affermazione che la proprietà universale caratterizza la struttura di sottovarietà (la proprietà universale va però dimostrata).]

²⁷Con "elementare" vogliamo riferirci alla teoria classica delle curve e superfici nel piano e nello spazio ordinari. In qualche modo anche il presente corso è elementare, se per "elementare" si intende "di base".

²⁸Mentre per la relatività ristretta la possibilità di introdurre delle coordinate può essere ottenuta come conseguenza di altre assunzioni fondamentali, la coordinabilità locale in relatività generale è sostanzialmente un postulato (non è escluso che questo abbia contribuito, forse inconsapevolmente, al travaglio di Einstein nella formulazione di questa teoria).

Esempio 11.1. *Aperti di varietà, singoli punti di varietà, sottospazi chiusi che spezzano in spazi di Banach, o più generalmente sottospazi affini chiusi che spezzano in spazi di Banach*²⁹, sono esempi banali di sottovarietà.

[Lang, 1999, cap. II, par. 2, da “Let $f : Z \rightarrow X$ be...” (pag. 26, sestultimo rigo) fino a “... at every point.” (pag. 26, penultimo rigo).]

Esercizio (facoltativo) 11.2. *Sia $f :]-1, 6[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da*

$$f(t) := \begin{cases} (1, t) & \text{se } t \in]-1, 0], \\ (\cos t, \sin t) & \text{se } [0, \frac{3}{2}\pi], \\ (t - \frac{3}{2}\pi, -1) & \text{se } [\frac{3}{2}\pi, 6[. \end{cases}$$

(è ben posta). *Provare che f è una C^p -immersione iniettiva per $p = 0$ (se si vuole, lo si provi anche per $p = 1$) e che la sua immagine non è una sottovarietà.*

[Lang, 1999, cap. II, par. 2, da “An immersion...” (pag. 27, dopo la parentesi sotto la figura) fino alla dimostrazione della proposizione 2.2, esclusa la frase “One sees... open mapping)” (a pag. 27, righe 12 e 13). Si tenga anche presente che, nella definizione di sommersione, $f_{V,U}$ conviene considerarla come mappa $U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbf{F}$ con $\mathbf{F} \supseteq \psi(V)$, e che nella dimostrazione della proposizione 2.2 i numeri giusti dei corollari sono 5.6 e 5.8.].

Osservazione 11.3. *Se $f : X \rightarrow Y$ è una sommersione ed $y \in Y$, allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà.*

12. SPAZIO TANGENTE

[Lang, 1999, cap. II, par. 2, da “Let X be a manifold” (a 4 righe dalla fine di pag. 27) fino all’enunciato della proposizione 2.3 (la dimostrazione va fatta autonomamente: è breve e quasi automatica)].

Definizione 12.1. *Un \mathbb{R} -spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo è detto spazio di Hilbert reale*³⁰ *se è di Banach come spazio normato (vedi esempio 2.2).*

È bene menzionare (senza entrare nei particolari, anche se non sarebbero granché onerosi) che il piano e lo spazio ordinari possono essere considerati spazi di Hilbert (purché si fissi un’origine ed un’unità di misura).

[Lang, 1999, cap. II, par. 2, esempio a pag. 29].

²⁹Un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V (anche detto varietà lineare in V) è semplicemente un sottoinsieme del tipo $x + W$ con $x \in V$ e W sottospazio di V . Diciamo che $x + \mathbf{F}$ spezza in $\mathbf{E} \supseteq \mathbf{F}$ se \mathbf{F} spezza.

³⁰È bene menzionare che il fratello maggiore, lo spazio di Hilbert complesso, è dotato di un prodotto hermitiano.

13. FIBRATI VETTORIALI

[Lang, 1999, cap. III, par. 1, fino a “... is implied by **VB 2**” (pag. 45, rigo 3), senza dimostrare quest’ultima affermazione (sarebbe la successiva proposizione 1.1, che non fa parte del programma). Inoltre, le condizioni **VB** vanno estese ammettendo che il fattore \mathbf{E}_i , nel codominio $U_i \times \mathbf{E}_i$ di τ_i , possa dipendere da i .]

Esempio 13.1. *Sia X una varietà, $E := X \times \mathbf{E}$ e $\pi : E \rightarrow X$ la proiezione sul primo fattore. Allora $\{(X, \text{id}_E)\}$ è un ricoprimento banalizzante e definisce quindi sul prodotto $X \times \mathbf{E}$ una struttura di fibrato vettoriale con base X e fibra \mathbf{E} .*

Un fibrato prodotto è il prototipo di quei fibrati che saranno detti banali (o triviali, “trivial” in inglese). I fibrati vettoriali, anche se localmente hanno tutti una struttura banale, possono presentare comportamenti ben diversi da quelli di un fibrato prodotto.

[Lang, 1999, cap. III, par. 1, proposizione 1.2 con dimostrazione, ma togliendo dall’ipotesi “as well as the cocycle condition”].]

poi

[Lang, 1999, cap. III, par. 1, da “We now make...” (circa a metà di pag. 47) fino a “... for which f_0 is the identity.” (pag. 49, rigo 8), senza verificare la ridondanza di **VB Mor 2** in dimensione finita (frase a pag. 48, righe 11 e 12).]

Definizione 13.2. *Un fibrato vettoriale si dice banale (o triviale) se è VB-isomorfo ad un fibrato prodotto $X \times \mathbf{E}$ (vedi esempio 13.1).*

A posteriori, una volta data la definizione di fibrato banale, possiamo dire che la definizione di fibrato vettoriale chiede che ogni fibrato sia localmente banale.

14. FIBRATO TANGENTE

[Lang, 1999, cap. III, par. 2, fino a “... of class C^{p-1} .” (a 7 righe dalla fine di pag. 51).]

e poi

[Lang, 1999, cap. III, par. 2, da “If $f : X \rightarrow X'$...” (pag. 52, rigo 5) fino alla “remark” esclusa (alla fine del paragrafo).]

Il fibrato tangente, come ogni fibrato vettoriale, è localmente banale (vedi commento dopo la definizione 13.2); tenendo presente la sua costruzione, abbiamo immediatamente che è banale sui domini delle carte. È di grande importanza sapere che globalmente, in generale, il fibrato tangente non è banale (menzioniamo, ad esempio, che una sfera nello spazio ordinario ha fibrato tangente non banale).

Osservazione 14.1. *Da quanto detto qui sopra risulta anche subito chiaro che il fibrato tangente di un aperto $U \subseteq \mathbf{E}$ è (globalmente) banale, in quanto tutto U è dominio della carta (U, id) ³¹.*

³¹Qui naturalmente, seguendo il solito tipo di abuso di notazione, id indica la restrizione $U \rightarrow \mathbf{E}$ dell’identità di \mathbf{E} — più propriamente detta applicazione d’inclusione — che poi ristretta sul codominio diventa l’identità di U .

