ARGOMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE PER IL SECONDO MODULO DEL CORSO DI FONDAMENTI

LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
UNIVERSITÀ FEDERICO II – A. A. 2011-2012
A. DE PARIS

Quest'appendice continua l'esposizione dei fondamenti di geometria differenziale contenuta in [Appunti mod. 1] ([1]).

1. Rappresentazioni locali

Per definire delle operazioni su r-forme e campi vettoriali, visto che questi sono stati definiti come sezioni di opportuni fibrati vettoriali $\pi : E \to X$, è utile premettere qualche criterio generale per riconoscere quando un'applicazione $s : X \to E$ è effettivamente una sezione. La prima condizione $\pi \circ s = \mathrm{id}$, nella pratica si ottiene quasi sempre "gratis". Rimane da controllare che sia un morfismo. Per definizione, una funzione f tra varietà è un morfismo quando le $f_{V,U}$ determinate da carte sono morfismi tra aperti di spazi di Banach. Dunque, per sapere se è un morfismo e per altre utili informazioni su f, si possono applicare alle $f_{V,U}$ i vari risultati di analisi locale. Tali mappe sono dette *rappresentazioni locali di f*. Nella pratica corrente, avendo a che fare con varietà n-dimensionali, le rappresentazioni locali sono mappe tra aperti di spazi $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, e quindi sono spesso chiamate anche *rappresentazioni coordinate*.

Per le sezioni di fibrati, c'è la possibilità di un'ulteriore semplificazione. Ricordiamo infatti che i fibrati vettoriali sono localmente banali, e che le sezioni di un prodotto $U \times \mathbf{E}$ corrispondono ad applicazioni $U \to \mathbf{E}$, semplicemente per composizione con la seconda proiezione: vedi [Appunti mod. 1, Esempio 1.15].

Osservazione 1.1. *Sia $\pi : E \to X$ un fibrato, $\{(U_i, \tau_i)\}_i$ un suo ricoprimento banalizzante ed $s : X \to E$ un'applicazione tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Per il carattere locale dei morfismi, s è una sezione se e solo se $s \restriction_{U_i}$ è un morfismo per ogni i. Osserviamo poi che, essendo $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbf{E}_i$ un isomorfismo, $s \restriction_{U_i}$ è una sezione di π se e solo se $\tau_i \circ s$ è una sezione di $U_i \times \mathbf{E}_i$. Detta allora (per ciascun i) $p_i : U_i \times \mathbf{E}_i \to \mathbf{E}_i$ la seconda proiezione, abbiamo che*

$$s \text{ sezione } \iff p_i \circ \tau_i \circ s : U_i \to \mathbf{E}_i \text{ morfismo } \forall i\,.$$

Prendendo il ricoprimento banalizzante in modo che gli U_i siano anche domini di carte (U_i, φ_i), abbiamo anche che s è una sezione se e solo se $s_i := p_i \circ \tau_i \circ s \circ$

[1] Il file pdf di quest'appendice è navigabile (con lettori pdf compatibili): i riferimenti, anche se non evidenziati, funzionano come links. Gli appunti e l'appendice sono stati via via aggiornati durante lo svolgimento del corso, e hanno raggiunto forma pressoché definitiva poco dopo il termine dello stesso. La presente versione è uscita invece molto più tardi (Novembre 2014), ma differisce dalla precedente solo per pochi, lievi abbellimenti e correzioni; contestualmente si ringraziano gli studenti che hanno aiutato con le loro osservazioni, ed in particolare Antonio D'Onofrio e Rossella Marro per aver rilevato un errore nel commento successivo all'osservazione 15.3 degli appunti ed uno nella dimostrazione della proposizione 4.2 di quest'appendice.

$\varphi_i^{-1} : \varphi(U_i) \to \mathbf{E}_i$ è un morfismo per ogni i (poiché le mappe $U_i \xrightarrow{\varphi_i} \varphi_i(U_i)$ sono isomorfismi). Le s_i sono mappe tra aperti di spazi di Banach, e si possono chiamare *rappresentazioni locali di* s (in quanto sezione di fibrato).