Data la particolarità della carta (U, id) possiamo anche dire che $T(U)$ è banale in maniera canonica, cioè c'è un canonico VB-isomorfismo (che è anzi un VB(U)-isomorfismo)

$$T(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbf{E}$$

(ed è anche sia una trivializzazione, sia una carta).

Definizione 14.2. *Sia X una varietà di classe C^p con $p \geq 1$. Un campo vettoriale su X (di classe C^{p-1}) è una sezione del fibrato tangente $\pi : T(X) \rightarrow X$ (cioè un C^{p-1} -morfismo $\xi : X \rightarrow T(X)$ tale che $\pi \circ \xi = \text{id}_X$). Il valore di un campo vettoriale ξ su $x \in X$ (che è quindi un vettore tangente in x) viene di solito denotato con ξ_x (invece che con $\xi(x)$).*

15. OPERAZIONI SU FIBRATI VETTORIALI

Definizione 15.1. *Sia \mathfrak{B} la categoria degli spazi banachabili (con morfismi le applicazioni lineari e continue). Diremo che un funtore $\lambda : \mathfrak{B} \times \cdots \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ di n variabili è di classe C^p se le applicazioni sui morfismi*

$$L(\mathbf{E}_1, \mathbf{F}_1) \oplus \cdots \oplus L(\mathbf{E}_n, \mathbf{F}_n) \rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \quad , \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto \lambda(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

sono C^p -morfismi (qui \mathbf{E} ed \mathbf{F} sono ciascuno immagine tramite λ di una n -pla di spazi presi tra gli \mathbf{E}_i ed \mathbf{F}_i , a seconda del tipo di covarianza di λ).

Sia dunque λ un tale funtore e siano poi π_1, \dots, π_n fibrati vettoriali su una C^p -varietà X . Per ciascun $x \in X$, adottiamo (com'è d'uso in situazioni simili) la notazione $\pi_{i,x}$ invece della più ingombrante $(\pi_i)_x$ (che, ricordiamo, indica la fibra $\pi_i^{-1}(x)$); poniamo allora

$$E_x := \{x\} \times \lambda(\pi_{1,x}, \dots, \pi_{n,x})$$

e sia

$$E := \bigcup_{x \in X} E_x \quad .$$

Poiché $E_x \cap E_y = \emptyset$ per $x \neq y$, abbiamo una proiezione

$$\pi : E \rightarrow X \quad ,$$

che manda ogni $v \in E$ nell'unico x tale che $v \in E_x$.

Per ciascun fissato $x \in X$, siano $\tau_i : \pi_i^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbf{E}_i$, con $i \in \{1, \dots, n\}$, trivializzazioni in x . Poniamo $U := \bigcap_i U_i$ e per ciascun $y \in U$ sia σ_{iy} l'isomorfismo toplineare $\tau_{iy} : \pi_{i,y} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_i$ oppure il suo inverso a seconda che la i -esima variabile sia covariante o controvariante. Tenendo presente che ogni $v \in E$ è una coppia, che possiamo denotare con (y, \bar{v}) , dove $y = \pi(v) \in X$ e $\bar{v} \in \lambda(\pi_{1,y}, \dots, \pi_{n,y})$, definiamo un'applicazione

$$\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \lambda(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n) \quad , \quad v \mapsto (y, \lambda(\sigma_{1y}, \dots, \sigma_{ny})(\bar{v})) \quad .$$

È abbastanza automatico verificare che la famiglia delle (U, τ) , al variare di $x \in X$, soddisfa le ipotesi di [Lang, 1999, cap. III, proposizione 1.2], e che la conseguente struttura su π di fibrato vettoriale non dipende dalla scelta delle trivializzazioni τ_i (per ciascun x); per verificare la condizione **VB 3** va tenuto presente che il funtore λ è supposto di classe C^p .

Definizione 15.2. *Il fibrato vettoriale π sopra costruito sarà indicato, per abuso di notazione, con $\lambda(\pi_1, \dots, \pi_n)$. Se E_i denota lo spazio totale di π_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), si potrà usare anche la (ancora un po' più imprecisa) notazione $\lambda(E_1, \dots, E_n)$.*

Estendiamo ora (in maniera ovvia) la definizione del funtore L (vedi osservazione 3.6) al caso multilineare.

Osservazione 15.3. *Se $\mu : \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{F}$ è un'applicazione multilineare e continua tra spazi normati, e $\varphi_1 : \mathbf{E}'_1 \rightarrow \mathbf{E}_1, \dots, \varphi_n : \mathbf{E}'_n \rightarrow \mathbf{E}_n, \psi : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}'$ sono applicazioni lineari e continue, allora*

$$\psi \circ \mu \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbf{E}'_1 \times \cdots \times \mathbf{E}'_n \rightarrow \mathbf{F}'$$

è ancora un'applicazione multilineare e continua, di norma $\leq |\psi| |\mu| |\varphi_1| \cdots |\varphi_n|$. Otteniamo allora un'applicazione lineare e continua

$$L(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \psi) : L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F}) \rightarrow L(\mathbf{E}'_1, \dots, \mathbf{E}'_n; \mathbf{F}'),$$

di norma $\leq |\psi| |\varphi_1| \cdots |\varphi_n|$. È automatico verificare che

$$(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n, \mathbf{F}) \mapsto L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F}), \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi) \mapsto L(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \psi)$$

definisce un funtore di $n+1$ variabili (covariante nell'ultima e controvariante nelle altre) sulla categoria degli spazi normati. Poiché poi il funtore manda spazi di Banach in spazi di Banach e la definizione non dipende dalla norma, si ottiene anche un funtore sulla categoria \mathfrak{B} degli spazi banachabili. Inoltre, siccome le applicazioni sui morfismi

$$L(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}_1) \oplus \cdots \oplus L(\mathbf{E}'_n, \mathbf{E}_n) \oplus L(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \rightarrow L(L(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F}), L(\mathbf{E}'_1, \dots, \mathbf{E}'_n; \mathbf{F}'))$$

sono multilineari e continue (di norma ≤ 1), esse sono di classe C^∞ . Dunque il funtore su \mathfrak{B} è di classe C^∞ .

Ricordando che $L^n(\mathbf{E}) := L(\mathbf{E}, \dots, \mathbf{E}; \mathbb{R})$, otteniamo in particolare un funtore controvariante di una sola variabile, di classe C^∞ sulla categoria degli spazi banachabili, che indichiamo quindi con L^n . Nel caso $n = 1$, $L^1(\mathbf{E})$ è lo spazio duale (topologico) \mathbf{E}^\vee , ed è preferibile usare questa notazione (anche per il morfismo φ^\vee), per evitare confusioni con il funtore L introdotto nell'osservazione 3.6.