Nel caso del fibrato tangente $\pi : T(X) \to X$, e dei corrispondenti fibrati $L^r_{\mathrm{a}}(\pi)$, poiché ogni carta (U_i, φ_i) induce una banalizzazione, per avere una rappresentazione locale di una sezione (quindi, di un campo vettoriale o di una r-forma) basta fissare una carta [2].

2. Prodotto wedge

Definizione (prerequisito) 2.1. *Sia σ una permutazione di n elementi. Assumiamo nota la nozione di* segno di σ, *ed useremo per questo la notazione $\epsilon(\sigma)$.*

Definizione 2.2. *Denoteremo con S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$. Se $r + s = n$, $r, s \geq 0$, considereremo anche il sottoinsieme*

$$S_{r,s} := \{\sigma \in S_n :\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(r),\, \sigma(r+1) < \cdots < \sigma(r+s)\}$$

(i cui elementi vengono talvolta detti (r, s)-shuffles*).*

Definizione 2.3. *Sia V un k-spazio vettoriale, ω una forma r-lineare alternante su V e ψ una forma s-lineare alternante su V. Allora il* prodotto wedge di ω per ψ *è la forma $(r+s)$–lineare $\omega \wedge \psi$ su V definita da*

$$(\omega \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{r+s}) := \sum_{\sigma \in S_{r,s}} \epsilon(\sigma)\omega\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)\psi\left(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}\right) .$$

Osservazione 2.4. *Ogni permutazione in S_{r+s} si ottiene in un unico modo componendo una permutazione in $S_{r,s}$ (a destra) con una permutazione che manda $\{1, \dots, r\}$ ed $\{r+1, \dots r+s\}$ ciascuno in sé stesso. Se dunque k ha caratteristica 0 (o, più generalmente, che non divide né $r!$, né $s!$) si ha*

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \psi)&(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &:= \frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma \in S_{r+s}} \epsilon(\sigma)\omega\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)\psi\left(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}\right) .\end{aligned}$$

Da questa seconda formula si deduce abbastanza facilmente che $\omega \wedge \psi$ è anch'essa una forma alternante. La verifica che questo è vero per k di caratteristica qualunque (cioè direttamente sulla base della definizione con gli shuffles) è lasciata come esercizio facoltativo per gli studenti interessati.

Menzioniamo che in letteratura è possibile trovare una nozione leggermente differente di prodotto wedge, data da

$$\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma \in S_{r+s}} \epsilon(\sigma)\omega\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)\psi\left(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}\right) .$$

Osservazione 2.5. *Se $\omega \in L^r_{\mathrm{a}}(\mathbf{E})$, $\psi \in L^s_{\mathrm{a}}(\mathbf{E})$, allora $\omega \wedge \psi$, oltre ad essere $(r+s)$–lineare ed alternante, è anche continua, di norma $\leq \frac{(r+s)!}{r!s!}|\omega|\,|\psi|$. Di conseguenza, la moltiplicazione wedge*

$$\begin{array}{ccc} L^r_{\mathrm{a}}(\mathbf{E}) \times L^s_{\mathrm{a}}(\mathbf{E}) & \to & L^{r+s}_{\mathrm{a}}(\mathbf{E}) \\ (\omega, \psi) & \mapsto & \omega \wedge \psi \end{array}$$

---

[2] In effetti, nella dimostrazione di [Appunti mod. 1, Proposizione 17.8], l'apparentemente complicata f non era altro che $\xi_i \circ p$, con ξ_i rappresentazione locale di ξ nella carta (U, φ).

è bilineare e continua, di norma $\leq \frac{(r+s)!}{r!s!}$, *dunque di classe* C^∞.

Osservazione 2.6. *Siano* ω *e* ψ *rispettivamente una* r*-forma ed una* s*-forma su una varietà* X. *Dunque*

$$x \mapsto \omega_x \wedge \psi_x$$

determina un'applicazione $w : X \to L_{\mathrm{a}}^{r+s}(T(X))$. *Preso un ricoprimento banalizzante* $\{(U_i, \tau_i)\}_i$ *del fibrato tangente* $\pi : T(X) \to X$, *ed indicando con* τ_i^n *le corrispondenti banalizzazioni dei fibrati* $L_{\mathrm{a}}^n(\pi)$, *grazie all'osservazione 1.1 abbiamo che (nelle ovvie notazioni) le applicazioni*