Osservazione 15.4. *Il sottospazio $L_s^2(\mathbf{E}) \subseteq L^2(\mathbf{E})$ dato dalle applicazioni bilineari simmetriche è chiuso (basta notare ad esempio che è il nucleo dell'applicazione lineare e continua*

$$L^2(\mathbf{E}) \rightarrow L^2(\mathbf{E}), \quad \mu \mapsto \mu - \mu^t,$$

dove $\mu^t(x, y) := \mu(y, x)$; oppure si può osservare direttamente che il limite di una successione convergente di forme simmetriche è simmetrico).

L'osservazione si estende senza particolari difficoltà ad n qualunque, ed anche allo spazio $L_a^n(\mathbf{E})$ forme alternanti.

L'osservazione ora fatta ci assicura che per uno spazio banachabile \mathbf{E} , gli spazi $L_s^n(\mathbf{E})$ ed $L_a^n(\mathbf{E})$ sono ancora banachabili (per questi spazi sono molto usate, rispettivamente, le notazioni $\text{Sym}^n \mathbf{E}$ e $\bigwedge^n \mathbf{E}$). Si deduce facilmente che il funtore L^n si può "restringere" a due funtori L_s^n ed L_a^n (sempre di classe C^∞).

Definizione 15.5. *Se π è un fibrato su una C^p -varietà X , il fibrato π^\vee (cioè $\lambda(\pi)$, con λ funtore spazio duale) viene ovviamente detto fibrato duale di π . Quando $p \geq 1$, il duale del fibrato tangente di X viene detto fibrato cotangente di X , ed il suo spazio totale può essere denotato con $T^\vee(X)$ (oltre che con $T(X)^\vee$).*

Definizione 15.6. Sia X una C^p -varietà con $p \geq 1$ e $\pi : T(X) \rightarrow X$ il suo fibrato tangente. Una forma differenziale di grado r su X (di classe C^{p-1}), anche detta brevemente r -forma, è una sezione del fibrato $L_a^r(\pi)$ (cioè un C^{p-1} -morfismo $\omega : X \rightarrow L_a^r(T(X))$ tale che $L_a^r(\pi) \circ \omega = \text{id}_X$). Il valore di una r -forma ω su $x \in X$ viene di solito denotato con ω_x (invece che con $\omega(x)$) ed è una forma r -lineare alternante su $T_x(X)$ (a meno dell'ovvia identificazione $\omega_x \leftrightarrow (x, \omega_x)$).

Poiché $L_a^1(T(X)) = T^\vee(X)$, le 1-forme sono le sezioni del fibrato cotangente, ed in quanto tali possono essere anche chiamate “in stile fisico” (campi di) covettori tangenti.

Osservazione 15.7. Siano $\varphi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$, $\psi : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}'$ omomorfismi di k -spazi vettoriali. L'applicazione $\varphi \times \psi$ è definita tra i sostegni $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, $\mathbf{E}' \times \mathbf{F}'$ delle somme dirette $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$, $\mathbf{E}' \oplus \mathbf{F}'$, ed è immediato verificare che è un omomorfismo. È naturale denotare tale omomorfismo con $\varphi \oplus \psi$. Se $k = \mathbb{R}$ ed \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{E}' , \mathbf{F}' hanno una struttura di spazi vettoriali topologici, $\varphi \oplus \psi$, essendo continua, è un TVS-morfismo.

È anche immediato verificare che

$$(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \mapsto \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \oplus \psi$$

definisce un funtore covariante di due variabili, sia sulla categoria dei k -spazi vettoriali che su TVS.

Per l'osservazione 4.6, il funtore somma diretta può essere “ristretto” alla categoria degli spazi banachabili, e siccome le applicazioni sui morfismi

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{E}') \oplus L(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \rightarrow L(\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}, \mathbf{E}' \oplus \mathbf{F}')$$

sono lineari e continue (di norma 1, comunque si fissino le norme su spazi banachabili \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{E}' , \mathbf{F}'), tale funtore è di classe C^∞ .

Definizione 15.8. Sia λ il funtore somma diretta (sopra descritto) sulla categoria degli spazi banachabili. Definiamo la somma diretta (anche detta somma di Whitney) di fibrati vettoriali π , π' su una varietà X come il fibrato vettoriale $\pi \oplus \pi' := \lambda(\pi, \pi')$.

16. STRUTTURE SU VARIETÀ

Il tipico oggetto di studio in Geometria Differenziale è una varietà dotata di un qualche tipo di struttura aggiuntiva. Vediamo qui due tra gli esempi fondamentali in proposito.

Definizione 16.1. Un gruppo di Lie, anche detto varietà gruppo (“group manifold” in inglese), è una varietà G ³² dotata di una struttura di gruppo tale che l'applicazione di composizione $G \times G \rightarrow G$ e l'applicazione $G \rightarrow G$ data da $x \mapsto x^{-1}$ siano morfismi.

Se G, H sono gruppi di Lie, un GM-morfismo, o anche omomorfismo (o, per esteso, omomorfismo di gruppi di Lie), è un morfismo di varietà $H \rightarrow G$, che sia anche un omomorfismo rispetto alle strutture di gruppo.

Ovviamente, i gruppi di Lie con i loro omomorfismi costituiscono una categoria.

³²Il termine “gruppo di Lie” è forse più appropriato quando G è almeno di classe C^1 , ed anzi spesso si sottintende che sia liscio, cioè di classe C^∞ .

Definizione 16.2. *Sia \mathbf{E} un k -spazio vettoriale. Una forma bilineare simmetrica $\mu : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow k$ si dice non singolare o non degenerare se la corrispondente applicazione $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^\vee$ è un isomorfismo di k -spazi vettoriali. Se $k = \mathbb{R}$ ed \mathbf{E} ha una struttura di spazio banachabile, allora si richiede che l'isomorfismo sia toplineare.*

Nel caso algebrico (k qualunque), non sarebbe difficile rilevare che le forme non degeneri possono esistere solo in dimensione finita, e che la condizione di non singolarità equivale alla richiesta che il determinante di una qualunque matrice rappresentativa non si annulli. Nel caso topologico (\mathbf{E} banachabile), esistono forme non degeneri anche in dimensione infinita, e non sarebbe difficile osservare che in dimensione finita la non singolarità equivale alla non singolarità algebrica (cioè la continuità di $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^\vee$ è automatica). Rinunciamo ad esporre i (seppur facili) dettagli per lasciare la precedenza ad altri argomenti.