$$\omega_i := p_i^r \circ \tau_i^r \circ \omega : U_i \to L_{\mathrm{a}}^r(\mathbf{E}_i) \ , \qquad \psi_i := p_i^s \circ \tau_i^s \circ \psi : U_i \to L_{\mathrm{a}}^s(\mathbf{E}_i)$$

sono morfismi. Segue facilmente che (per ogni i*)*

$$p_i^{r+s} \circ \tau_i^{r+s} \circ w = \mu \circ (\omega_i, \psi_i) \ ,$$

con μ *moltiplicazione wedge come nell'osservazione 2.5, e dunque queste applicazioni sono morfismi. Ancora per l'osservazione 1.1 possiamo concludere che* w *è una* $(r+s)$*–forma.*

Definizione 2.7. *Siano* ω *e* ψ *rispettivamente una* r*-forma ed una* s*-forma su una varietà* X. *La* $(r+s)$*–forma data da*

$$x \mapsto \omega_x \wedge \psi_x$$

viene detta prodotto wedge di ω per ψ, *e denotata con* $\omega \wedge \psi$.

3. Azione di campi vettoriali su funzioni C^1 a valori reali

Definizione 3.1. *Se* X *denota una qualunque* C^p*–varietà, fissiamo la notazione*

$$C^p(X) := \mathrm{Mor}\,(X, \mathbb{R}) = \{\textit{morfismi } f : X \to \mathbb{R}\}$$

([3]).

Sia $\pi : T(X) \to X$ il fibrato tangente ad X ed $U \subseteq X$ aperto. Il VB-morfismo

$$Ti_U : T(U) \to T(X) \ ,$$

con $i_U : U \hookrightarrow X$ applicazione d'inclusione, può essere visto, per restrizione sul codominio, come un VB-isomorfismo canonico

$$T(U) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$$

([4]).

Se ora ξ è un campo vettoriale su X, con leggero abuso di notazione indichiamo con $\xi \restriction_U$ il campo vettoriale $(Ti_U)^{-1} \circ \xi$ su U. Se poi $f \in C^p(U)$, allora $Tf \circ \xi \restriction_U$ è una sezione del fibrato tangente $T(\mathbb{R})$ che, ricordiamo, è canonicamente isomorfo al fibrato prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (vedi [Appunti mod. 1, Osservazione 14.1 e commento successivo]); dunque $Tf \circ \xi \restriction_U$ corrisponde (per composizione con $T\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}$) ad una funzione $U \to \mathbb{R}$, che è di classe C^{p-1} (come Tf), e che denotiamo con $\xi_U(f)$. Naturalmente, siccome una C^p–varietà con $p \geq 1$ è anche una C^1–varietà, la funzione $\xi_U(f)$ resta definita anche quando f è, più generalmente, di classe C^1.

[3] Menzioniamo che in [Lang, 1999] è usata invece la notazione $\mathrm{Fu}^p(X)$

[4] In generale, se $\pi : E \to X$ è un qualunque fibrato vettoriale, la restrizione $\pi^{-1}(U) \to U$ è ancora un fibrato vettoriale, che di solito viene denotato (un po' abusivamente) con $\pi \restriction_U : E \restriction_U \to U$.

Definizione 3.2. *Se ξ ed U sono un campo vettoriale ed un aperto di una varietà X, conserveremo la notazione ξ_U per l'applicazione*

$$\begin{array}{cccc} \xi_U : & C^p(U) & \to & C^{p-1}(U) \\ & f & \mapsto & \xi_U(f) \end{array} ,$$

con $\xi_U(f)$ definito come sopra ([5]).

Osservazione 3.3. *Siano X, ξ come sopra e consideriamo una carta (U_i, φ_i) di X. Allora, in termini di rappresentazioni locali (prendendo su $\mathbb{R}$ la carta identica), abbiamo*

$$\xi_{U_i}(f)_i(x) = f_i'(x)\left(\xi_i(x)\right) \ , \quad \forall f \in C^p\left(U_i\right), x \in \varphi_i\left(U_i\right) \ .$$

Faremo ora vedere che ξ è univocamente determinato dalla famiglia $\{\xi_U\}_U$ ([6]). Abbiamo bisogno di un risultato che è quasi immediato in dimensione finita, ma che in dimensione infinita richiede un po' di lavoro a causa della richiesta continuità. Dunque torniamo per un momento nell'ambito dei preliminari di analisi, e dimostriamo questo risultato che (pur se in forma indebolita) va sotto il nome di teorema di Hahn-Banach (cfr. [Lang, 1999, cap. I, proposizione 2.3]).

Teorema 3.4. *In un qualunque spazio normato $\mathbf{E}$, per ogni $x \neq 0$ esiste $\lambda \in \mathbf{E}^\vee$ tale che $\lambda(x) \neq 0$.*

Dimostrazione. Per un qualunque x non nullo in $\mathbf{E}$, consideriamo l'insieme di tutte forme lineari e continue di norma (diciamo) 1, che siano definite su sottospazi di $\mathbf{E}$ contenenti x, e che non si annullino su x. Tale insieme è parzialmente ordinato rispetto alla relazione secondo cui $\lambda \leq \lambda'$ quando λ è restrizione di λ'. È ovvio che tale insieme è non vuoto e che ogni catena

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

ammette un maggiorante. Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale $\lambda \in \mathbf{F}^\vee$, con $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. Basta dimostrare che $\mathbf{F} = \mathbf{E}$. Se così non fosse, possiamo fissare un $y \in \mathbf{E} \backslash \mathbf{F}$. Per ogni $z_1, z_2 \in \mathbf{F}$ si ha sempre

$$\lambda\left(z_1\right) - \left|z_1 - y\right| \leq \lambda\left(z_2\right) + \left|z_2 - y\right| \ ,$$

in quanto

$$\begin{aligned} \left(\lambda\left(z_2\right) + \left|z_2 - y\right|\right) - \left(\lambda\left(z_1\right) - \left|z_1 - y\right|\right) &\geq -\left|\lambda\left(z_2\right) - \lambda\left(z_1\right)\right| + \left|z_2 - y - z_1 + y\right| \\ &\geq -\left|\lambda\left(z_2 - z_1\right)\right| + \left|z_2 - z_1\right| \geq 0 \end{aligned}$$

(perché $|\lambda| = 1$). Esiste dunque un α compreso tra $\sup_{z \in \mathbf{F}}\left(\lambda(z) - |z - y|\right)$ ed $\inf_{z \in \mathbf{F}}\left(\lambda(z) + |z - y|\right)$. Posto $\mathbf{F}' := \mathrm{Span}(\mathbf{F} \cup \{y\})$, l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \lambda' : & \mathbf{F}' & \to & \mathbb{R} \\ & z + cy & \mapsto & \lambda(z) + c\alpha \end{array}$$

è ancora lineare, e per ogni $z \in \mathbf{F}$ si ha

$$\lambda'(z) - |z - y| \leq \lambda'(y) \leq \lambda'(z) + |z - y| \ ,$$

---

[5] [Lang, 1999] usa la notazione ∂_ξ, lasciando U sottinteso.

[6] In realtà, almeno in dimensione finita, ξ è determinato dalla sola $\xi_X : C^p(X) \to C^{p-1}(X)$, che addirittura (con la sua proprietà di essere una $\mathbb{R}$-derivazione) potrebbe essere presa proprio come definizione del campo vettoriale. Dobbiamo però qui rinunciare alla dimostrazione, che richiederebbe un po' più di lavoro: una suggestiva esposizione di questo fatto (e della filosofia generale ad esso sottesa) è contenuta in [Nestruev (2003)].

da cui
$$|\lambda'(z-y)| \leq |z-y| \ .$$
Poiché ogni vettore in $\mathbf{F}'$ è multiplo di un vettore del tipo $z-y$ oppure z, con $z \in \mathbf{F}$, concludiamo che λ' ha norma 1. Ma questo contraddice la massimalità di λ. □