Definizione 16.3. *Sia X una C^p -varietà, con $p \geq 1$. Una metrica pseudo riemanniana su X è una sezione $\mu \in L_s^2(T(X))$ tale che per ogni $x \in X$ la forma bilineare simmetrica μ_x (su $T_x(X)$) sia non singolare. Se μ_x è anche definita positiva per ogni x , allora μ è detta metrica riemanniana su X .*

Una varietà pseudo riemanniana è una varietà dotata di un'assegnata metrica pseudo riemanniana. Se la metrica assegnata è riemanniana, allora la varietà è detta riemanniana.

Lo spazio-tempo della relatività generale è una varietà pseudo riemanniana.

17. CURVE INTEGRALI E FLUSSO

Volendo dare un significato stretto al termine “curva” in geometria differenziale, si considerano le varietà (in particolare le sottovarietà) 1-dimensionali, cioè modelate su \mathbb{R} . In questo paragrafo conviene, meno rigidamente, assumere la seguente definizione.

Definizione 17.1. *Per C^p -curva, o semplicemente curva, intenderemo un C^p -morfismo $f : J \rightarrow X$, con J intervallo aperto in \mathbb{R} .*

Un termine un po' più preciso sarebbe *curva parametrizzata*, anche se quando f non è un embedding la sua immagine non è una curva in senso stretto. Meglio ancora, si potrebbe usare il termine *traiettoria*. Avendo a che fare con morfismi di questo tipo, quando la varietà X è un aperto in \mathbf{E} ed f è C^p con $p \geq 1$, per abuso di notazione f' indicherà la funzione $J \rightarrow \mathbf{E}$ che naturalmente corrisponde alla derivata (vedi osservazione 6.12).

Assumiamo ora noto il classico teorema di esistenza ed unicità per le equazioni differenziali ordinarie. Com'è normale che sia, esistono “in commercio” tantissime formulazioni differenti (leggermente differenti nella sostanza, talvolta sensibilmente differenti nei dettagli espositivi). Questo vale anche per gli enunciati noti dal corso di sistemi dinamici e quelli riportati in [Lang, 1999]. Al fine di semplificare il nostro lavoro, riportiamo esplicitamente qui le formulazioni che useremo poi tra poco.

Proposizione (prerequisito) 17.2. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ ed $U \subseteq \mathbf{E}$ aperti, ed $f : I \times U \rightarrow \mathbf{E}$ un C^0 -morfismo tale che per qualche $L > 0$ si abbia*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall t \in I, x_1, x_2 \in U$$

(³³). Allora dati $t_0 \in I$, $x_0 \in U$, esiste un intervallo aperto $J \ni t_0$ che è dominio di uno ed un solo C^1 -morfismo $\alpha : J \rightarrow U$ tale che (³⁴)

$$\alpha' = f \circ (\text{id}, \alpha) \quad , \quad \alpha(t_0) = x_0$$

(³⁵). Inoltre (comunque si scelga J), se f è un C^p -morfismo, allora α è un C^{p+1} -morfismo.

La dimostrazione si ottiene in maniera praticamente automatica dall'enunciato noto dal corso di sistemi dinamici. Il fatto che nell'enunciato I, U siano aperti — mentre nell'enunciato del corso di sistemi dinamici si considerano domini chiusi — non crea nessun problema: basta considerare la restrizione di f ad un $I' \times \bar{B}$, su cui f sia limitata, con I' intervallo chiuso centrato in t_0 e \bar{B} del tipo $\{x \in \mathbf{E} : |x - x_0| \leq b\}$, con $b > 0$. Un problema un po' più serio sembrerebbe porsi se nella dimostrazione studiata a suo tempo è stato usato \mathbb{R}^n invece di uno spazio di Banach \mathbf{E} . Ma qui il punto essenziale da chiarire è semplicemente la definizione dell'integrale di una funzione continua su un intervallo ed a valori in \mathbf{E} , che abbiamo riportato nel paragrafo 8. Le proprietà elementari di tale integrale che sono coinvolte nella dimostrazione si verificano senza particolari difficoltà (anche se, volendo andare nei dettagli, richiedono un certo tempo ed un certo impegno): gli studenti interessati possono farlo come esercizio facoltativo.

Notiamo poi che nell'enunciato abbiamo tralasciato le pur utilissime stime sull'ampiezza di J in base alle caratteristiche di f , perché non interverranno esplicitamente in quello che diremo più avanti. Anzi, in quello che diremo più avanti possiamo indebolire ulteriormente la proposizione, guadagnando ancora in semplicità.

Corollario 17.3. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ ed $U \subseteq \mathbf{E}$ aperti, ed $f : I \times U \rightarrow \mathbf{E}$ un C^p -morfismo con $p \geq 1$. Allora dati $t_0 \in I$, $x_0 \in U$, esiste un intervallo aperto $J \ni t_0$ che è dominio di uno ed un solo C^{p+1} -morfismo $\alpha : J \rightarrow U$ tale che*

$$\alpha' = f \circ (\text{id}, \alpha) \quad , \quad \alpha(t_0) = x_0 \quad .$$

Dimostrazione. Tutto sta ad osservare che un C^p -morfismo $f : I \times U \rightarrow \mathbf{E}$, con $p \geq 1$, certamente soddisfa le ipotesi della proposizione 17.2. Anche questa è conseguenza di una proprietà elementare dell'integrale in una sola variabile (di solito chiamata teorema del valor medio), che assumiamo nota dal corso di sistemi dinamici e la cui validità per le funzioni a valori in spazi di Banach può essere verificata senza grosse difficoltà sulla base della definizione dell'integrale richiamata nel paragrafo 8 (anche questo è lasciato come esercizio facoltativo per chi ha abbastanza tempo a disposizione e fosse interessato). \square

Non abbiamo direttamente enunciato il corollario al posto della proposizione, perché ci sembrava poco rispettoso offuscare il ruolo della (più generale) condizione di Lipschitz. Come ora vedremo, il corollario può essere facilmente tradotto nel (ed esteso al) contesto delle varietà.

Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ aperto (tipicamente un intervallo) e $\tau : T(J) \xrightarrow{\sim} J \times \mathbb{R}$ l'isomorfismo canonico (quello indotto dalla carta (J, id) ; vedi commento dopo l'osservazione 14.1).

³³Questa condizione si può chiamare *condizione di Lipschitz su U uniforme rispetto ad I* .

³⁴Tenere presente l'osservazione 6.12!

³⁵Qui come al solito abbiamo ommesso il simbolo di restrizione di f a $J \times U$. In parole povere, α soddisfa l'equazione $\alpha'(t) = f(t, \alpha(t))$ ed il dato iniziale $\alpha(t_0) = x_0$.

In questo paragrafo denoteremo con ι il campo vettoriale

$$\tau^{-1} \circ (\text{id}, 1) .$$

A livello intuitivo, possiamo dire che ι_t è semplicemente il versore infinitesimo di \mathbb{R} in t . Dunque, se $\alpha : J \rightarrow X$ è una C^p -curva con $p \geq 1$, dovrebbe essere intuitivamente chiaro che $T\alpha \circ \iota : J \rightarrow T(X)$ è semplicemente una traduzione di α' nel contesto delle varietà. Se lo si vuole verificare formalmente in dettaglio, è utile la seguente osservazione (abbastanza pedante).

Osservazione 17.4. *Sia $\alpha : J \rightarrow U$ una C^p -curva con $p \geq 1$, $U \subseteq \mathbf{E}$ aperto e denotiamo con*

$$\sigma : T(J) \xrightarrow{\sim} J \times \mathbb{R} \quad e \quad \tau : T(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbf{E}$$

gli isomorfismi canonici. Una paziente verifica delle definizioni ci assicura che per ogni $t \in J$ abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} T_t(J) & \xrightarrow{\sigma_t} & \{t\} \times \mathbb{R} \\ T_t\alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \times \alpha'(t) \\ T_{\alpha(t)}(U) & \xrightarrow{\tau_{\alpha(t)}} & \{\alpha(t)\} \times \mathbf{E} \end{array} .$$

Qui $\alpha'(t)$ è intesa col suo significato generale di operatore lineare $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{E}$. Componendo a sinistra con $\iota(t) \hookrightarrow T_t(J)$ la prima riga e dando ad $\alpha'(t)$ il solito significato “semplificato” (osservazione 6.12), otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \{\iota(t)\} & \xrightarrow{\sigma_t} & \{t\} \\ T_t\alpha \downarrow & & \downarrow (\alpha, \alpha') \\ T_{\alpha(t)}(U) & \xrightarrow{\tau_{\alpha(t)}} & \{\alpha(t)\} \times \mathbf{E} \end{array} .$$

Componendo ancora con $\{t\} \xrightarrow{\iota} \{\iota(t)\}$ e “aggregando al variare di t ” abbiamo

$$\begin{array}{ccc} J & \xlongequal{\quad} & J \\ T\alpha \circ \iota \downarrow & & \downarrow (\alpha, \alpha') \\ T(U) & \xrightarrow{\tau} & U \times \mathbf{E} \end{array} .$$

Questo spiega l’introduzione della seguente (un po’ “abusiva”) notazione.

Definizione 17.5. *Se $\alpha : J \rightarrow X$ è una C^p -curva con $p \geq 1$, allora denotiamo ancora con α' la C^{p-1} -curva $T\alpha \circ \iota$.*

Definizione 17.6. *Sia ξ un campo vettoriale su una C^p -varietà X (necessariamente con $p \geq 1$). Una curva integrale di ξ è una curva $\alpha : J \rightarrow X$ tale che*

$$\alpha' = \xi \circ \alpha$$

(più esplicitamente, $\xi_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$ per ogni $t \in J$).

Stante l’osservazione di poco fa, non dovrebbe risultare eccessivamente pesante risolvere il seguente esercizio.

Esercizio (tecnico) 17.7. Sia $\pi : T(X) \rightarrow X$ ed (U, φ) il fibrato tangente ed una carta di una varietà (necessariamente almeno di classe C^1), ed $\alpha : J \rightarrow X$ una curva con $\alpha(J) \subseteq U$. Detta

$$\tilde{\tau} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{E}$$

(con $\mathbf{E} \supseteq \varphi(U)$) la corrispondente carta di $T(X)$ e posto $\beta = \varphi \circ \alpha$, verificare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} J & \xlongequal{\quad} & J \\ T\alpha \circ \iota \downarrow & & \downarrow (\beta, \beta') \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \varphi(U) \times \mathbf{E} \end{array} .$$

è commutativo.

Proviamo ora il teorema di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie nel contesto delle varietà.

Proposizione 17.8. Sia ξ un campo vettoriale su una C^p -varietà X , con $p \geq 2$. Dato $x_0 \in X$ esiste una curva integrale α di ξ tale che $\alpha(0) = x_0$.

Dimostrazione. Sia $\pi : T(X) \rightarrow X$ il fibrato tangente di X , (U, φ) una carta in x_0 e

$$\tilde{\tau} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{E}$$

la corrispondente carta di $T(X)$. Indichiamo poi con $p : \mathbb{R} \times \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$ e $q : \varphi(U) \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ le due proiezioni sul secondo fattore, e poniamo

$$f := q \circ \tilde{\tau} \circ \xi \circ \varphi^{-1} \circ p : \mathbb{R} \times \varphi(U) \rightarrow \mathbf{E} .$$

Poiché f è un C^{p-1} -morfismo, per il corollario 17.3, esiste un intervallo aperto $J \ni 0$ che è dominio di un C^p -morfismo $\beta : J \rightarrow \varphi(U)$ tale che

$$\beta' = f \circ (\text{id}, \beta) , \quad \beta(0) = \varphi(x_0) .$$

Basta allora porre $\alpha := \varphi^{-1} \circ \beta$ ⁽³⁶⁾. □

³⁶Lo studente è invitato a fare una verifica a lui congeniale. Al docente (con un po' di fatica) riesce naturale la seguente. Indichiamo con $q_1 : \varphi(U) \times \mathbf{E} \rightarrow \varphi(U)$ la proiezione sul primo fattore. La condizione $\alpha(0) = x_0$ è ovviamente verificata. Ricordando la definizione di $\tilde{\tau}$ si ottiene subito che

$$(12) \quad \varphi \circ \pi = q_1 \circ \tilde{\tau} ,$$

e ricordando che ξ è una sezione, che

$$(13) \quad \pi \circ \xi = \text{id} .$$

Abbiamo allora

$$\beta' = f \circ (\text{id}, \beta) = q \circ \tilde{\tau} \circ \xi \circ \varphi^{-1} \circ \beta = q \circ \tilde{\tau} \circ \xi \circ \alpha$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \alpha' &= T\alpha \circ \iota \stackrel{\text{esercizio 17.7}}{=} \tilde{\tau}^{-1} \circ (\beta, \beta') = \tilde{\tau}^{-1} \circ (\beta, q \circ \tilde{\tau} \circ \xi \circ \alpha) \\ &\stackrel{(13)}{=} \tilde{\tau}^{-1} \circ (\varphi \circ \pi \circ \xi \circ \alpha, q \circ \tilde{\tau} \circ \xi \circ \alpha) = \tilde{\tau}^{-1} \circ (\varphi \circ \pi, q \circ \tilde{\tau}) \circ \xi \circ \alpha \\ &\stackrel{(12)}{=} \tilde{\tau}^{-1} \circ (q_1 \circ \tilde{\tau}, q \circ \tilde{\tau}) \circ \xi \circ \alpha = \tilde{\tau}^{-1} \circ \text{id} \circ \tilde{\tau} \circ \xi \circ \alpha = \xi \circ \alpha . \end{aligned}$$

Come si noterà, la dimostrazione non ha utilizzato l'unicità assicurata dalla proposizione 17.2. In questo contesto, conviene enunciare la proprietà di unicità nella seguente forma, in cui però c'è bisogno di richiedere che la varietà X sia topologicamente uno spazio di Hausdorff.