Proposizione 3.5. *Siano ξ, η campi vettoriali su una varietà X, ed (U_i, φ_i) una carta di X. Allora vale l'implicazione*
$$\xi_{U_i} = \eta_{U_i} \ \Rightarrow \ \xi \restriction_{U_i} = \eta \restriction_{U_i} \ .$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\xi_x = \eta_x$, $\forall x \in U_i$. Sia per assurdo $x \in U_i$ con $\xi_x \neq \eta_x$. Passando alle rappresentazioni locali abbiamo $\xi_i(y) - \eta_i(y) \neq 0$, con $y := \varphi_i(x)$, e dunque per il teorema 3.4 possiamo fissare un $\lambda_i \in \mathbf{E}_i^\vee$ tale che
$$\lambda_i \left(\xi_i(y) - \eta_i(y)\right) \neq 0 \ .$$
Poniamo $\lambda = \lambda_i \circ \varphi_i$ (così che λ_i è una rappresentazione locale di λ). Abbiamo
$$\xi_{U_i}(\lambda)_i(y) - \eta_{U_i}(\lambda)_i(y) \overset{oss.\ 3.3}{=} \lambda_i'(y)\left(\xi_i(y)\right) - \lambda_i'(y)\left(\eta_i(y)\right) = \lambda_i\left(\xi_i(y) - \eta_i(y)\right) \neq 0 \ ,$$
in contrasto con l'ipotesi $\xi_{U_i} = \eta_{U_i}$. □

Da quanto ora visto, segue subito che se $\xi_U = \eta_U$ per ogni dominio U di carte di un fissato atlante, allora $\xi = \eta$. A maggior ragione, $\xi = \eta$ quando $\xi_U = \eta_U$ per ogni aperto U.

4. Parentesi di Lie

A questo punto, per la prima volta abbiamo bisogno del fatto che le derivate di ordine p in un punto, considerate come forme p-lineari, sono simmetriche. L'estensione al nostro contesto della dimostrazione nota dal corso di analisi 2 (sull'inversione dell'ordine delle derivate parziali), non presenta eccessive difficoltà. A causa dei tempi ristretti (come nel caso dell'estensione delle proprietà elementari dell'integrale in una variabile) la dimostrazione è lasciata come esercizio facoltativo per gli appassionati. È invece richiesta la risoluzione del seguente esercizio: è una rapida conseguenza di [Appunti mod. 1, osservazioni 7.3 e 7.5].

Esercizio (tecnico) 4.1. *Sia $\mu : \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \to \mathbf{F}$ un'applicazione bilineare continua tra spazi di Banach, ed $f_1 : V \to \mathbf{E}_1$, $f_2 : V \to \mathbf{E}_2$ funzioni C^1 tra aperti di spazi di Banach. Provare che la derivata della funzione*
$$g(x) := \mu\left(f_1(x), f_2(x)\right)$$
è data da
$$g'(x)(w) = \mu\left(f_1'(x)(w), f_2(x)\right) + \mu\left(f_1(x), f_2'(x)(w)\right) \ .$$

Proposizione 4.2. *Siano ξ, η campi vettoriali su una C^p–varietà X, con $p \geq 2$. Allora esiste un unico campo vettoriale $[\xi, \eta]$ di classe C^{p-2} tale che per ogni aperto U si abbia*
$$[\xi, \eta]_U = \xi_U \circ \eta_U - \eta_U \circ \xi_U \ .$$
Inoltre, in termini di rappresentazioni locali rispetto ad una carta (U_i, φ_i), si ha
$$[\xi, \eta]_i(y) = \eta_i'(y)\left(\xi_i(y)\right) - \xi_i'(y)\left(\eta_i(y)\right) \ , \qquad \forall y \in \varphi\left(U_i\right) \ .$$

Dimostrazione. Se (U_i, φ_i) è una carta, $f \in C^p(U_i)$ ed $y \in \varphi_i(U_i)$, per l'osservazione 3.3 abbiamo

$$\xi_{U_i}(\eta_{U_i}(f))_i(y) = \eta_{U_i}(f)'_i(y)(\xi_i(y)) \ .$$

Per sviluppare il termine $\eta_{U_i}(f)'_i(y)$ applichiamo ancora l'osservazione 3.3, e ci troviamo così a calcolare la derivata della funzione

$$y \mapsto f'_i(y)(\eta_i(y)) \ .$$

A tal fine, possiamo utilizzare l'esercizio 4.1 con

$$\begin{array}{rccc} \mu: & L(\mathbf{E}_i, \mathbb{R}) \times \mathbf{E}_i & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, h) & \mapsto & \lambda(h) \end{array}$$

e $w = \xi_i(y)$, ottenendo quindi

$$\eta_{U_i}(f)'_i(y)(\xi_i(y)) = f''_i(y)(\xi_i(y))(\eta_i(y)) \ + \ f'_i(y)\big(\eta'_i(y)(\xi_i(y))\big) \ .$$