Proposizione 17.9. *Sia ξ un campo vettoriale su una C^p -varietà X , con $p \geq 2$ e che soddisfi la condizione di Hausdorff, ed $x_0 \in X$. Se $\alpha_1 : J_1 \rightarrow X$ ed $\alpha_2 : J_2 \rightarrow X$ sono curve integrali di ξ tali che $\alpha_1(0) = x_0$ e $\alpha_2(0) = x_0$, allora coincidono su $J_1 \cap J_2$.*

La dimostrazione è lasciata come non difficile esercizio (si può trovare comunque in [Lang, 1999, cap. IV, teorema 2.1]).

Dalle proposizioni ora viste segue subito che, dati un campo vettoriale ξ su una C^p -varietà X di Hausdorff, con $p \geq 2$, ed $x_0 \in X$, allora esiste una curva integrale $\alpha_{x_0} : J \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ di cui ogni altra curva integrale soddisfacente la stessa condizione è restrizione. Diremo che tale curva integrale è *massimale*.

Osserviamo che si può ovviamente definire un'applicazione

$$\alpha : \mathfrak{D}(\xi) \rightarrow X ,$$

con $\mathfrak{D}(\xi) \subseteq \mathbb{R} \times X$, tale che per ogni $x_0 \in X$ si abbia

$$\alpha_{x_0} = (\text{id}, x_0) \circ \alpha$$

(semplicemente ponendo $\alpha(t, x_0) := \alpha_{x_0}(t)$). Questa applicazione viene detta *flusso (globale)* di ξ .

Il teorema di dipendenza dai dati iniziali, noto dal corso di sistemi dinamici, assicura che α è continua (o addirittura un C^{p-1} -morfismo, se l'enunciato noto al lettore tratta anche la regolarità). La verifica consisterebbe semplicemente nella solita "traduzione" ottenuta applicando le tecniche già viste prima, ma in questo corso viene tralasciata.

18. VARIETÀ ALGEBRICHE

N.B.: ai fini dell'esame questa parte del primo modulo è del tutto facoltativa (in quanto copre argomenti trattati anche nel secondo modulo). Va invece studiato il contenuto del file "Appendice.pdf".

Concludiamo il primo modulo gettando le prime basi per gli argomenti di geometria algebrica che saranno approfonditi nel secondo modulo. Come abbiamo preavvertito, le varietà algebriche *non* saranno particolari varietà differenziabili (ad eccezione del caso, pur molto importante, delle varietà algebriche non singolari sul campo complesso).

Sebbene un'impostazione di ampio respiro dei fondamenti di geometria algebrica sia fornita dalla teoria degli schemi (che consente tra l'altro una maggiore unificazione con i fondamenti di geometria differenziale), è prassi didattica corrente (anche se non universale) presentare i fondamenti nell'ambito degli spazi affini e proiettivi numerici, in connessione con gli anelli di polinomi.

Definizione 18.1. *Siano k un campo ed n un intero non negativo. L'insieme $\mathbb{A}_k^n := k^n$ è detto spazio affine numerico su k . Quando k è fissato nel contesto (o quando non è necessario specificare quale sia il campo), si potrà usare semplicemente la notazione \mathbb{A}^n .*

La dicitura “spazio affine” e la \mathbb{A} nella notazione alludono al fatto che su \mathbb{A}^n c'è una struttura canonica di spazio affine, ma con questa impostazione si preferisce non esplicitare tale struttura.

Denotiamo ora con A l'anello dei polinomi $k[x_1, \dots, x_n]$ in n variabili (se è necessario rendere esplicito il numero di variabili, si può usare ad esempio la notazione $A^{(n)}$).

Definizione 18.2. *Se $T \subseteq A$, allora l'insieme degli zeri di T è*

$$Z(T) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall f \in T\} \subseteq \mathbb{A}^n .$$

Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{A}^n$ si dice insieme algebrico affine se $X = Z(T)$ per qualche T .

In altre parole, T dà luogo ad un sistema di equazioni polinomiali, e l'insieme degli zeri $Z(T)$ è l'insieme delle soluzioni. Conserveremo la notazione $Z(T)$ per l'insieme degli zeri (un'alternativa molto popolare è $V(T)$). Nel caso di un singolo polinomio f useremo anche la notazione $Z(f)$ invece di $Z(\{f\})$.

Esercizio 18.3. *Provare che se k è un campo infinito, il sistema*

$$\begin{cases} xy - z = 0 \\ xz - y^2 = 0 \\ x^2 + xz - y^2 - y = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni (in altre parole, che $Z(\{xy - z, xz - y^2, x^2 + xz - y^2 - y\})$ è infinito), e che eliminando una qualunque delle equazioni si ottiene un sistema che ha qualche soluzione in più.

Osservare inoltre che per un sistema di tre equazioni lineari questa situazione non può presentarsi.

Nel risolvere l'esercizio, si sarà probabilmente notato che l'insieme delle soluzioni del sistema è $C := \{(t, t^2, t^3) : t \in k\}$ (detto *cubica gobba*). Non è difficile rendersi conto che quello che hanno in più i sistemi ottenuti eliminando un'equazione, è una retta (anche se per risolvere l'esercizio non è strettamente necessario dimostrare quest'ultimo fatto).

Introduciamo ora le varietà algebriche. Non è raro trovare questo termine usato come sinonimo di insieme algebrico (affine, o, come si vedrà nel secondo modulo, proiettivo). Tuttavia la terminologia più diffusa assume la seguente condizione aggiuntiva (irriducibilità).

Definizione 18.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un insieme algebrico affine e assumiamo (per prudenza) che k sia un campo algebricamente chiuso³⁷. Allora X si dice irriducibile se non può essere ottenuto come unione di due insiemi algebrici affini propriamente contenuti in X . Per varietà algebrica affine intendiamo semplicemente un insieme algebrico affine irriducibile. Un insieme del tipo $X \setminus Y$, con X varietà affine ed Y insieme algebrico, sarà detto varietà algebrica quasi-affine.*

³⁷Una delle possibili definizioni della condizione “algebricamente chiuso” consiste semplicemente nel richiedere che ogni polinomio non costante ammetta una radice. La definizione di irriducibilità che stiamo dando avrebbe senso anche per campi non algebricamente chiusi, ma in questo caso la nozione perde un po' di aderenza con la nozione di irriducibilità per il sistema di equazioni che rappresenta X .

Un sistema di infinite equazioni lineari (in n incognite) è sempre equivalente ad un sistema con un numero finito di equazioni: basta considerare il sottospazio generato dalle righe corrispondenti alle equazioni, e prenderne una base. Per sistemi di equazioni polinomiali, lo stesso argomento funziona se tutte le equazioni hanno un grado (massimo) fissato; nel caso generale, è invece utile osservare che in una combinazione lineare di equazioni, anche se si usano come coefficienti polinomi al posto di scalari, si ha ancora che la nuova equazione “conserva” le vecchie soluzioni. Precisiamo questo discorso.

Osservazione 18.5. *Siano $f_1, \dots, f_n \in T \subseteq A$ e $g := g_1 f_1 + \dots + g_n f_n$ con $g_1, \dots, g_n \in A$. Allora $Z(T) \subseteq Z(g)$. Segue subito che se $\mathfrak{a} = (T)$ è l'ideale generato da T in A , allora $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$.*

Con questa osservazione, il problema di ottenere un sistema finito da un sistema infinito si riconduce ad un problema sugli ideali, risolto dal famoso teorema della base di Hilbert (che sarà presentato nel secondo modulo).

Osservazione 18.6. *Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ allora*

$$I(X) := \{f \in A : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall (a_1, \dots, a_n) \in X\} \subseteq A$$

è un ideale.

Queste semplici idee già lasciano intuire come le tecniche di algebra moderna, applicate agli anelli di polinomi, possano efficacemente risolvere problemi riguardanti le varietà algebriche. Viceversa, i risultati di algebra commutativa (che è la parte dell'algebra che si occupa degli anelli commutativi unitari e dei moduli su di essi) messi a punto per questo scopo, si sono rivelati utili a comprendere la struttura di tutti gli anelli commutativi unitari. È chiaro che, essendo \mathbb{Z} un anello commutativo unitario, questo fatto abbia avuto enormi ricadute sulla teoria dei numeri (non esclusa la dimostrazione del famoso teorema di Fermat).

L'interrelazione tra insiemi algebrici ed ideali è molto più trasparente quando il campo k è algebricamente chiuso. Un campo k non algebricamente chiuso è tutt'altro che privo d'interesse, ma è molto conveniente collezionare prima i risultati che valgono per la chiusura algebrica di k , e poi passare ad esaminare cosa succede ai punti con coordinate in k (si pensi a quanto studiato nel corso di geometria 1 per le coniche). Dunque, tipicamente, nel secondo modulo si assumerà che k sia algebricamente chiuso.

A volte, dei procedimenti di “passaggio al limite” (nel senso usuale) sono utili per ottenere risultati in geometria algebrica. Sebbene questi procedimenti fossero nati in ambito classico (alla fine dell'Ottocento ³⁸), cioè quando tutto era sviluppato sul campo dei numeri complessi, per un campo qualunque è possibile introdurre una topologia che risulta utile sotto questo aspetto (e che nel caso $k = \mathbb{C}$ o $k = \mathbb{R}$ è più debole della topologia usuale).

Proposizione 18.7. *Gli insiemi algebrici in \mathbb{A}^n sono gli insiemi chiusi di una (unica) topologia su \mathbb{A}^n (in altre parole, soddisfano i cosiddetti “assiomi dei chiusi”).*

³⁸Nella storia della geometria algebrica, è molto famoso il cosiddetto “principio di continuità” di F. Enriques.

Dimostrazione. Ovviamente $Z(1) = \emptyset$ e $Z(\emptyset) = \mathbb{A}^n$ (o anche $Z(0) = \mathbb{A}^n$). Altrettanto ovvio è che

$$\bigcap_i Z(T_i) = Z\left(\bigcup_i T_i\right)$$

(con $T_i \subseteq A \forall i$).

Siano ora $T, T' \subseteq A$ e consideriamo $TT' := \{ff' : f \in T, f' \in T'\}$. Se $P \in Z(T)$ allora per ogni polinomio in TT' , che è del tipo ff' con $f \in T$, si ha $(ff')(P) = f(P)f'(P) = 0f'(P) = 0$; quindi $Z(T) \subseteq Z(TT')$. Ma allora anche $Z(T') \subseteq Z(TT')$, e quindi

$$Z(T) \cup Z(T') \subseteq Z(TT') .$$

Supponiamo ora che $P \in Z(TT') \setminus Z(T)$. Siccome $P \notin Z(T)$ c'è almeno un $f \in T$ tale che $f(P) \neq 0$. Ma allora per ogni $f' \in T'$, siccome $ff' \in TT'$ e $P \in Z(TT')$, abbiamo $0 = f(P)f'(P) \xrightarrow{f(P) \neq 0} f'(P) = 0$; quindi $P \in Z(T')$. Abbiamo così provato che $Z(TT') \setminus Z(T) \subseteq Z(T')$, da cui

$$Z(TT') \subseteq Z(T) \cup Z(T') .$$

Dalle due inclusioni abbiamo $Z(TT') = Z(T) \cup Z(T')$, e quindi l'unione di due insiemi algebrici è ancora un insieme algebrico. Questo conclude la dimostrazione. \square

Definizione 18.8. *La topologia su \mathbb{A}^n che ha per chiusi gli insiemi algebrici si chiama topologia di Zariski.*

Con questa nomenclatura, una varietà quasi-affine può essere presentata come un aperto di una varietà affine (rispetto alla topologia indotta dalla topologia di Zariski). È abbastanza comune trovare espressi alcuni semplici fatti riguardanti le varietà algebriche in termini puramente topologici. Un primo esempio è il seguente.

Definizione 18.9. *Un chiuso non vuoto X di uno spazio topologico si dirà irriducibile se non può essere ottenuto come unione di due chiusi propriamente contenuti in X .*

Stante la topologia di Zariski, l'irriducibilità di insiemi algebrici diventa un caso particolare di irriducibilità topologica. Va comunque detto che l'applicabilità di questa nozione in questioni di topologia generale è comunque abbastanza circoscritta (ad esempio, i chiusi irriducibili in topologia naturale sono solo i singoli punti). Come ora vedremo, anche l'applicabilità della topologia di Zariski in geometria algebrica, pur fondamentale, ha i suoi limiti.

Volendo costruire la categoria delle varietà algebriche, quali sono i morfismi “giusti”³⁹?