Abbiamo così calcolato che

$$\xi_{U_i}(\eta_{U_i}(f))_i(y) = f''_i(y)(\xi_i(y))(\eta_i(y)) \ + \ f'_i(y)\big(\eta'_i(y)(\xi_i(y))\big) \ .$$

Scambiando i ruoli di ξ ed η, sottraendo e tenendo presente la simmetria di f'' arriviamo a

$$\big(\xi_{U_i}(\eta_{U_i}(f)) - \eta_{U_i}(\xi_{U_i}(f))\big)_i(y) = f'_i(y)\Big(\eta'_i(y)(\xi_i(y)) - \xi'_i(y)(\eta_i(y))\Big) \ .$$

Ora, $y \mapsto \eta'_i(y)(\xi_i(y)) - \xi'_i(y)(\eta_i(y))$ determina certamente un C^{p-2}–morfismo $\varphi_i(U_i) \to \mathbf{E}_i$. Dunque, per lo meno, è la rappresentazione locale di un campo vettoriale ζ di classe C^{p-2} su U_i che soddisfa la seconda formula in enunciato e, per quanto ora visto, tale che

$$\zeta_{U_i} = \xi_{U_i} \circ \eta_{U_i} - \eta_{U_i} \circ \xi_{U_i} \ .$$

Se ora $U \subseteq U_i$ è un qualunque aperto, il campo ζ ottenuto rispetto alla carta $(U, \varphi_i \restriction_U)$ è ovviamente la restrizione del precedente, dunque vale anche

$$\zeta_U = \xi_U \circ \eta_U - \eta_U \circ \xi_U \ .$$

Dalla proposizione 3.5 segue allora che se (U_j, φ_j) è una qualunque altra carta, il rispettivo campo ζ coincide col precedente su $U_i \cap U_j$. Possiamo allora definire il voluto campo $[\xi, \eta]$ per incollamento dei campi ζ al variare delle carte (U_i, φ_i) in un fissato atlante. Questo campo soddisfa la seconda condizione in enunciato per definizione, e soddisfa la prima almeno per aperti U contenuti in domini di carte. Ma se infine U è un aperto qualunque ed $f \in C^\infty(U)$, allora per ogni carta (U_i, φ_i) si ha

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]_U(f) \restriction_{U \cap U_i} &= [\xi, \eta]_{U \cap U_i}(f \restriction_{U \cap U_i}) \\ &= \xi_{U \cap U_i}(\eta_{U \cap U_i}(f \restriction_{U \cap U_i})) - \eta_{U \cap U_i}(\xi_{U \cap U_i}(f \restriction_{U \cap U_i})) \\ &= (\xi_U \circ \eta_U - \eta_U \circ \xi_U)(f) \restriction_{U \cap U_i} \ . \end{aligned}$$

Ma poiché le intersezioni $U \cap U_i$ ricoprono U, segue

$$[\xi, \eta]_U = \xi_U \circ \eta_U - \eta_U \circ \xi_U \ ,$$

come si voleva. □

Definizione 4.3. *Il campo* $[\xi, \eta]$ *sopra determinato viene detto* parentesi di Lie*, o* commutatore*, di* ξ *ed* η*.*

Riferimenti bibliografici

[Appunti mod. 1] De Paris, A. (2012). Appunti del corso di Fondamenti di Geometria Algebrica e Differenziale, mod. 1. Disponibili nella sezione "supporto alle lezioni" - "materiale didattico", cartella FONDAMENTI_2011_E_ANNI_PRECEDENTI del sito

www.docenti.unina.it/alessandro.de_paris

[Lang, 1999] Lang, S. (1999). Fundamentals of differential geometry, vol. 191, of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York.

[Nestruev (2003)] Nestruev, J. (2003). *Smooth manifolds and observables*, *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 220 (Springer-Verlag, New York), joint work of A. M. Astashov, A. B. Bocharov, S. V. Duzhin, A. B. Sossinsky, A. M. Vinogradov and M. M. Vinogradov, Translated from the 2000 Russian edition by Sossinsky, I. S. Krasil′schik and Duzhin.