Con l'introduzione della topologia di Zariski, sarebbe ragionevole volgere l'attenzione alle funzioni continue rispetto a tale topologia. Vediamo ora che questa condizione è per certi versi troppo debole. Sia $P_0 := (0, 1) \in \mathbb{A}^2$, e com'è usuale fissiamo la notazione $k[x, y]$ (invece di $k[x_1, x_2]$) per il corrispondente anello A di

³⁹Storicamente, lo sviluppo della geometria algebrica come disciplina con una certa autonomia deve molto all'introduzione delle cosiddette trasformazioni cremoniane, nella seconda metà dell'Ottocento. In sostanza, queste sono funzioni tra spazi (affini o proiettivi) descritte da funzioni razionali (cioè rapporti di polinomi).

polinomi. Presa una retta non passante per P_0 , diciamo $r := Z(x - 1)$, possiamo definire la proiezione da P_0 su r come l'applicazione

$$\pi : \mathbb{A}^2 \setminus Z(x) \rightarrow r,$$

che associa ad ogni P nel dominio il punto d'intersezione con r della retta per P_0 e P . In termini espliciti,

$$\pi(x, y) = \left(1, \frac{y + x - 1}{x} \right)$$

(⁴⁰). Studiamo ora la restrizione di π alla circonferenza $S := Z(x^2 + y^2 - 1)$; per semplicità ci concentriamo direttamente sulla funzione

$$\begin{aligned} f : S \setminus \{P_0, P_1\} &\rightarrow k \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \frac{\bar{y} + \bar{x} - 1}{\bar{x}}, \end{aligned}$$

con $P_1 := (0, -1)$. Se $k = \mathbb{R}$, rispetto alle topologia naturali avremmo

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f = 1$$

(attenzione: se estendessimo f a tutto $\mathbb{A}^2 \setminus \{P_0\}$ il limite non esisterebbe). L'interpretazione geometrica di questo fatto consiste nell'osservare che il limite corrisponde all'intersezione con la tangente ad S in P_0 . Cosa succede in topologia di Zariski?

Per quanto riguarda la topologia di Zariski su k , sia che consideriamo la biezione $k \leftrightarrow r$, sia che consideriamo $k \leftrightarrow \mathbb{A}^1$, otteniamo la topologia *cofinita*, cioè quella che ha per chiusi solo tutto k e i suoi sottoinsiemi finiti. Osserviamo poi che f è continua: i singoli punti sono ovviamente chiusi anche in \mathbb{A}^2 , e dunque anche le unioni finite di singoli punti lo sono; si ottiene allora subito che, se la caratteristica di k non è 2 (⁴¹), controimmagini di chiusi sono chiusi. Per lo stesso motivo, comunque estendiamo f in P_0 , otteniamo sempre una funzione continua. La continuità di un'estensione in P_0 ci fornisce immediatamente informazioni sul limite $\lim_{P \rightarrow P_0} f$, purché P_0 sia di accumulazione.

Esercizio (facoltativo) 18.10. *Con le notazioni di sopra, verificare che anche la topologia di Zariski su S è quella cofinita.*

Dunque P_0 è di accumulazione se S è un insieme infinito, e questo certamente accade nel caso k sia algebricamente chiuso (anche se non solo in questo caso). In conclusione, almeno se k è algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2, anche rispetto alle topologia di Zariski rimane vero che $\lim_{P \rightarrow P_0} f = 1$ (il che è già qualcosa, se si vuole estendere ad un campo qualunque qualche ragionamento che coinvolga i limiti). Purtroppo, vale anche $\lim_{P \rightarrow P_0} f = c$ comunque si prenda $c \in k$ (per la topologia cofinita su un insieme infinito, non valendo la condizione di Hausdorff, l'unicità del limite non è assicurata).

Per restituire alla scelta $c = 1$ il ruolo che le spetta, facciamo la seguente osservazione.

⁴⁰Una verifica di questa formuleta, "suggerita dalla \mathbb{A} ", è: $(x - 1) \circ (t \text{id} + (1 - t)P_0) = 0 \Rightarrow t = 1/x \Rightarrow \pi = (1/x) \text{id} + (1 - 1/x)P_0 = (1, (y + x - 1)/x)$.

⁴¹A lezione era sfuggita questa condizione sulla caratteristica: se k è di caratteristica 2, f è costante, mentre qui stiamo implicitamente usando l'iniettività di f .

Osservazione 18.11. *Sia*

$$g: S \setminus \{P_1\} \rightarrow k$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \frac{-\bar{x} + \bar{y} + 1}{\bar{y} + 1}$$

Con le notazioni di sopra, abbiamo che f è la restrizione di g ad $S \setminus \{P_0, P_1\}$, ed inoltre, se la caratteristica di k non è 2, $g(P_0) = 1$.

Esercizio (facoltativo) 18.12. *Verificare che se S è infinito e la caratteristica di k non è 2, comunque si assegni un valore $c \neq 1$, non è possibile trovare una funzione razionale g (cioè un rapporto di due polinomi) che valga c in P_0 e coincida con f su un aperto di S .*

Queste considerazioni dovrebbero renderci meno misteriosa l'utilità della seguente definizione.

Definizione 18.13. *Sia X una varietà quasi-affine e $P_0 \in X$. Una funzione $f: X \rightarrow k$ si dice regolare in P_0 se esiste una funzione razionale che coincida con f su un intorno di P_0 in X . Se f è regolare in ogni punto di X , allora si dice regolare.*

Ovviamente le funzioni razionali danno luogo a funzioni regolari in tutti i punti in cui il denominatore non si annulla, ed in particolare i polinomi danno luogo a funzioni regolari.

Per varietà affini qualunque, la topologia di Zariski non è così semplice come la topologia cofinita. Fortunatamente, non è difficile rendersi conto che se una funzione tra varietà affini (anche in spazi diversi) è descritta da funzioni regolari, allora è continua rispetto alle topologie di Zariski (essenzialmente perché sostituendo polinomi nelle variabili di un sistema di polinomi, si ottiene ancora un sistema di polinomi). Come abbiamo visto però, la condizione di regolarità assicura qualcosa in più della semplice continuità.

A questo punto, già potremmo dare la definizione di morfismo tra varietà quasi-affini, semplicemente richiedendo che, localmente, la composizione con funzioni regolari dia ancora funzioni regolari. Per motivi di brevità, poiché questa definizione consente di trattare in maniera unificata le varietà in spazi affini con quelle in spazi proiettivi, rimandiamo la definizione al secondo modulo del corso, in cui sarà trattato anche il caso proiettivo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Lang, 1999] Lang, S. (1999). Fundamentals of differential geometry, vol. 191, of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York.
- [MacLane, 1971] MacLane, S. (1971). Categories for the working mathematician. Springer-Verlag, New York. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.